ESERCIZI APPLICAZIONI LINEARI

PAOLO FACCIN

1. Esercizi sulle applicazioni lineari

1.1. **Definizioni sulle applicazioni lineari.** Siano V, e W spazi vettoriali, con rispettive basi $\mathcal{B}_V := (v_1 \cdots v_n)$ e $\mathcal{B}_W := (w_1 \cdots w_k)$.

Sia $T : V \to W$ una applicazione. T si dice applicazione lineare se si verifica che:
$\forall s, p \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ vale la relazione $T(\lambda s + t) = \lambda T(s) + T(p)$
Il che é equivalente a provare la veridicitá delle seguenti 3 affermazioni:

- $T(0_V) = 0_W$;
- $T(s + p) = T(s) + T(p)$;
- $T(\lambda s) = \lambda T(s)$.

Se T é una applicazione lineare, definiamo i seguenti insiemi:

- Il nucleo di T, $Ker(T) := \{v \in V : T(v) = 0\}$, che rappresenta l'insieme di tutti i vettori che vengono mandati in 0_W da T. Risulta essere sottospazio vettoriale di V.
- L'immagine di T, $Im(T) := \{w \in W : \exists v \in V : w = T(v)\}$ che rappresenta l'insieme di tutti i vettori di W che vengono centrati (non necessaria mente in maniera unica) dall'applicazione T. Risulta essere sottospazio vettoriale di W.

Si ha che:

- se $Ker(T) = \{0_V\}$, allora T si dice iniettiva;
- se $Im(T) = W$, allora T si dice suriettiva;
- se T, é iniettiva e suriettiva allora si dice biettiva.

Vale la seguente relazione:

Theorem 1.1 (Teorema della dimensione)**.** *Sia $T : V \to W$ una applicazione lineare. Vale la relazione $dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$.*

Esempio
Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y) = (x + y, 2x - 3y, y)$.
Verificare se T é una applicazione lineare o meno.

Sol: Notiamo che il vettore immagine $w := (x+y, 2x-3y, y)$ dell'applicazione T é descritto in ciascuna coordinata da polinomi omogenei di primo grado nelle variabili di partenza. Questo da solo basterebbe a stabilire che T é lineare. Ma siccome si chiede di verificare che T é lineare, il conto bisogna farlo.

Come risolvere l'esercizio:
Siano $v := (a, b)$, $s := (c, d)$ vettori di $\mathbb{R}^2$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Usiamo la definizione di applicazione lineare:

(1) Calcoliamo il vettore
$$A := T(\lambda v + s) = T(\lambda(a, b) + (c, d)) = T((\lambda a, \lambda b) + (c, d)) = T((\lambda a + c, \lambda b + d))$$
Esso é uguale al vettore $(\lambda a + c + \lambda b + d, 2\lambda a + 2c - 3\lambda b - 3d, \lambda b + d)$
(2) Calcoliamo $T(v) = (a + b, 2a - 3b, b)$, $T(s) = (c + d, 2c - 3d, d)$.
(3) Calcoliamo il vettore
$$B := \lambda T(v)+T(s) = \lambda(a+b, 2a-3b, b)+(c+d, 2c-3d, d) = (\lambda a+c+\lambda b+d, 2\lambda a+2c-3\lambda b-3d, \lambda b+d)$$
(4) Confrontiamo A con B. Se sono identici T é lineare, se non lo sono T non lo é. Nel nostro caso lo sono, quindi T é lineare e il conto appena svolto ne é la prova.

Usiamo le tre verifiche alternative, tenendo bene a mente che devono essere soddisfatte tutte e 3 perché T sia lineare.

- Calcoliamo $T((0,0))$. Se tale vettore é $(0,0,0)$ allora T ha passato il primo test di linearitá.
  Effettivamente nel nostro caso $T((0,0)) = (0,0,0)$
- Calcoliamo $A := T(v) + T(s)$ e $B := T(v+s)$. Se vale che $A = B$ allora T ha passato il secondo test di linearitá.
  Effettivamente nel nostro caso $A = (a+c+b+d, 2a+2c-3b-3d, b+d) = B$
- Calcoliamo $F := \lambda T(v)$ e $G := T(\lambda v)$. Se vale che $F = G$ allora T ha passato il terzo test di linearitá.
  Effettivamente nel nostro caso $F = (\lambda a + \lambda b, 2\lambda a - 3\lambda b, \lambda b) = G$.
- Se T li ha passati tutti e 3 allora é lineare.
  Nel nostro caso T supera tutti i nostri test. T é lineare.

