GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Appello del 8 LUGLIO 2010 - Compito A

PARTE I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f. **(3 pt)**

(b) Stabilire se f è diagonalizzabile. **(1 pt)**

(c) Scrivere la definizione di matrice simmetrica e di matrice ortogonale. **(2 pt)**

(d) Costruire, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori. **(4 pt)**

PARTE II

Siano U e W i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 4z = x - 2z + 2t = 0\}$$

$$W = \mathrm{Span}((1, -1, 2, 0), (-2, 6, -3, 1), (-1, 5, -1, 1))$$

(a) Verificare che l'intersezione $S \cap T$ di due sottospazi $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ è ancora un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. **(2 pt)**

(b) Trovare una base dei sottospazi U e W. **(4 pt)**

(c) Trovare la dimensione dei sottospazi $U + W$ e $U \cap W$. **(4 pt)**

PARTE III

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e siano date le coniche di equazione cartesiana

$$\mathcal{C}(\lambda) : \lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 + 8\lambda x + 8y = 0.$$

(a) Classificare al variare di λ la conica $\mathcal{C}(\lambda)$. **(4 pt)**

(b) Per $\lambda = 3$ determinare l'equazione canonica di $\mathcal{C}(3)$. **(3 pt)**

(c) Scrivere le coordinate del centro (o del vertice) e le equazioni parametriche degli assi della conica introdotta nel punto precedente. **(3 pt)**

PARTE IV

Enunciare il teorema di Binet.

Mostrare che il sistema lineare $(A \cdot A')^5 X = 0$ dove A, A' sono matrici con n colonne e n righe e con determinante non nullo ammette sempre un'unica soluzione. **(3 pt)**

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Appello del 8 LUGLIO 2010 - Compito B

PARTE I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f. **(3 pt)**

(b) Stabilire se f è diagonalizzabile. **(3 pt)**

(c) Scrivere la definizione di matrice invertibile. **(1 pt)**

(d) Costruire una matrice invertibile P e una matrice diagonale D, se esistono, tali che $D = P^{-1}AP$. **(3 pt)**

PARTE II

Siano U e W i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da:

$$U = \mathrm{Span}((1,-1,1,1),(7,3,1,0),(4,6,-2,-3))$$

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = x - y - 3z + t = 0\}$$

(a) Verificare che la somma $S+T$ di due sottospazi $S,T \subseteq \mathbb{R}^n$ è ancora un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. **(2 pt)**

(b) Trovare una base dei sottospazi U e W. **(4 pt)**

(c) Trovare la dimensione dei sottospazi $U+W$ e $U \cap W$. **(4 pt)**

PARTE III

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e siano date le coniche di equazione cartesiana

$$\mathcal{C}(\lambda) : 2\lambda xy + (1-\lambda^2)y^2 - 4x + 2y + 4 = 0.$$

(a) Classificare al variare di λ la conica $\mathcal{C}(\lambda)$. **(4 pt)**

(b) Per $\lambda = 2$ determinare l'equazione canonica di $\mathcal{C}(2)$. **(3 pt)**

(c) Scrivere le coordinate del centro (o del vertice) e le equazioni parametriche degli assi della conica introdotta nel punto precedente. **(3 pt)**

PARTE IV

Sia V uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $\{v_1,\dots,v_p\}$ un insieme di vettori di V. Cosa significa che $v_1,\dots,v_p$ sono linearmente indipendenti?

Mostrare che se $v_1,\dots,v_p$ sono linearmente indipendenti allora nessuno dei vettori è il vettore nullo. **(3 pt)**