GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello del 17 GIUGNO 2010 - Compito A

PARTE I

a) Se $h = 7$ il sistema ha infinite soluzioni (1 variabile libera), mentre se $h \neq 7$ la soluzione è unica.

b) Se $h = 7$ allora $\text{Sol}(A|b) = \{(-7z, 5z + 5, z), z \in \mathbb{R}\}$.
Se $h \neq 7$ allora $\text{Sol}(A|b) = \{(-h, 3 + h, 1)\}$.

c) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

PARTE II

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) $\dim \text{Im} f = 2$ e $\dim \ker f = 1$.

c) f è diagonalizzabile visto che ha 2 autovalori 0 e 5 con

$$ma(0) = mg(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad ma(5) = mg(5) = 2\,.$$

Gli autospazi sono $V_0 = \mathcal{L}((2, 1, 0))$ e $V_5 = \mathcal{L}((1, 3, 0), (2, 0, 3))$.

d)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTE III

a) $\lambda(2x + y + 1) + \mu(y + z) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

b) $2x - 8y - 9z + 1 = 0$.

c) $r' : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$.

d) $8x + y - 3z + 4 = 0$.

PARTE IV

Per la definizione di sottospazio vettoriale si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.
S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ perchè non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare: $(1, 0) \in S$ $-1 \in \mathbb{R}$ e $-1 \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin \mathbb{R}$.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello del 17 GIUGNO 2010 - Compito B

PARTE I

a) Se $h = 0$ il sistema non ha soluzione, mentre se $h \neq 0$ la soluzione è unica.

b) Se $h = 0$ allora $\mathrm{Sol}(A|b) = \emptyset$.
Se $h \neq 0$ allora $\mathrm{Sol}(A|b) = \{(\frac{1}{h} - \frac{1}{2}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{h})\}$.

c) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

PARTE II

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) $\dim \mathrm{Im} f = 2$ e $\dim \ker f = 1$, f non è né iniettiva né suriettiva.

c) f è diagonalizzabile visto che ha 2 autovalori 0 e 2 con

$$ma(0) = mg(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad ma(2) = mg(2) = 2\,.$$

Gli autospazi sono $V_0 = \mathcal{L}((0,1,3))$ e $V_2 = \mathcal{L}((-1,0,1),(2,1,0))$.

d)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTE III

a) $\lambda(3x - z - 2) + \mu(x - y) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

b) $6x - 3y - z = 2$.

c) $r' : \begin{cases} 3y - z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

d) $8x + y - 3z - 6 = 0$.

PARTE IV

Per la definizione di base di uno spazio vettoriale si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

Se $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ sono due basi di V spazio vettoriale allora $b_1, \ldots, b_n$ sono linearmente indipendenti e $c_1, \ldots, c_m$ generatori, quindi $n \leq m$. Viceversa, visto che $b_1, \ldots, b_n$ sono generatori e $c_1, \ldots, c_m$ sono linearmente indipendenti allora $m \leq n$; quindi $n = m$.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello del 8 LUGLIO 2010 - Compito A

PARTE I

a) $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ quindi una base di $\mathrm{Im} f$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
$\ker f = \{0\}$ quindi una base di $\ker f$ è $\emptyset$.

b) f è diagonalizzabile visto che A è simmetrica.

c) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

d) Gli autospazi di f sono $V_7 = \mathcal{L}((0,1,0))$, $V_3 = \mathcal{L}((1,0,2))$ e $V_{-2} = \mathcal{L}((-2,0,1))$. Quindi una base ortonormale di autovettori è

$$\mathcal{B} = \left((0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right).$$

PARTE II

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) $\mathcal{B}(U) = ((-2,-4,0,1),(2,8,1,0))$ e $\mathcal{B}(W) = ((1,-1,2,0),(0,4,1,1))$.

c) $\dim(U+W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

PARTE III

a) Se $\lambda = 0$ la conica è degenere.
Se $\lambda < -1\,, \lambda > 1$ la conica è un'ellisse.
Se $\lambda = \pm 1$, la conica è una parabola.
Se $-1 < \lambda < 1$ e $\lambda \neq 0$ la conica è un'iperbole.

b) $\dfrac{X^2}{36} + \dfrac{Y^2}{18} = 1.$

c) Centro: $C = (-5,-3)$;
assi: $\begin{cases} x = -5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

PARTE IV

Per l'enunciato del teorema di Binet si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

Per ipotesi $\det(A) \neq 0$ e $\det(A') \neq 0$, quindi $\det((A \cdot A')^5) \neq 0$. Dunque il rango $\rho((A \cdot A')^5)$ è massimo e per Rouché-Capelli la soluzione è unica.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello del 8 LUGLIO 2010 - Compito B