Esempio 2
Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x,y) = (x+y+1, 2x-3y, y^2)$.
Verificare se T una applicazione lineare o meno.

Sol: Notiamo che il vettore immagine $w := (x+y+1, 2x-3y, y^2)$ dell'applicazione T non é descritto in ciascuna coordinata da polinomi omogenei di primo grado nelle variabili di partenza. Questo da solo basterebbe a stabilire che T non é lineare. Ma siccome si chiede di verificare se T é lineare, il conto bisogna farlo.

In questo caso sappiamo giá che T non lo é (in teoria). Quindi basta scegliere di verificare il test di linearitá che sappiamo giá fallire. Ad esempio il terzo.

Infatti, sia $v := (a,b)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\lambda T(v) = \lambda(a+b+1, 2a-3b, b^2) = (\lambda a + \lambda b + \lambda, 2\lambda a - 3\lambda b, \lambda b^2)$
- $T(\lambda v) = T(\lambda a, \lambda b) = (\lambda a + \lambda b + 1, 2\lambda a - 3\lambda b, \lambda^2 b^2)$

I 2 vettori ottenuti sono diversi, dunque T fallisce il terzo test di linearitá, perció non é lineare. Notiamo che T avrebbe fallito anche il secondo e il primo in questo caso.

2. Applicazioni e lineari e basi

E' bene tenere presente che le applicazioni lineari sono molto rigide; a causa della loro definizione, o se vogliamo vederla in un altro modo, a causa delle proprietá che vogliamo che soddisfi non abbiamo troppa libertá sulla sua definizione.

Il fatto é, che una volta deciso il comportamento su una base $(v_1, \cdots v_n)$ dello spazio di partenza, ovvero una volta che abbiamo scelto (arbitrariamente) i valori $T(v_1), \cdots T(v_n)$, i valori di un generico vettore $v \in V$, sono giá stabiliti dalla linearitá di T.

Infatti, il vettore v sará combinazione lineare dei vettori $v_1, \cdots v_n$ della base.
Ovvero $v = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Tali λ_i sono unici, in quanto $(v_1, \cdots v_n)$ é una base dello spazio.
Dunque $T(v) = T(\Sigma_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \Sigma_{i=1}^n T(\lambda_i v_i) = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$, uguaglianze valide perché T é lineare. A questo punto basta notare che i $T(v_i)$ sono stati fissati, e i λ_i sono univocamente determinati. Ne segue che il valore di $T(v)$ per linearitá di T non puó essere differente da quello trovato.

Se trovassimo in un esercizio una aplicazione T definita su una base e un altro vettore v, se il valore di $T(v)$ dato nel testo non coincide con $\Sigma_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$, allora T non é lineare.

Esempio
Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente: $T(e_1) = (1, 2, 1)$ e $T(e_2) = (4, 0, 1)$.

- Esplicitare $T(x, y)$
- Stabilire se $(0, 0, 0)$, $(3, 4, 1)$ $(3, -2, 0)$ appartengono a $Im(T)$ o meno.

Sol: Con questo esercizio si vede bene come la rigiditá della linearitá forza il comportamento dell'applicazione sui vettori dello spazio una volta stabilito il valore su una base.
Un vettore generico (x, y) di $\mathbb{R}^2$ si puó vedere come combinazione lieare della base canonica.
Ovvero $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.
La sua immagine, per linearitá di T é forzata a essere:

$$T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1)) = T(x(1, 0)) + T(y(0, 1)) = xT(1, 0) + yT(0, 1) =$$

$$= x(1, 2, 1) + y(4, 0, 1) = (x, 2x, x) + (4y, 0, y) = (x + 4y, 2x, x + y)$$

.
$(0, 0, 0) \in ImT$? Se T é lineare ció é sempre vero. Quindi la risposta é, sí.

$(3, 4, 1) \in ImT$?

Ricordiamo che $w \in ImT$ se e solo se esiste $v \in V$ tale che $T(v) = w$.
In particolare nel nostro caso abbiamo che $ImT = \langle(1, 2, 1), (4, 0, 1)\rangle$.
Dunque, $(3, 4, 1) \in ImT \iff (3, 4, 1) \in \langle(1, 2, 1), (4, 0, 1)\rangle$.
Il che é equivalente a dire che $(3, 4, 1) \in ImT$ solo se il sistema
$x(1, 2, 1) + y(4, 0, 1) = (3, 4, 1)$ ha soluzione.

$$\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 2x = 4 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4y = 3 \\ x = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = 1 \\ x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Poiché il sistema non é risolubile, si ha che il vettore $(3, 4, 1) \notin ImT$.

