C E L I D

G. Beccari, N. Catellani, D. Ferraris
D. Giublesi, L. Mascarello

ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA ANALITICA

Richiami

Equazione delle generica conica:

$C: \ f(x, y) = 0$

ove: $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$

Matrice dei termini di 2° grado di f:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Matrice associata ad f:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

C degenere $\Leftrightarrow$ *det.* $B = 0 : C$ si spezza in due rette, che possono essere, a seconda dei casi, reali e distinte (incidenti o parallele); reali coincidenti; immaginarie coniugate (i coefficienti a_{ij} di C si suppongono reali).

$$C \text{ non degenere } (\Leftrightarrow \det. B \neq 0) \begin{cases} I)\ \text{a centro } (\Leftrightarrow \det. A \neq 0): \\ \quad \text{ellisse, iperbole} \\ II)\ \text{parabola } (\Leftrightarrow \det. A = 0) \end{cases}$$

I) A ha autovalori λ_1, λ_2 entrambi non nulli. C è ellisse se λ_1, λ_2 sono concordi; è iperbole, se λ_1, λ_2 sono discordi. L'equazione canonica di C è :

$$(*) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + k = 0$$

ove $k = \dfrac{\det. B}{\lambda_1 \lambda_2}$; possono presentarsi i seguenti casi:

1) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ (ellisse reale)

2) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1$ (ellisse a punti immaginari)

3) $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = \pm 1$ (iperboli)

— Il *centro* di simmetria $0'$ di C ha come coordinate la soluzione (unica perché $\det A \neq 0$) del sistema:

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0 \\ a_{12} x + a_{22} y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

— Gli *assi* di simmetrica di C sono le rette passanti per il centro $0'$ e parallele agli autospazi di A.
Nella forma canonica (*), gli assi del riferimento $(0', x', y')$ coincidono con gli assi di simmetria di C: più precisamente, in relazione alla matrice

$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ di (*), l'asse x' è la retta per $0'$ parallela all'autospazio V_{λ_1}, l'asse y' è la retta per $0'$ parallela all'autospazio V_{λ_2}. Con riferimento alla 1), si ha, per l'ellisse:

semiassi	a e b
vertici	$V_1\ (a, 0)$ $V_2\ (-a, 0)$ $V_3\ (0, b)$ $V_4\ (0, -b)$

e, supposto $a > b$:

eccentricità	$e = \dfrac{c}{a}$ (ove $c^2 = a^2 - b^2$)
fuochi	$F_1\ (c, 0)$ $F_2\ (-c, 0)$
direttrici	$d_1 : x' = \dfrac{a^2}{c}$ $d_2 : y' = -\dfrac{a^2}{c}$

Con riferimento alla 3), scelto il segno + a 2° membro, si ha *per l'iperbole*:

semiassi	a e b
vertici	$V_1\ (a, 0)$ $V_2\ (-a, 0)$
asintoti	$s_1 = \dfrac{x'}{a} - \dfrac{y'}{b} = 0$; $s_2 : \dfrac{x'}{a} + \dfrac{y'}{b} = 0$
eccentricità	$e = \dfrac{c}{a}$ (ove $c^2 = a^2 + b^2$)
fuochi	$F_1\ (c, 0)$ $F_2\ (-c, 0)$
direttrici	$d_1 : x' = \dfrac{a^2}{c}$ $d_2 : x' = -\dfrac{a^2}{c}$

II) A ha un autovalore $\lambda \neq 0$ e un autovalore $\mu = 0$.
L'equazione canonica della parabola C è :

4) $\lambda\, y'^2 + 2\, q\, x' = 0\,,$ ove $q = \pm \sqrt{-\dfrac{\det. B}{\lambda_1}}$

(il segno dipende dall'orientamento degli assi del riferimento) con matrici

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & \lambda & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Il *vertice* è il punto 0' di intersezione tra C e la retta t parallela all'autospazio V_λ di A e tangente a C.
L'asse di simmetria è la retta passante per il vertice 0' e parallela all'autospazio V_μ, relativo all'autovalore nullo di A (ovverossia perpendicolare a t).
Con riferimento alla 4), riscritta nella forma:

5) $y'^2 = 2\, p\, x'$ (p si chiama anche parametro)

risulta per la parabola:

il *vertice* è 0' (0, 0)

l'*asse* ha equazione $y' = 0$

il *fuoco* (unico) è $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$

la *direttrice* (unica) è $d)\; x' = -\dfrac{p}{2}$.

– La *retta tangente* a C in un suo punto $P_o\,(x_o, y_o)$ si ottiene colla regola degli sdoppiamenti ed ha equazione:

$$a_{11} x_o x + a_{12}(x_o y + y_o x) + a_{13}(x + x_o) + a_{23}(y + y_o) + a_{33} = 0$$

e quindi :

$$(a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13})\, x + (a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_{23})\, y + a_{13}x_o + a_{23}y_o + a_{33} = 0$$

– La retta polare di $P_1\,(x_1, y_1)$ (appartenente o non appartenente a C) rispetto alla conica ha equazione:

$$a_{11} x x_1 + a_{12}(x_1 y + x y_1) + a_{13}(x + x_1) + a_{23}(y + y_1) + a_{33} = 0\,;$$

si osservi che, se $P_1 \in C$ la sua polare è la tangente C in P_1.