Una proposizione fondamentale dei *Principia* di Newton. La Prop XI. Prob. VI.

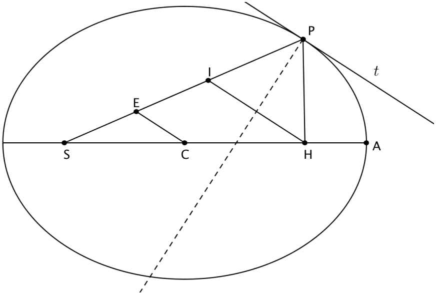
Trento, 2020

Il risultato di Newton *oggi*

Il risultato contenuto nella Proposizione che verrà esaminata nel seguito, si presenta *oggi* come un semplice esercizio sull'uso dei primi elementi del calcolo differenziale e delle coordinate polari. Al termine della presentazione del risultato di Newton ho aggiunto un confronto in termini moderni,[1] utilizzando l'ottimo libro di Pask (2013) dal quale si vede appunto con quale facilità si ottenga (ma oggi!) il risultato di Newton.

[1]Si vedano le slide che seguono l'analisi della dimostrazione di Newton.

Un Lemma (di Newton) sulle Sezioni Coniche



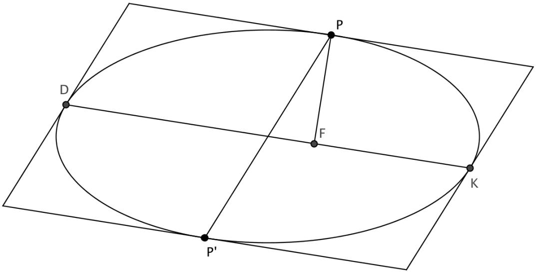
P è un punto arbitrario su una ellisse avente i fuochi S, H ed il centro C. t è la tangente in P. La linea tratteggiata è la normale in P.

- **Lemma**. $EC \parallel HI \parallel t \Rightarrow PE = AC$.
- **Dim**. $HI \parallel EC$. Ne segue $PI = PH$, $ES = EI$ e $PS + PI = PS + PH = 2AC$. Ma $PS + PI = PI + EI + PI + ES = 2PE$. $\square$

Una proposizione del libro VII delle *Coniche*

La VII.13. Ma … Constat ex Conicis!

Newton non ricorda di aver lui stesso dimostrato questo risultato e scrive sbrigativamente “Constat ex Conicis”.



- Tutti i parallelogrammi circoscritti, con i lati paralleli a diametri coniugati, hanno la stessa area. Quindi (con $PF \perp DK$)

$$PF \times DK$$

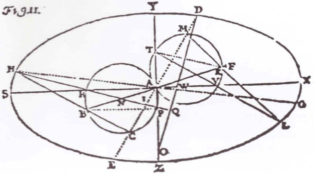
è una *quantità data*.

La dimostrazione dimenticata

Corollarium 3.

Patet insuper in Ellipsi, quarumcunque diametrorum conjugatarum transversam etiam secundam esse, & contra. Ut, si conjugatarum diametrorum D E, H G transversa sit D E, & H G secunda; cum in Ellipsi ducta quælibet diameter * transversa sit, habeatque secundam sibi conjugatam, erit quoque H G transversa. At verò & D E secundam esse ipsi H G conjugatam, facta collatione figuræ I cum II transpositis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonstratum simul apparebit.

Fig. II.



* per 14 hujus ejusque Corol. 1.

Corollarium 4.

Quare & quæ per terminum transversæ diametri secundæ æquidistans seu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipsin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipsin cadit *.

* per 2 Cor. 1.3, & 3 Cor. 14 hujus.

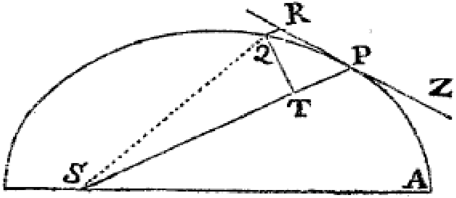
Coroll. 5.

Parallelogramma omnia circa datam Ellipsin descripta conjugatis [illegible] sunt inter se æqualia. nam (fig. 1.) RH. CH :: BH. DA [illegible]

ergo RH(=AY)×pH = CH×DA.

Si veda Galuzzi (1990), dove è analizzata la dimostrazione di Newton posta a margine.

