



## Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

## Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

- + *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
- + *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
- + *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
- + *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertarti di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

## Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da <http://books.google.com>



FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XIII



Palchetto

Num.º d'ordine

22 42 415

NAZIONALE

B. Prov.

R. BIBLIOTECA

VITT. EM. III

1291

NAPOLI

33 - Owl.

II

1291



610512

# INSTITUZIONI ANALITICHE

AD USO

DELLA GIOVENTU' ITALIANA

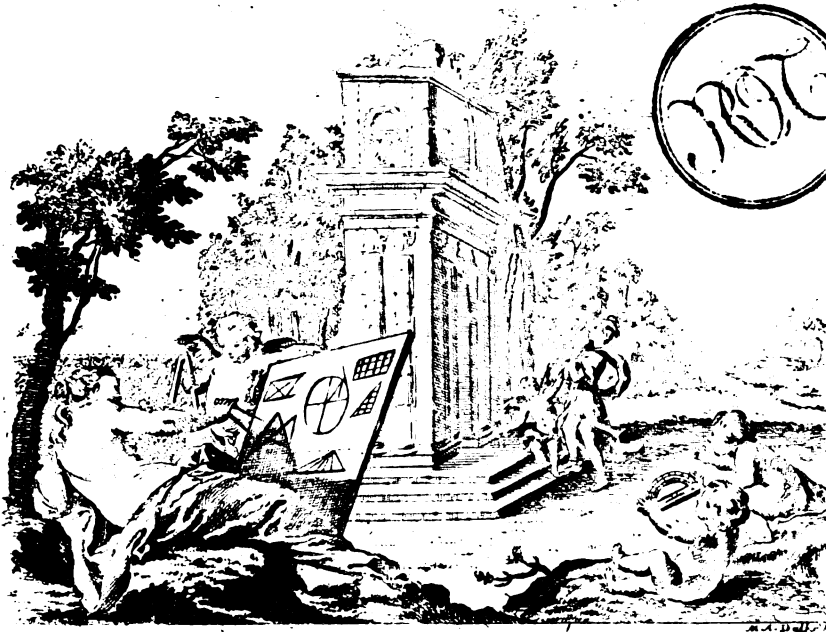
DI D.<sup>NA</sup> MARIA GAETANA

A G N E S I

MILANESE

*Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.*

T O M O II.



IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.  
CON LICENZA DE' SUPERIORI.





# INSTITUZIONI ANALITICHE LIBRO SECONDO



*Del Calcolo Differenziale.*

**L**'Analisi delle quantità infinitamente piccole, che in altro modo Calcolo Differenziale, o Calcolo delle Fluxioni suole chiamarsi; è quella, che versa intorno alle differenze delle quantità variabili, di qualunque ordine sieno esse differenze. Questo calcolo contiene i Metodi delle Tangenti; de' Massimi, e Minimi; de' Flessi contrarj, e Regressi delle Curve; de' Raggi Osculatori ec., e però dividendo in più Capi tutta la Materia sia . . .

*Manuale di Matematica e Meccanica di M. A. B. B.*  
*di M. A. B. B.*

*M. A. B. B.*

A 2

CAPO



## C A P O I.

*Dell' Idea de' Differenziali di diversi ordini,  
e del Calcolo de' medesimi.*

1. **C**OL nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come fluenti, e per così dire, generate da un moto continuo.

S'intenda ( *Fig. 1.* ) la retta  $ABC$ , generata dal moto del punto  $A$ , prodotta in infinito, sopra cui insista, facendo un qualunque angolo, l'altra retta  $BD$ , e suppongasi, che mentre il punto  $B$  giugne da  $B$  in  $C$ , seco portando la linea  $BD$  sempre a se stessa parallela da  $BD$  in  $CE$ , il punto  $D$  trascorra lo spazio  $FE$  con tal legge, che descriva la curva  $ADE$ ; egli è chiaro, che l'assisse  $AB$ ,  $AC$ , siccome l'ordinate  $BD$ ,  $CE$ , e gl'archi  $AD$ ,  $AE$  faranno quantità continuamente crescenti, e decrescenti, e però variabili.