PARTE I

a) $\dim \mathrm{Im} f = 2$ e $\dim \ker f = 1$.

b) f è diagonalizzabile visto che ha 3 autovalori distinti: 0, 2 e -2.

c) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

d) Gli autospazi sono $V_0 = \mathcal{L}((1,1,0))$, $V_2 = \mathcal{L}((-2,-1,1))$ $V_{-2} = \mathcal{L}((1,3,0))$ e

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

PARTE II

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) $\mathcal{B}(U) = ((1,-1,1,1),(0,-10,6,7))$ e $\mathcal{B}(W) = ((-2,-1,0,1),(7,4,1,0))$.

c) $\dim(U+W) = 4$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

PARTE III

a) Se $\lambda = -1$ la conica è degenere.
Se $\lambda = 0$, la conica è una parabola.
Se $\lambda \neq 0$ $\lambda \neq -1$ la conica è un'iperbole.

b) $\dfrac{X^2}{3} - \dfrac{Y^2}{\frac{3}{4}} = -1.$

c) Centro: $C = (1,1)$;
assi: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \end{cases}$.

PARTE IV

Per la definizione di insieme di vettori linearmente indipendenti si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

Se $v_j = 0$ allora $0v_1 + \ldots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \ldots + 0v_p = 0$, ma i coefficenti non sono tutti nulli, assurdo.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello del 9 SETTEMBRE 2010 - Compito A

PARTE I

1.a) La matrice A è invertibile per ogni $k \neq 0$ e $k \neq \frac{7}{3}$.

1.b)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -9 & -10 & 1 \\ -4 & -4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2.a) $\dim W = 2$ e $\mathcal{B}(W) = ((1,1,0,0), (-2,0,0,1))$.

PARTE II

1.a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$ e $\dim \ker f = 2$.

1.b) Per verificare che $W \subseteq \ker f$ basta verificare che l'immagine di ciascuno dei generatori di W è $(0,0,0,0)$.
L'uguaglianza vale visto che $W \subseteq \ker f$ e $\dim W = 2 = \dim \ker f$.

1.c) f è diagonalizzabile visto che ha 3 autovalori 0, -1 e 9 con

$$ma(0) = mg(0) = 2\,, \qquad ma(-1) = mg(-1) = 1 \quad \text{e} \quad ma(9) = mg(9) = 1\,.$$

PARTE III

1.a) La conica è una parabola e una sua forma canonica è $Y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}X$.

1.b) Vertice: $C = (0,1)$;
asse: $x - y + 1 = 0$.

2.a) $s : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$.

2.b) r e π si intersecano in un punto in modo ortogonale.

PARTE IV

Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello del 9 SETTEMBRE 2010 - Compito B

PARTE I

1.a) La matrice A è invertibile per ogni $k \neq 0$ e $k \neq 2$.

1.b)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.a) $\dim U = 1$ e $\mathcal{B}(U) = ((1, 0, 1, 0))$.

PARTE II

1.a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$ e $\dim \ker f = 2$.

1.b) Per verificare che $W \subseteq \ker f$ basta verificare che l'immagine di ciascuno dei generatori di W è $(0, 0, 0, 0)$.
L'uguaglianza vale visto che $W \subseteq \ker f$ e $\dim W = 2 = \dim \ker f$.

1.c) f è diagonalizzabile visto che ha 3 autovalori 0, 1 e -3 con

$$ma(0) = mg(0) = 2\,, \qquad ma(1) = mg(1) = 1 \quad \text{e} \quad ma(-3) = mg(-3) = 1\,.$$

PARTE III

1.a) La conica è una parabola e una sua forma canonica è $Y^2 = \sqrt{2}X$.

1.b) Vertice: $C = (0, 0)$;
asse: $x - y = 0$.

2.a) $\Lambda : x + y + 4z - 10 = 0$.

2.b) r e π sono paralleli.

PARTE IV

Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello di GENNAIO 2011 - Compito A

PARTE I

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) Se $\mu = 0$, il sistema ammette un'unica soluzione: $(0, 1, 0)$.
Se $\mu \neq 0$, il sistema non ammette soluzione.

PARTE II

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) $\mathcal{B}(\ker g) = \emptyset$ e una base di $\mathrm{Im} g$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

c) g è sia iniettiva che suriettiva.

d) g è diagonalizzabile visto che ha 2 autovalori 1 e 2 con

$$ma(2) = mg(2) = 1 \qquad \text{e} \qquad ma(1) = mg(1) = 2\,.$$

Gli autospazi sono $V_2 = \mathcal{L}((1, 1, -1))$ e $V_1 = \mathcal{L}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ e quindi una base di autovettori di g è data da

$$\mathcal{B} = ((1, 1, -1), (1, 1, 0), (-1, 0, 1))\,.$$

PARTE III

a) $\mu(2y - 2 - z) + \lambda(4x - 8 - 3z) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

b) $6x - 5y - 2z = 7$.

c) $2x - 9y + 3z + 5 = 0$.

d) $4x - 8y + z = 0$.