La misura della forza usata da Newton



L'"ultima ragione" (il limite di)

$$\frac{QR}{SP^2 \times QT^2} \quad \text{per} \quad Q \approx P.$$

In termini analitici:

$$PR \propto v_P \cdot \tau, \quad QR \propto f_P \cdot \tau^2.$$

Inoltre

$$SP \times QT \propto \tau. \quad \text{Perché abbiamo un moto centrale.}$$

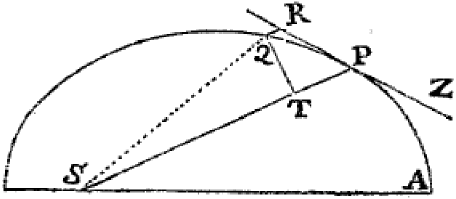
(Si veda anche Pask (2013).)

Lo stile "classico" dei *Principia*?

Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT *quad.* ut AC ad $PC + L$ ad $Gv + CPq$ ad $CDq + CDq.$ ad $CBq.$ id eſt ut $AC \times L$ (ſeu $2\,CBq.$)$\times CPq.$ ad $PC \times Gv \times CBq.$ ſive ut $2\,PC$ ad $Gv.$ Sed punctis Q & P coeuntibus, æquantur $2\,PC$ & $Gv.$ Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$ & fiet $L \times SPq.$ æquale $\frac{SPq. \times QTq}{QR}.$

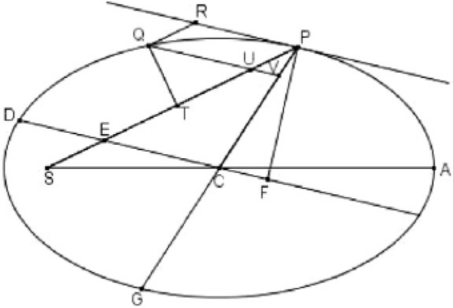
Ma in che misura il limite della quantità $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ può essere considerato "classico"?

L'idea della dimostrazione



La traiettoria descritta per effetto di una forza centrale con centro in S (sole), sia una sezione conica (ellisse) con un fuoco in S.
Si tratta di dimostrare che $\frac{QR}{QT^2}$ è una quantità costante. Ossia che il *limite* quando Q tende a P sia una quantità che non dipende da P, ma che *è data solo nei termini dei parametri che definiscono la conica.*

Analisi della dimostrazione I



Equazione dell'ellisse:

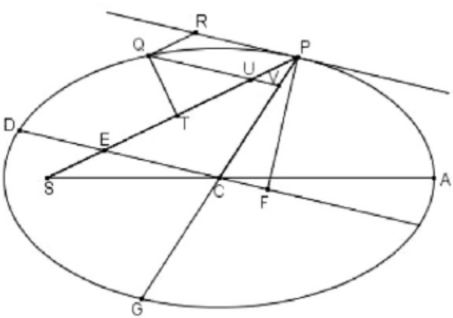
$$GV \times PV = QV^2 \times \frac{PC^2}{CD^2}. \tag{1}$$

PC e CD sono diametri coniugati.

$$x \cdot (2a - x) = k \cdot y^2.$$

Analisi della dimostrazione II

Calcolo di QR

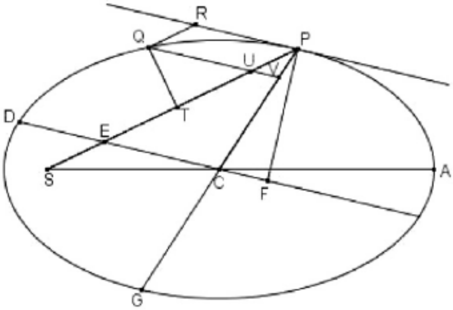


I triangoli PUV, PEC sono simili e $QR = PU$:

$$PU : PV = PE : PC \Rightarrow QR = \frac{PE}{PC} \times PV. \qquad (2)$$

Analisi della dimostrazione III

Calcolo di QT

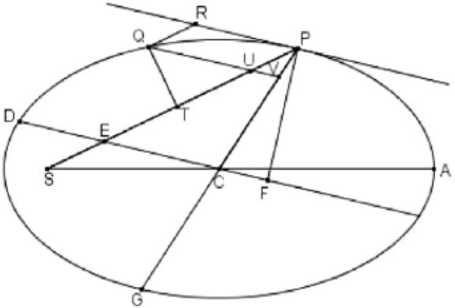


Anche i triangoli PEF, QUT sono simili e $\boxed{QU \approx QV}$.

$$QU : QT = PE : PF \Rightarrow QV : QT = PE : PF. \tag{3}$$

$$QT = QV \times \frac{PF}{PE}. \tag{4}$$

Analisi della dimostrazione IV

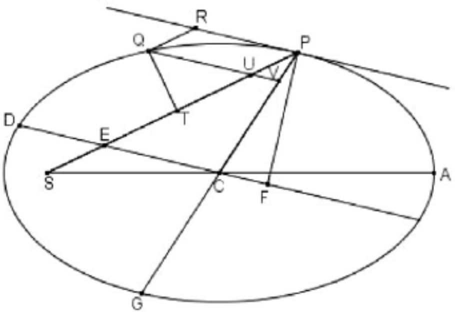


$$QR = \frac{PE}{PC} \times PV \quad \wedge \quad QT = QV \times \frac{PF}{PE}.$$

$$\Rightarrow \frac{QR}{QT^2} = \frac{PE}{PC} \times PV \times \frac{PE^2}{PF^2} \times \frac{1}{QV^2},$$