2. Quantità costanti sono quelle, che nè crescono, nè calano, ma si concepiscono per determinate, ed invariabili, come i Parametri, gl' Assi, o Diametri ec.

Le costanti si denominano colle prime lettere dell'Alfa-

Alfabeto , e le variabili colle ultime in quella guisa , che si è fatto nell' Algebra Cartesiana rispetto alle quantità note , ed incognite .

3. Si chiama differenza , o flussione di una quantità variabile quella porzione infinitesima , cioè tanto piccola , che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data , e per cui crescendo , o diminuendosi la medesima variabile , possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima .

Sia ( Fig. 2. , e 3. ) la curva  $AM$  , il di cui asse , o diametro  $AP$  ; e si prenda nella  $AP$  prodotta una porzione infinitesima  $Pp$  , sarà essa la differenza , o sia la flussione dell' assisa  $AP$  , e si potranno considerare per eguali le due  $AP$  ,  $Ap$  , non essendovi proporzione tra la quantità finita  $AP$  , e la porzione infinitesima  $Pp$  . Da' punti  $P$  ,  $p$  si alzino le due ordinate parallele  $PM$  ,  $pm$  in qualunque angolo , e si tiri la corda  $mM$  prodotta in  $B$  , e la retta  $MR$  parallela ad  $AP$  ; poichè sono simili i due triangoli  $BPM$  ,  $MRm$  , sarà  $BP$  ,  $PM :: MR$  ,  $Rm$  , ma le due quantità  $BP$  ,  $PM$  sono finite , ed  $MR$  è infinitesima , adunque sarà pure infinitesima la  $Rm$  , e però sarà essa la differenza dell' ordinata  $PM$  ; per la stessa ragione sarà infinitamente piccola la corda  $Mm$  , ma ( come dimostrerò in appresso ) la corda  $Mm$  non si distingue dall' archetto , e si può prendere indifferentemente l' uno per l' altra ,  
adun-

adunque farà l'archetto  $Mm$  quantità infinitesima, e però la differenza dell'arco  $AM$  della curva. Da ciò chiaramente si vede, che anco lo spazio  $PMmp$ , chiuso dalle due ordinate  $PM$ ,  $pm$ , dalla infinitesima  $Pp$ , e dall'archetto infinitesimo  $Mm$ , farà la differenza dell'area  $AMP$  compresa fra le due coordinate  $AP$ ,  $PM$ , e la curva  $AM$ ; e condotte le due corde  $AM$ ,  $Am$ , farà il triangolo mistilineo  $MAm$  la differenza del segmento  $AMS$  chiuso dalla corda  $AM$ , e dalla curva  $ASM$ .

4. La Caratteristica, con cui soglionfi esprimere le differenze, è la lettera  $d$ , quindi posta l'assisa  $AP=x$ , farà  $Pp$ , o  $MR=dx$ ; e similmente posta l'ordinata  $PM=y$ , farà  $Rm=dy$ , e posto l'arco di curva  $ASM=s$ , lo spazio  $APMS=t$ , il segmento  $AMS=u$ , farà  $Mm=ds$ ,  $PMmp=dt$ ,  $AMm=du$ , e tutte queste sono differenze prime, o flussioni del primo ordine.

E si avverta, che le predette differenze si scrivono col segno positivo, se per esse crescano le variabili loro, e col negativo se le variabili calino. Così nella curva  $NEC$  (Fig. 4.) essendo  $AB=x$ ,  $BF=dx$ ,  $BC=y$ , farà  $DC=-dy$ , differenza negativa della  $y$ .

Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl' Antich' de' Poligoni inscritti, e circoscritti,

scritti, si può chiaramente vedere dal solo idearsi, che l'ordinata  $MN$  (Fig. 4.) si vada continuamente accostando alla  $BC$ , finchè con essa coincida; ora egli è chiaro, che prima, che queste due linee coincidano, averanno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, cioè minore di qualunque quantità data; in tale posizione sieno  $BC$ ,  $FE$ , adunque  $BF$ ,  $CD$  saranno quantità minori di qualunque data, e però inassegnabili, o sia differenze, o flussioni.

Anzi con la sola comun Geometria è sicuro, che non solo queste, ma altre quantità minime di classi infinite entrano realmente a formare l'estensione geometrica. Si danno in geometria le quantità incommensurabili, ed infinite di genere, come è noto a' Geometri, ed agl' Analisti, dunque si danno le grandezze infinitesime di varj ordini.

Ed in fatti sia a cagion d'esempio (Fig. 5.)  $AB$  il lato, ed  $AC$  il diametro d'un quadrato, le quali due linee per l'ultima proposizione del libro 10. di Euclide sono fra loro asimmetre, vale a dire incommensurabili. Dico pertanto: che non sono esse rese tali da una qual si sia finita lineetta  $CE$ , per quanto piccola essa si prenda, ma bensì da un'altra infinitamente minore, cioè della classe delle infinitesime.

Fingasi, che la linea  $EC$  finita renda, s'egli è possibile, le due  $AB$ ,  $AC$  asimmetre; in conseguenza  
la

la restante  $AE$  sarà commensurabile al lato  $AB$ . Sia la retta  $F$  comune loro misura, la quale non può mai essere eguale alla  $EC$ , altrimenti sarebbero commensurabili il lato, ed il diametro; sarà adunque, o maggiore, o minore.

Nel primo caso si sottragga  $F$  da  $EC$ , quante volte si può, ed il residuo sia  $GC$ . E perchè  $F$  misura  $AB$ ,  $AE$ , ed anco  $EG$ , le due rette  $AB$ ,  $AG$  avranno fra loro una proporzione razionale, conseguentemente non era la grandezza  $EC$ , che facesse incommensurabili le  $AB$ ,  $AC$ , ma una quantità più piccola, per esempio la  $GC$ , la quale però è finita, essendosi dalla finita  $EC$  sottratta una, o più fiate la finita  $F$ . Dividasi  $F$  per metà, ed indi ancora per metà sino a tanto, che si venga ad una parte aliquota di  $F$  minore di  $GC$ , e levata questa da  $GC$ , resterà  $HC$ , la quale, replicato il discorso, non è quella che rende incommensurabili le linee  $AB$ ,  $AC$ ; ed atteso che il raziocinio vale per qual si sia grandezza finita, si conchiuda, che la incommensurabilità procede da una quantità inassegnabile minore di qualunque data, lo che si verifica parimente nell'altro caso, mentre cioè sia la comune misura  $F$  maggiore di  $EC$ , il che ec.

Dopo di ciò vado avanti, e dico, che i quadrati sopra le rette  $AB$ ,  $AC$ , i quali si rispondono come l'unità al binario, non ostante, che i lati sieno irrazionali,

zionali, sono però commensurabili, e fatti tali da una quantità infinitesima del secondo ordine. Esposi (Fig. 6.) i due quadrati  $AB$ ,  $AC$ , segno le due quantità eguali, ed infinitesime, che rendono asimmetri i lati  $AD$ ,  $AG$ ,  $AI$ ,  $AH$ , e sieno queste  $ED$ ,  $FI$ , e compiuta la preparazione (come nella Figura) si noti, che i due rettangoli  $DK$ ,  $IK$  sono incommensurabili al quadrato  $AB$ , e la ragione si è, perchè sono compresi dalle rette  $EK$ ,  $FK$  commensurabili alle due  $AG$ ,  $GB$ , e di più dalle linee minime, ed inassegnabili  $ED$ ,  $FI$ , che sono quelle, dalle quali nasce l'asimmetria de' lati  $AD$ ,  $AG$ ,  $AI$ ,  $AH$ . Aggiunto però a' suddetti rettangoli il quadrato  $AK$ , avremo il gnomone composto delle tre accennate grandezze, asimmetro al quadrato  $AB$ ; ma l'intero quadrato  $AC$  sta all'altro  $AB$  in razional proporzione, dunque il quadrato  $AC$  è reso tale dal quadrato infinitesimo  $KC$ , quantità del secondo ordine, per la quale supera il suddetto gnomone asimmetro.

