GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

Appello del 17 GIUGNO 2010 - Compito A

PARTE I Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x + y + (2 + 2h)z = 5 \\ y - 5z = h - 2 \end{cases}$$

(a) Definire il rango di una matrice. Enunciare condizioni necessarie e sufficienti per la risolubilità di un sistema lineare. **(3 pt)**

(b) Discutere al variare di $h \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema. **(4 pt)**

(c) Determinare tutte le soluzioni del sistema in funzione di h. **(3 pt)**

PARTE II Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Definire il nucleo di un'applicazione lineare. **(1 pt)**

(b) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f. **(3 pt)**

(c) Stabilire se f è diagonalizzabile. **(3 pt)**

(d) Costruire una matrice invertibile P e una matrice diagonale D, se esistono, tali che $D = P^{-1}AP$. **(3 pt)**

PARTE III

Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

e siano $P = (3, 2, -1)$ e $Q = (2, -1, 5)$ punti di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per r. **(1 pt)**

(b) Determinare il piano passante per r e per il punto P. **(3 pt)**

(c) Determinare la retta parallela a r e passante per Q. **(3 pt)**

(d) Determinare il piano passante per r e parallelo alla retta $s : \begin{cases} 3y - z - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$. **(3 pt)**

PARTE IV

Scrivere la definizione di sottospazio vettoriale e stabilire se l'insieme $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. **(3 pt)**

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Appello del 17 GIUGNO 2010 - Compito B

PARTE I
Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 4x + (4-h)z = -1 \\ 5x + 6y + (5+6h)z = 2 \end{cases}$$

(a) Enunciare il teorema di Rouché-Capelli.**(3 pt)**

(b) Discutere al variare di $h \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema. **(4 pt)**

(c) Determinare tutte le soluzioni del sistema in funzione di h. **(3 pt)**

PARTE II
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ -6 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Definire l'immagine di un'applicazione lineare. **(1 pt)**

(b) Studiare iniettività e suriettività di f. **(3 pt)**

(c) Stabilire se f è diagonalizzabile. **(3 pt)**

(d) Costruire una matrice invertibile P e una matrice diagonale D, se esistono, tali che $D = P^{-1}AP$. **(3 pt)**

PARTE III
Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 3y - z - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

e siano $P = (1, 2, -2)$ e $Q = (1, 0, -1)$ punti di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per r. **(1 pt)**

(b) Determinare il piano passante per r e per il punto P. **(3 pt)**

(c) Determinare la retta parallela a r e passante per Q. **(3 pt)**

(d) Determinare il piano passante per r e parallelo alla retta $s : \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. **(3 pt)**

PARTE IV

Dare la definizione di base di uno spazio vettoriale e dimostrare che tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di elementi utilizzando il fatto che se m vettori di V sono linearmente indipendenti e n vettori di V sono generatori allora $m \leq n$. **(3 pt)**