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{PE^3}{PF^2} \times \frac{PV}{PC \times QV^2}. \tag{5}$$

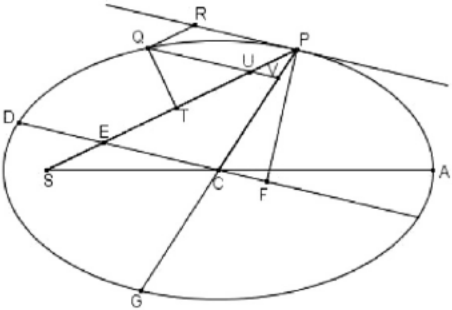
Analisi della dimostrazione V



$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{PE^3}{PF^2} \times \frac{PV}{PC \times QV^2} \quad \wedge \quad GV \times PV = QV^2 \times \frac{PC^2}{CD^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{QR}{QT^2} = \frac{PE^3}{PF^2 \times GV \times \frac{CD^2}{PC}}. \tag{6}$$

Analisi della dimostrazione VI



$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{PE^3}{PF^2 \times GV \times \frac{CD^2}{PC}}.$$

Quando Q tende a P la quantità $\boxed{GV \text{ tende a } 2\,PC}$.

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{2}\,\frac{PE^3}{PF^2 \times CD^2}.$$

Abbiamo ottenuto una quantità costante. $\square$

La comparsa del *Lato Retto*

Si noti che

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{2}\,\frac{PE^3}{PF^2 \times CD^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{a^2 \cdot b^2} = \frac{a}{2b^2} = \frac{1}{L},$$

ove L è il *Lato Retto*. Quindi

$$\frac{QR}{SP^2 \times QT^2} = \frac{1}{L \times SP^2}.$$

Confronto in termini moderni. 1

Si veda (Pask, 2013, p. 208, pp. 227-29). L'equazione che dà la misura della forza centrale $F(r)$ è data (in coordinate polari) da

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = F(r).$$

Tenendo conto del fatto che si ha anche

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

per una certa costante h (conservazione del momento angolare), l'equazione può essere trasformata, utilizzando l'uguaglianza

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dx}{d\theta}$$

in

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{1}{r^3} = \frac{1}{mh^2}F(r). \tag{7}$$

Confronto in termini moderni. 2

Si tratta ora di considerare l'equazione della conica in coordinate polari

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

e di sostituire nella (7) per avere il risultato richiesto. Siamo davvero molto lontani dalla matematica di Newton!

Esercizio

Si completino i calcoli precedenti, utilizzando eventualmente il testo citato di Pask.

Un errore di Newton?

Corol. **I.** Ex tribus noviſſimis Propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P, ſecundum lineam quamvis rectam P R, quacunq; cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.

La soluzione del problema *diretto* implica anche la soluzione del problema *inverso*?

Nella seconda e terza edizione

Nam datis umbilico, & puncto contactus, & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta, & velocitate corporis: & orbes duo ſe mutuo tangentes eadem vi centripeta eademque velocitate deſcribi non poſſunt.

Ma è sufficiente?

Una lunga disputa . . . che dura ancora

Si veda, ad esempio, Weinstock (1992).

Alcune precauzioni:

- Le conoscenze matematiche attuali non sono un intralcio. Sono *necessarie* (contrariamente a quanto pensavano, o pensano, alcuni storici).
  - Ma la distinzione è *indispensabile*.
- Ciò che sembra "arcaico" nei *Principia* non lo è necesariamente. Il ruolo della *teoria delle proporzioni* è un problema complesso.
  - Volontà di scrivere un trattato classico?
  - Strumento di lavoro?

Esercizio

Si ponga a confronto quanto argomenta Weinstock (1992) con quanto qui esposto. Si dia un proprio giudizio.

Galuzzi M. (1990). I *marginalia* di Newton alla seconda edizione latina della *Geometria* di Descartes e i problemi ad essi collegati In *Descartes: il metodo e i saggi*. A cura di Belgioioso G., Cimino G., Costabel P., Papuli G., pp. 387–417. Istituto della Enciclopedia italiana, Roma.

Pask C. (2013). *Magnificent Principia*. Amherst, New York, Prometheus Books edizione.

Weinstock R. (1992). Newton's *Principia* and inverse-square orbits: the flaw reexamined. *Historia Mahematica*, **19**, 60–70.