$(3, -2, 0) \in ImT$?

Come prima $(3, -2, 0) \in ImT$ solo se il sistema $x(1, 2, 1) + y(4, 0, 1) = (3, -2, 0)$ ha soluzione.

$$\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 2x = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4y = 3 \\ x = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = 4 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Poiché il sistema é risolubile, si ha che il vettore $(3, 4, 1) \in ImT$.
Inoltre poiché la soluzione é $(-1, 1)$, abbiamo che

$$(3, -2, 0) = -1(1, 2, 1) + 1(4, 0, 1) = -T(e_1) + T(e_2)$$

Esempio 2
Stabilire al variare di $k \in \mathbb{R}$ se l'applicazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

- $T(2,3) = (1,1)$,
- $T(0,1) = (-2,-1)$,
- $T(2,4) = (-1,k)$.

é lineare o meno.

Sol: Notiamo che $((2,3),(0,1))$ sono una base dello spazio di partenza $\mathbb{R}^2$.
E che $(2,4) = (2,3) + (0,1)$.
Dunque T é stata definita su una base dello spazio di partenza e su un altro vettore.
Se T ĺineare allora deve valere che:

$$T(2,4) = T((2,3) + (0,1)) = T(2,3) + T(0,1) = (1,1) + (-2,-1) = (-1,0)$$

Tuttavia ci é stato definito anche $T(2,4) = (-1,k)$.
T é lineare solo se i 2 vettori coincidono, ovvero solo se $(-1,0) = (-1,k)$.
Ció é vero solo quando $k = 0$. Dunque T é lineare solo quando $k = 0$.

3. Applicazioni lineari e matrici associate

Sia $T : V \to W$ una applicazione lineare e sia $\mathcal{B}_V = (v_1, \cdots v_n)$ una base di V.
La matrice $A := [T(v_1), \cdots T(v_n)]$ (vettori colonna!) si dice matrice associata alla applicazione T rispetto alla base $\mathcal{B}_V$; sia inoltre A' la sua forma ridotta per righe.
Essa é uno strumento molto importante per lo studio delle apllicazioni lineari. Infatti, valgono le seguenti relazioni fra la matrice A e l'applicazione T.

- $dim(Im(T)) = \rho(A) = \rho(A')$
- $Im(T) = \langle$Colonne di A$\rangle$, ma $Im(T) \neq \langle$Colonne di A'$\rangle$
- $\mathcal{B}_{Im(T)} =$ (Colonne L.I. di A), ma $\mathcal{B}_{Im(T)} \neq \langle$Colonne L.I. di A'$\rangle$
- $w \in Im(T)$ se e solo se $Ax = w$ ha soluzione, ovvero se e solo se $\rho(A) = \rho(A|w)$
- T é biettiva solo se la matrice A é invertibile, ovvero solo se $det(A) \neq 0$.
  In particolare la matrice deve essere quadrata.

Se la base rispetto a cui é stata calcolata la matrice A é quella canonica, allora valgono le seguenti proprietá:

- $w \in Im(T)$ se e solo se $Ax = w$ ha soluzione, ovvero se e solo se $\rho(A) = \rho(A|w)$.
  In particolare vale che le soluzioni v del sistema sono tali che $T(v) = w$.
- $v \in Ker(T)$ se e solo se $Av = 0$, o equivalentemente $A'v = 0$
- $dim(Ker(T)) = n - \rho(A) = n - \rho(A')$, dove $n = dim(V)$.

Dunque per semplicitá conviene sempre calcolare la matrice A rispetto alla base canonica!!!

Supponiamo che T sia un endomorfismo, ovvero $T : V \to V$; nonostante il teorema della dimensione affermi che $dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$, non é in generale vero che $\mathcal{B}_{Im(T)} \cup \mathcal{B}_{Ker(T)}$ é una base di V!

Esempio
Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $T(x,y,z) = (2x+z, -2x+y+z, y+2z)$.

