GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Appello del 9 SETTEMBRE 2010 - Compito A

PARTE I

(1) Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 4k & 0 & k \end{pmatrix}$$

(1.a) Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile. **(3 pt)**

(1.b) Trovare l'inversa di A per $k = 2$. **(4 pt)**

(2) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ così definito

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - 2y + z + 4t = x - y - 4z + 2t = -x + y + 3z - 2t = 0\}.$$

(2.a) Stabilire la dimensione di W e trovare una sua base. **(3 pt)**

PARTE II

(1) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + z - 2t, 2x + 4y + 2z + 4t, 4x + 8y + 4z, -t).$$

(1.a) Dopo aver calcolato la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche, calcolare la dimensione del nucleo di f e dell'immagine di f. **(3 pt)**

(1.b) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti tre vettori

$$(-3, 1, 1, 0), (0, 1, -2, 0), (-3, -1, 5, 0).$$

Verificare che $W \subseteq \ker f$; vale l'uguaglianza? **(3 pt)**

(1.c) Stabilire se f è diagonalizzabile. **(4 pt)**

PARTE III

(1) Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione cartesiana:

$$\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 + 3x - y = 0$$

(1.a) Classificare la conica data e trovare una sua forma canonica. **(2 pt)**

(1.b) Trovare centro e assi, oppure vertice e asse, della conica . **(4 pt)**

(2) Sia π il piano di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 2z + 3 = 0\}.$$

Sia $P = (1, -1, 2)$ e sia r la retta così definita

$$r : \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

(2.a) Determinare l'equazione parametrica della retta s che passa per P ed è ortogonale a π. **(1 pt)**

(2.b) Stabilire la posizione reciproca di r e π, cioè stabilire se sono ortogonali o paralleli o nessuno dei due. **(3 pt)**

PARTE IV

Siano V e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Definire la loro somma $V + W$, la loro intersezione $V \cap W$ ed enunciare la formula di Grassmann.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Appello del 9 SETTEMBRE 2010 - Compito B

PARTE I

(1) Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & -1 & 1 \\ 0 & -k & 2 \\ k & k & -2 \end{pmatrix}$$

(1.a) Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile. **(3 pt)**

(1.b) Trovare l'inversa di A per $k = 1$. **(4 pt)**

(2) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ così definito

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z + t = 2x + y - 2z + t = -x - 2y + z + t = 0\}.$$

(2.a) Stabilire la dimensione di U e trovare una sua base. **(3 pt)**

PARTE II

(1) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z, t) = (2x + 3y - z - 2t, -2x - 3y + z + 2t, 4x + 6y - 2z + 4t, t).$$

(1.a) Dopo aver calcolato la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche, calcolare la dimensione del nucleo di f e dell'immagine di f. **(3 pt)**

(1.b) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti tre vettori

$$(1, -1, -1, 0), (5, -4, -2, 0), (-3, 2, 0, 0).$$

Verificare che $W \subseteq \ker f$; vale l'uguaglianza? **(3 pt)**

(1.c) Stabilire se f è diagonalizzabile. **(4 pt)**

PARTE III

(1) Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione cartesiana:

$$\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

(1.a) Classificare la conica data e trovare una sua forma canonica. **(2 pt)**

(1.b) Trovare centro e assi, oppure vertice e asse, della conica . **(4 pt)**

(2) Sia π il piano di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - z + 5 = 0\}.$$

Sia $P = (1, 1, 2)$ e sia r la retta così definita

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 4y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

(2.a) Determinare l'equazione cartesiana del piano Λ che passa per P ed è ortogonale a r. **(1 pt)**

(2.b) Stabilire la posizione reciproca di r e π, cioè stabilire se sono ortogonali o paralleli o nessuno dei due. **(3 pt)**

PARTE IV

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore lineare e sia λ un suo autovalore. Definire la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ ed enunciare le relative disuguaglianze.