Noto, che i cubi sopra le linee  $AI$ ,  $AH$  sono incommensurabili, tutto che sieno razionali le loro basi, e si può facilmente provare, che sono ridotti tali da una grandezza inassegnabile del terzo ordine, ed in tal guisa col discorso di mano in mano si proceda.

5. In quella guisa che le differenze prime non anno proporzione assegnabile alle quantità finite, così

le differenze seconde, o flussioni del secondo ordine non hanno proporzione assegnabile alle differenze prime, e sono di esse infinitamente minori per modo, che due quantità infinitesime del primo ordine, ma che differiscono tra loro d'una differenza seconda, possono assumersi per eguali. Lo stesso si dica delle differenze terze rispetto alle seconde, e così di mano in mano.

Le differenze seconde si sogliono marcare con doppia  $d$ , le terze con trè  $d$  ec. La differenza adunque di  $dx$ , cioè la differenza seconda di  $x$  si scriverà  $ddx$ , o pure  $d^2x$ , nel che si avverta, non essere lo stesso  $d^2x$ , e  $dx^2$ , perchè il primo significa, come ô detto, la differenza seconda di  $x$ , ed il secondo significa il quadrato di  $dx$ ; la differenza terza farà  $ddd$ , o pure  $d^3x$  ec. Così  $ddy$  farà la differenza di  $dy$ , cioè la differenza seconda di  $y$  ec.

Ma per formare giusta idea delle seconde, terze ec. differenze saranno opportuni i seguenti Teoremi.

### TEOREMA I.

6. Sia una qualunque curva  $MBC$ , (*Fig. 7.*) ed una porzione di essa  $BC$  infinitesima del primo ordine. Da' punti  $B$ ,  $C$  si conducano perpendicolari alla curva le rette  $BA$ ,  $CA$ . Dico: che le rette  $BA$ ,  $CA$  si potranno assumere per eguali.

Si

Si conducano le tangenti  $BD$ ,  $CD$ , e la corda  $BC$ . Se le due  $BA$ ,  $CA$  non sono eguali, sia quella, che si vuole di loro, come  $CA$ , maggiore dell'altra, e ad essa si conduca perpendicolare la  $BH$ . La differenza fra le linee  $BA$ ,  $CA$  farà minore dell'intercetta  $CH$ , per l'angolo retto in  $H$ , e  $CH$  minore della corda  $BC$ , ma la corda  $BC$  è infinitesima del primo ordine, essendosi supposto infinitesimo l'arco; adunque la differenza tra  $BA$ , e  $CA$  almeno non farà maggiore di una quantità infinitesima del primo ordine, e però le rette  $BA$ ,  $CA$  potranno assumersi per eguali.

## COROLLARIO I.

Adunque il triangolo  $BAC$  farà isoscele, e però gl'angoli  $ABC$ ,  $ACB$  alla base eguali tra loro, e sottratti questi da' retti  $ABD$ ,  $ACD$ , rimarranno eguali i due  $BCD$ ,  $DBC$ , e per conseguenza anche eguali le due tangenti  $BD$ ,  $CD$ .

## COROLLARIO II.

Condotta la retta  $DA$ , essendo simili, ed eguali i due triangoli  $ADB$ ,  $ADC$ , taglierà essa in due parti eguali gl'angoli  $BAC$ ,  $BDC$ ; e perchè vengono pure ad essere simili, ed eguali i due triangoli  $AEB$ ,  $AEC$ , farà la stessa  $AD$  normale a  $BC$ , e la dividerà egualmente in  $E$ .