- Determinare una base e la dimensione degli spazi $Ker(T)$ e $Im(T)$
- Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ tutti i vettori v tali che $T(v) = (3,3,k)$

Sol: Sia A la matrice associata all'applicazione T rispetto alla base canonica. Ovvero:

$$A = \begin{vmatrix} T(e_1), & T(e_2), & T(e_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Riduciamo A per righe per calcolarne il rango, e determinare la dimensione di $Im(T)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} R_2 \to R_2 + R_1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} R_3 \to R_3 - R_2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matrice cosí ottenuta e ridotta per righe, e si vede che $\rho(A) = \rho(A') = 2$.
Dunque da questa semplice informazione ricaviamo che:

(1) $dim(Im(T)) = \rho(A) = 2$.
(2) Poiché $dim(Im(T)) = 2 < 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, T non é suriettiva.
(3) Dal teorema della dimensione $dim(Ker(T)) = dim(\mathbb{R}^3) - \rho(A') = 3 - 2 = 1$, dunque T non é iniettiva.

Poiché abbiamo calcolato la matrice A rispetto alla base canonica abbiamo che:

$$Ker(T) := \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : A'v = 0\}$$

Calcoliamo le soluzioni del sistema $A'v = 0$:

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z/2 \\ y = -2z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dunque $Ker(T) := \{(-z/2, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
Ovvero $Ker(T) := \langle(-1/2, -2, 1)\rangle$ e una base di $Ker(T)$ é $\mathcal{B}_{Ker(T)} = ((1, 4, -2))$.
Questo é dovuto al fatto che, visto che sono a conoscenza che $dim(Ker(T)) = 1$, e conoscendo un vettore che lo genera, allora uno qualsiasi dei suoi multipli non nulli ne forma una base.

Rimane da calcolare una base dell'immagine di T. Dalla teoria sappiamo che
$Im(T) := \langle$Colonne di A$\rangle$ e che una base di $Im(T)$ si ottiene considerando che
$\mathcal{B}_{Im(T)} =$ (Colonne L.I. di A)
Nel nostro caso abbiamo che $Im(T) = \langle(2,-2,0), (0,1,1), (1,1,2)\rangle$. Abbiamo visto in una esercitazione passata che per calcolare la base di uno spazio vettoriale a partire dai sui generatori $w_1, \cdots w_k$, si procede come segue:

(1) Si considera la matrice W le cui righe sono i generatori dello spazio vettoriale.
(2) Si riduce W per righe.
(3) Le righe non nulle della matrice ridotta formano una base di tale sottospazio

Nel nostro caso

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} R_3 \to 2R_3 - R_1 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} R_3 \to R_3 - 4R_2 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dunque la base cercata é $\mathcal{B}_{Im(T)} = ((2,-2,0), (0,1,1))$.

Rimane da risolvere il secondo punto del problema. Ovvero stabile i $k \in \mathbb{R}$ per cui $w = (3,3,k) \in Im(T)$ e in quel caso trovare i vettori v tali che $T(v) = (3,3,k)$.
Ricordiamo che $w \in Im(T)$ se e solo se $\rho(A) = \rho(A|w)$.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array}\right| R_2 \to R_2 + R_1 \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array}\right| R_3 \to R_3 - R_2 \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & k-6 \end{array}\right|$$

Notiamo che $\rho(A) = 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Mentre se $k = 6$ abbiamo che $\rho(A|w) = 2$, altrimenti $\rho(A|w) = 3$. Dunque il nostro vettore w per il teorema di Rouché Capelli sta nell'immagine di T solo quando $k = 6$.

In tal caso le soluzioni del sistema, che saranno $\infty^{3-\rho(A)} = \infty^{3-2} = \infty^1$, sono i vettori v tali che $T(v) = w$. Questo perché é stata scelta la base canonica per il calcolo di A. Risolviamo il sistema associato ($k = 6$):

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + 2z = 6 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3/2 - z/2 \\ y = 6 - 2z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dunque le soluzioni sono l'insieme $\{(3/2 - z/2, 6 - 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Ne segue che un qualunque vettore di quella forma é tale che $T(v) = (3,3,6)$.

Esempio 2
Sia $f := \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z,t) := (x + 2y + z - 2t, 2x + 4y + 2z + 4t, 4x + 8y + 4z, -t)$$

- Calcolare la dimensione del nucleo di f e dell'immagine di f.
- Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

  $$(-3,1,1,0) \qquad (0,1,-2,0) \qquad (-3,-1,-5,0)$$

  Verificare che $W \subset Ker(f)$; vale l'uguaglianza?

