FOGLIO 3 - Matrici, sistemi lineari e determinanti

Esercizio 1. Ridurre (per righe) la seguente matrice e calcolarne il rango:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Ridurre (per righe) la seguente matrice e calcolarne il rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Ridurre (per righe) la seguente matrice e calcolarne il rango, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Ridurre (per righe) la seguente matrice e calcolarne il rango, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & k+2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & k^2-k+2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Si calcoli una base di $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, dove

$$v_1 := (1, 1, 2, 2), \qquad v_2 := (2, 2, 4, 3), \qquad v_3 := (1, 3, 2, 4), \qquad v_4 := (0, 1, -1, 2)\,.$$

Esercizio 6. Si calcoli al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base di $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, dove

$$v_1 := (-1, 3, 0), \qquad v_2 := (1, 2, -1), \qquad v_3 := (0, 0, 2k+1)\,.$$

Esercizio 7. Si calcoli al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base di $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, dove

$$v_1 := (1, 1, 0), \qquad v_2 := (k, 1, 1), \qquad v_3 := (0, 1, 1-k)\,.$$

Esercizio 8. Si calcoli al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base di $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, dove

$$v_1 := (2, -1, 0), \qquad v_2 := (1, -1, -1), \qquad v_3 := (1, -k, k)\,.$$

Esercizio 9. Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

calcolare, se possibile, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $B \cdot C$, $A \cdot C$ e C^2.

Esercizio 10. Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ha soluzione. In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.

Esercizio 11. Si considerino le matrici (dove $k \in \mathbb{R}$):

$$A = \begin{pmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Si stabilisca il rango di A al variare di k.

b) Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.

Esercizio 12. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione.

Esercizio 13. Si consideri il seguente sistema lineare, $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases}$$

a) Si dica quante soluzioni ha il sistema al variare di k.

b) Per i valori di k che rendono risolubile il sistema, trovare le soluzioni.

Esercizio 14. Si consideri il seguente sistema lineare, $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = k + 3 \\ -2x + 6y + (k+7)z = 2k + 9 \\ x - 4y - 2z = k - 2 \\ 3x - 6y + (k-7)z = k^2 - k - 9 \end{cases}$$

a) Si dica quante soluzioni ha il sistema al variare di k.

b) Per i valori di k che rendono risolubile il sistema, trovare le soluzioni.

Esercizio 15. Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z = 4 \\ x + y + kz = k \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

(a) Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile (cioè ammette soluzione).

(b) Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni?

Esercizio 16. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ x + (k-1)y + (k+1)z = 1 \\ x + (k-1)y + (k^2 + 4k + 3)z = k + 3 \end{cases}$$

determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette soluzioni. In tali casi stabilire anche se ne ammette una o infinite.

Esercizio 17. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky + z = 2k - 1 \\ kx + y + z = 5 \\ x + y + kz = 0 \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

(a) Si dica per quali valori di k il sistema è risolubile.

(b) Si dica per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione.

Esercizio 18. Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ y + z = k \\ 3x + ky + 2z = 2 \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

(a) Discutere l'esistenza e unicità di soluzioni del sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare le eventuali soluzioni del sistema al variare di k.

Esercizio 19. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

(a) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette una unica soluzione.

(b) Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.

Esercizio 20. Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = t - 2 \\ tx_1 + (t-4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-2t)x_2 = 2t - 4 \end{cases} \qquad \text{(t parametro reale)}$$

(a) Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile.

(b) Per i valori di t che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.

Esercizio 21. Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 - (k+1)x_2 = k \\ 2x_1 - 2x_2 = 2k \\ (k+2)x_1 + (k-2)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

(a) Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile.

(b) Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.

Esercizio 22. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 4k & 0 & k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k+2 & -1 & 1 \\ 0 & -k & 2 \\ k & k & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.

(b) Trovare l'inversa di A per $k = 2$.

(c) Stabilire per quali valori di k la matrice B è invertibile.

(d) Trovare l'inversa di B per $k = 1$.