PARTE IV
Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello di GENNAIO 2011 - Compito B

PARTE I

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) Se $\lambda = -1$, il sistema ammette un'unica soluzione: $(1, -1, 0)$.
Se $\lambda \neq -1$, il sistema non ammette soluzione.

PARTE II

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) $\mathcal{B}(\ker f) = ((-1, -1, 4))$ e $\mathcal{B}(\mathrm{Im} f) = ((3, 1, 2), (1, 3, -2))$.

c) f non è né iniettiva né suriettiva.

d) f è diagonalizzabile visto che ha 3 autovalori distinti 0, 2 e 4. Gli autospazi sono $V_0 = \mathcal{L}((1, 1, -4))$, $V_2 = \mathcal{L}((0, -1, 1))$ e $V_4 = \mathcal{L}((1, 1, 0))$ e quindi una base di autovettori di f è data da

$$\mathcal{B} = ((1, 1, -4), (0, -1, 1), (1, 1, 0)) \,.$$

PARTE III

a) $\mu(2x - 2 - z) + \lambda(4y - 8 - 3z) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

b) $5x - 6y + 2z + 7 = 0$.

c) $9x - 2y - 3z = 5$.

d) $8x - 4y - z = 0$.

PARTE IV

Per la definizione di sottospazio vettoriale si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

$\mathbb{Z}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$ perchè non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare: $1 \in \mathbb{Z}$ $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{R}$.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello di FEBBRAIO 2011 - Compito A

PARTE I

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) Se $h = 1$, il sistema ammette infinite soluzioni (1 variabile libera) e $\mathrm{Sol}(A|0) = \left\{ \left(-\frac{1}{4}t, -\frac{5}{4}t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$.
Se $h \neq 1$, il sistema ammette un'unica soluzione: $\mathrm{Sol}(A|0) = \{(0, 0, 0)\}$.

PARTE II

a)
$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

b) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

c) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, f_h non è né iniettiva né suriettiva.

d) Se $h \neq 0$ e $h \neq 3$ f_h è diagonalizzabile, visto che ha 3 autovalori distinti h, 0 e 3.
Se $h = 0$, f_0 non è diagonalizzabile visto che $mg(0) = 1 \neq 2 = ma(0)$.
Se $h = 3$, f_3 non è diagonalizzabile visto che $mg(3) = 1 \neq 2 = ma(3)$.

PARTE III

a) Se $\lambda = 0$ la conica è degenere.
Se $\lambda < -2\,, \lambda > 2$ la conica è un'iperbole.
Se $\lambda = \pm 2$, la conica è una parabola.
Se $-2 < \lambda < 2$ e $\lambda \neq 0$ la conica è un'ellisse.

b) $\frac{X^2}{6} - Y^2 = \frac{5}{18}$.

c) $\mu(2 - 2y - z) + \lambda(3x - 3 - 4z) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

d) $3x + 2y - 3z = 5$.

PARTE IV

Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Soluzioni Appello di FEBBRAIO 2011 - Compito B

PARTE I

a) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

b) Se $h = -\frac{5}{2}$, il sistema ammette infinite soluzioni (1 variabile libera) e
$\mathrm{Sol}(A|0) = \left\{\left(\frac{5}{6}t, \frac{5}{12}t, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$.
Se $h \neq -\frac{5}{2}$, il sistema ammette un'unica soluzione: $\mathrm{Sol}(A|0) = \{(0,0,0)\}$.

PARTE II

a)
$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

b) Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.

c) Per ogni $m \in \mathbb{R}$, f_m non è né iniettiva né suriettiva.

d) Se $m \neq 0$ e $m \neq 4$ f_m è diagonalizzabile, visto che ha 3 autovalori distinti m, 0 e 4.
Se $m = 0$, f_0 non è diagonalizzabile visto che $mg(0) = 1 \neq 2 = ma(0)$.
Se $m = 3$, f_4 non è diagonalizzabile visto che $mg(4) = 1 \neq 2 = ma(4)$.

PARTE III

a) Se $\mu = -1$ o $\mu = 3$ la conica è degenere.
Se $\mu \neq 0$, $\mu \neq -1$ e $\mu \neq 3$ la conica è un'iperbole.
Se $\mu = 0$, la conica è una parabola.

b) $\frac{X^2}{4} - Y^2 = -\frac{9}{16}$.

c) $\mu(2x - 2 - z) + \lambda(3y - 6 - 4z) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

d) $-6x + 3y - z = 0$.

PARTE IV

Si veda un qualsiasi libro di algebra lineare.