Sol: Per facilitare i calcoli calcoliamo la matrice A associata all'applicazione f rispetto alla base canonica.

$$A = \left| \; T(e_1), \quad T(e_2), \quad T(e_3), \quad T(e_4) \; \right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right|$$

Riduciamo A per righe per calcolarne il rango, e determinare la dimensione di $Im(T)$.

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_2 \end{array} \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{c} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to 8R_4 + R_2 \end{array} \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

La matrice cosí ottenuta e ridotta per righe, e si vede che $\rho(A) = \rho(A') = 2$.
Dunque da questa semplice informazione ricaviamo che:

(1) $dim(Im(T)) = \rho(A) = 2$.
(2) Poiché $dim(Im(T)) = 2 < 4 = dim(\mathbb{R}^4)$, T non é suriettiva.
(3) Dal teorema della dimensione $dim(Ker(T)) = dim(\mathbb{R}^3) - \rho(A') = 4 - 2 = 2$, dunque T non é iniettiva.

Invece di andare a calcolare un base di $Ker(f)$ e $Im(f)$, visto che non é richiesto, cerchiamo di rispondere alla seconda richiesta.
Calcoliamo innanzitutto una base di W. Scriviamo dunque la matrice B che ha come righe i generatori di questo sottospazio e riduciamola per righe. Le righe non nulle formeranno una base di questo sottospazio.

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} R_3 \to R_3 - R_1 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} R_3 \to R_3 + 2R_2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matrice cosí ottenuta e ridotta per righe, e si vede che $\rho(B) = \rho(B') = 2$.
Dunque $dim(W) = 2 = dim(Ker(f))$, se provo in aggiuta che $W \subset Ker(f)$, allora per questioni di dimensioni si ha che $W = Ker(f)$.
Per verificare se $W \subset Ker(f)$, mi basta vedere se $f(w) = 0$ per una base di W.
Ció dovuto al fatto che f e lineare.

- $f(-3, 1, 1, 0) = (-3 + 2 + 1 - 0, -6 + 4 + 2 + 0, -12 + 8 + 4, -0) = (0, 0, 0, 0)$;
- $f(0, 1, -2, 0) = (+2 - 2 - 0, 0 + 4 - 4 + 0, 0 + 8 - 8, -0) = (0, 0, 0, 0)$.

Poiché $W \subset Ker(f)$ e $dim(W) = Ker(f)$, allora $W = Ker(f)$.

Esempio 3
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $T(x, y, z) := (ax + 2ay + z, bx + 2by + z)$.

- Si determino gli eventuali valori reali di a e b per i quali T é suriettiva.
- Si trovi una base del nucleo di T al variare di a e b

Sol: Sia A la matrice associata all'applicazione T rispetto alla base canonica. Ovvero:

$$A = \begin{vmatrix} T(e_1), & T(e_2), & T(e_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ b & 2b & 1 \end{vmatrix}$$

Riduciamo A per righe per calcolarne il rango, e determinare la dimensione di $Im(T)$.

$$\begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ b & 2b & 1 \end{vmatrix} R_2 \to R_2 - R_1 \begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ b\text{-}a & 2(b\text{-}a) & 0 \end{vmatrix}$$

Se $a = b$, abbiamo che $\rho(A) = 1 < 2 = dim(\mathbb{R}^2)$. Dunque T, in questo caso, non é suriettiva.

In questo caso le matrici A e A' sono della forma:

$$A = \begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ b & 2b & 1 \end{vmatrix} \qquad A' = \begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Poiché abbiamo calcolato la matrice A rispetto alla base canonica abbiamo che:

$$Ker(T) := \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : A'v = 0\}$$

Calcoliamo le soluzioni del sistema $A'v = 0$:

$$\begin{cases} ax + 2ay + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -ax - 2ay \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dunque $Ker(T) := \{(x, y, -ax - 2ay) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Ovvero $Ker(T) := \{x(1, 0 - a) + y(0, 1, -2a) : x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0 - a), (0, 1, -2a) \rangle$ e una base di $Ker(T)$ é $\mathcal{B}_{Ker(T)} = ((1, 0 - a), (0, 1, -2a))$.
Questo é dovuto al fatto che, visto che sono a conoscenza che $dim(Ker(T)) = 2$, e conoscendo 2 vettori che lo generano, allora dei loro multipli non nulli ne formano una base.

