GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Appello di GENNAIO 2011 - Compito A

PARTE I

(a) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli. **(3 pt)**

(b) Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale μ. **(7 pt)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mu+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \mu-1 & 2\mu & -(\mu+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2\mu \end{pmatrix}$$

PARTE II

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$g(x, y, z) = (y - z, -x + 2y - z, x - y + 2z).$$

(a) Scrivere la definizione di nucleo e di immagine di un'applicazione lineare. **(3 pt)**

(b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di g. **(3 pt)**

(c) Stabilire se g è iniettiva e/o suriettiva. **(1 pt)**

(d) Stabilire se g è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di g. **(3 pt)**

PARTE III

Siano dati il piano $\alpha : 2x + 2y + z = 0$, il vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2(y-1) = z \\ 4(x-2) = 3z \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r. **(1 pt)**

(b) Determinare il piano passante per r e ortogonale ad α. **(3 pt)**

(c) Determinare il piano passante per r e parallelo a $\mathbf{v}$. **(3 pt)**

(d) Determinare il piano passante per r e per il punto $P = (3, 2, 4)$.

PARTE IV

Data la conica C di equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

spiegare in modo sintetico ma preciso il procedimento per stabilire il tipo di C, ovvero se C è degenere, un'ellisse, un'iperbole, o una parabola. **(3 pt)**

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Appello di GENNAIO 2011 - Compito B

PARTE I

(a) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli. **(3 pt)**

(b) Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale λ. **(7 pt)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda+1 & 2\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2\lambda \end{pmatrix}$$

PARTE II

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, x + 3y + z, 2x - 2y).$$

(a) Scrivere la definizione di nucleo e di immagine di un'applicazione lineare. **(3 pt)**

(b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f. **(3 pt)**

(c) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva. **(1 pt)**

(d) Stabilire se f è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f. **(3 pt)**

PARTE III

Siano dati il piano $\alpha : 2x + 2y + z = 0$, il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2(x-1) &= z \\ 4(y-2) &= 3z \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r. **(1 pt)**

(b) Determinare il piano passante per r e ortogonale ad α. **(3 pt)**

(c) Determinare il piano passante per r e parallelo a $\mathbf{v}$. **(3 pt)**

(d) Determinare il piano passante per r e per il punto $P = (2, 3, 4)$. **(3 pt)**

PARTE IV

Scrivere la definizione di sottospazio vettoriale e stabilire se l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}$ costituito dall'insieme dei numeri reali.
(3 pt)