Se $a \neq b$, abbiamo che $\rho(A) = 2 = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$. Dunque T, in questo caso, é suriettiva.

In questo caso le matrici A e A' sono della forma:

$$A = \begin{vmatrix} \text{a} & \text{2a} & 1 \\ \text{b} & \text{2b} & 1 \end{vmatrix} \qquad A' = \begin{vmatrix} \text{a} & \text{2a} & 1 \\ \text{b-a} & \text{2(b-a)} & 0 \end{vmatrix}$$

Poiché abbiamo calcolato la matrice A rispetto alla base canonica abbiamo che:

$$Ker(T) := \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : A'v = 0\}$$

Calcoliamo le soluzioni del sistema $A'v = 0$:

$$\begin{cases} ax + 2ay + z = 0 \\ (b-a)x + 2(b-a)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -ax - 2ay = -a(-2y) - 2ay = 0 \\ x = -2y \end{cases}$$

Dunque $Ker(T) := \{(-2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$.
Ovvero $Ker(T) := \langle(-2, 1, 0)\rangle$ e una base di $Ker(T)$ é $\mathcal{B}_{Ker(T)} = ((-2, 1, 0))$.
Questo é dovuto al fatto che, visto che sono a conoscenza che $dim(Ker(T)) = 1$, e conoscendo 1 vettore che lo genera, allora un suo multiploi non nullo ne forma una base.

Esempio 4
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y, z) = (2x + y, x + y, y + kz)$;

- Determinare la matrice A asspciata all'applicazione T rispetto alla base canonica;
- Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $Ker(T)$
- Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $Im(T)$
- Stabilire al variare di $k \in \mathbb{R}$ se il vettore $v = (3, -1, -5) \in Im(T)$. In caso positivo esprimere v come combinazione lineare degli elementi della base di $Im(T)$ trovata.

Sol: Sia A la matrice associata all'applicazione T rispetto alla base canonica. Ovvero:

$$A = \begin{vmatrix} T(e_1), & T(e_2), & T(e_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{k} \end{vmatrix}$$

Riduciamo A per righe per calcolarne il rango, e determinare la dimensione di $Im(T)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{k} \end{vmatrix} R_2 \to 2R_2 - R_1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{k} \end{vmatrix} R_3 \to R_3 - 2R_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{k} \end{vmatrix}$$

Se $k \neq 0$, allora $\rho(A) = 3$. Perció $dim(Im(T)) = 3$ e dunque T é suriettiva.
In particolare una base di $Im(T)$ é quella canonica in arrivo ovvero $\mathcal{B}_{Im(T)} = (e_1, e_2, e_3)$.
Per il teorema della dimensione $dim(Ker(T)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Im(T)) = 3 - 3 = 0$.
Dunque T é anche iniettiva e $\mathbb{B}_{Ker(T)} = \emptyset$
Noto che in questo caso ($k \neq 0$), essendo T suriettiva, $v \in Im(T)$ sicuramente.
Rimane da determinare come si scrive v in funzione della base di $Im(T)$ trovata: dato che abbiamo scelto la base canonica di $\mathbb{R}^3$, la risposta in questo caso é molto semplice;

$$v = (3, -1, -5) = 3e_1 + 1e_2 - 5e_3.$$

Se avessimo scelto un'altra base per $Im(T)$ la cosa sarebbe stata piú complessa, ma vediamo come trattare questo caso nella seconda parte dell'esercizio.

Se $k \neq 0$, allora $\rho(A) = 2$. Perció $dim(Im(T)) = 2$ e dunque T non é suriettiva.
In questo caso la matrice associata A diviene:

$$A = \begin{vmatrix} T(e_1), & T(e_2), & T(e_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sappiamo che $\mathbb{B}_{Im(T)}$ = (Colonne L.I. di A), e che $dim(Im(T)) = 2$. Ne segue che una base di $Im(T)$ é $\mathbb{B}_{Im(T)} = ((2,1,0),(1,1,1))$, le uniche 2 colonne non nulle di A.
Per il teorema della dimensione $dim(Ker(T)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Im(T)) = 3 - 2 = 1$. Dunque T non é iniettiva.

Poiché abbiamo calcolato la matrice A rispetto alla base canonica abbiamo che:

$$Ker(T) := \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : A'v = 0\}$$

Ma siccome so che $dim(Ker(T)) = 1$, per trovare una base di $Ker(T)$ in realtá mi basta trovare un qualsiasi vettore non nullo w, tale che $T(w) = 0$.
Noto che la matrice A in questo caso ha le terza colonna nulla; questo per costruzione di A vuol dire che $T(e_3) = (0,0,0)$. Dunque ho trovato il vettore che cercavo. $\mathcal{B}_{Ker(T)} = (e_3)$.

Rimane da vedere se $v = (3,-1,-5) \in Im(T)$ nel caso $k = 0$.
Sia B la matrice le cui colonne sono una base di $Im(T)$. $v = (3,-1,-5) \in Im(T)$ se e solo se il sistema $Bx = v$ ha soluzione, ovvero solo se si puó applicare il teorema di R.C., ovvero se e solo se si ha che $\rho(B) = \rho(B|v)$.

$$\left|\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \text{-1} \\ 0 & 1 & \text{-5} \end{array}\right| \; R_2 \to 2R_2 - R_1 \; \left|\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \text{-5} \\ 0 & 1 & \text{-5} \end{array}\right| \; R_3 \to R_3 - 2R_2 \; \left|\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \text{-5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Poiché $\rho(B) = \rho(B|v) = 2$, il sistema ha soluzione, e mi aspetto $\infty^{2-\rho(A)} = \infty^{2-2} = \infty^0$ soluzioni. Ovvero c'é una unica soluzione, cosa che mi aspetto visto che sto lavorando con una base. Risolviamo il sistema associato:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

Ne segue che $v = 4T(e_1) - 5T(e_2) = 4(2,1,0) - 5(1,1,1)$.

4. Composizione di applicazioni lineari

Siano $T := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S := \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ due applicazioni lineari. Ha senso chiedersi come si comportla la loro composizione solo se lo spazio di arrivo della prima é uguale allo spazio di partenza della seconda; ció si traduce in:

- $T \circ S$ ha significato solamente se $s = n$
- $S \circ T$ ha significato solamente se $m = k$

Dove ricordiamo che $T \circ S$ applicato al vettore v si definisce come $(T \circ S)(v) := T(S(v))$.

Supponiamo che $T \circ S$ sia ben definita. Siano A_T e B_S le matrici rispettivamente associate alle applicazioni T ed S rispetto alle basi canoniche. Allora la matrice $C_{T \circ S}$ associata all'applicazione $T \circ S$ rispetto alla base canonica, é legata alle matrici A_T e B_S nel seguente modo:

$$C_{T \circ S} : A_T \cdot B_S$$

Esempio

- Sia $R := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $R(v) := Av$ dove

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

- Sia $T := \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da
  $T(x, y, z) := (2kx - y, y + kz, x + y - z, x - y)$
- Sia $S := \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
  $T(x, y, z, t) := (-x - y + z + t, -x + 2y - z, -x + y + 3z - 3t)$

Trovare se possibile le matrici associate alle applicazioni lineari:

$$S \circ T\ ,\ T \circ S,\ R \circ T,\ T \circ R,\ S \circ S.$$

Sol: Come ribadito, l'applicazione $A \circ B$ é possibile solo se lo spazio di arrivo della prima applicazione (B) é lo stesso di quello di partenza della seconda applicazione (A).
Analogamente al prodotto fra matrici, che é lecito solo quando il numero di colonne della prima é uguale al numero di righe della seconda.
Ne segue che sono possibili solo le composizioni:

- $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;
- $T \circ S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$;
- $T \circ R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$.

Mentre non sono possibili solo le composizioni:

- $R \circ T$;
- $S \circ S$.

Per calcolare le matrici associate alle composizioni lecite, calcoliamo, innanzitutto le matrici A_R, B_T, C_S, associate rispettivamente alle applicazioni R, S, T.

Esse sono:

$$A_R = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$B_T = \begin{vmatrix} 2k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_S = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

- La matrice $M_{S \circ T}$ é la matrice che si ottiene tramite $C_S \star B_T$
- La matrice $N_{T \circ S}$ é la matrice che si ottiene tramite $B_T \star C_S$
- La matrice $P_{T \circ R}$ é la matrice che si ottiene tramite $B_T \star A_R$

Facciamo il calcolo esplicito per la matrice $P_{T \circ R}$:

$$P_{T \circ R} = \quad B_T \star A_R = \begin{vmatrix} 2k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \star \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(k-1) & 2k \\ 2+k & -k \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dipartimento di Matematica, Università di Trento, Italy
E-mail address: faccin@science.unitn.it