## COROLLARIO III.

Ed essendo simili i due triangoli  $DAC$ ,  $EDC$ ; farà l'angolo  $DCE$  eguale all'angolo  $DAC$ , ed i due angoli  $DCE$ ,  $DBE$  presi assieme eguali all'angolo  $BAC$ .

## COROLLARIO IV.

Da ciò si raccoglie, che un' arco qualunque infinitesimo  $BC$  di qualsivoglia curva avrà le stesse affezioni, e proprietà dell'arco di circolo descritto col centro  $A$ , e raggio  $AB$ , o  $AC$ .

## COROLLARIO V.

Essendo simili i due triangoli  $AEB$ ,  $BED$ , avremo  $AE, EB :: EB, ED$ ; ma  $AE$  è linea finita, ed  $EB$  infinitesima del primo grado, dunque  $ED$  farà infinitesima del secondo, e farà il suo valore  $= \frac{\overline{EB}^2}{AE}$ .

Ma il rettangolo sotto la doppia  $AE$  in  $EI$  è eguale ( per la proprietà del circolo ) al quadrato  $EB$ ; dunque  $\overline{EB}^2 = 2AE \times EI = AE \times ED$ , e per conseguenza  $2AE, AE :: ED, EI$ ; ma il primo termine dell' analogia è doppio del secondo, dunque anco il terzo del

del quarto, e conseguentemente faranno eguali le due linee del secondo ordine  $IE$ ,  $ID$ .

COROLLARIO VI.

E perchè la differenza tra la semicorda  $BE$ , e la toccante  $BD$  è una quantità minima del terzo grado; conciosiacchè, condotto dal centro  $B$ , coll'intervallo  $BE$  l'arco di cerchio  $EL$ , grandezza della seconda classe, la quale con il suo seno si confonde, faranno simili i due triangoli  $BDE$ ,  $EDL$ , che oltre gl'angoli retti in  $E$ , ed  $L$ , hanno l'angolo comune in  $D$ , dunque  $BD$ ,  $DE :: ED$ ,  $DL$ ; ma  $BD$  è flussione prima, e  $DE$  seconda ( per l'antecedente Corollario ) dunque  $DL$  farà una terza flussione. Quindi essendo l'arco  $BL$  della curva maggiore della semicorda  $BE$ , e minore della tangente  $BD$ , non può differire dall'una, e dall'altra se non per una grandezza al più del terzo ordine.

TEOREMA II.

7. Sia una qualunque curva  $DAE$ , ( *Fig. 8., e 9.* ) nel di cui asse prese due porzioni infinitesime del primo ordine, ed eguali  $HI$ ,  $IM$ , si conducano le ordinate parallele  $HA$ ,  $IB$ ,  $ME$ , le quali taglieranno nella data curva gl'archetti  $AB$ ,  $BE$  parimente infinitesimi del primo ordine. Si conduca la corda  $ABC$ , la quale concorra nel

nel punto  $C$  con l'ordinata  $ME$  prodotta, se occorre: Dico: che l'intercetta  $CE$  tra la curva, e la corda  $AB$  prodotta farà infinitesima del secondo ordine.

Si conduca la corda  $AE$ . Se la retta  $IM$  fosse quantità assegnabile finita, anco il triangolo  $ACE$  farebbe finito; ma accostandosi sempre alla ordinata  $HA$  la  $ME$  in maniera, che la  $IM$  divenga pure flussione, o sia infinitesima del primo ordine, l'angolo  $ACE$  rimane sempre lo stesso, e l'angolo  $AEC$  si accresce, facendosi sempre minore l'angolo  $CAE$ , fino a che divenga finalmente minore di un qualunque dato, cioè si faccia infinitesimo. In questo caso, siccome il seno di un'angolo infinitesimo del primo ordine col raggio finito assegnabile è quantità infinitesima del primo ordine, così il seno dell'angolo  $CAE$  infinitesimo del primo ordine nel raggio  $AE$ , o  $AC$  infinitesimo del primo ordine, farà quantità infinitesima del secondo ordine; ma ne' triangoli i lati sono proporzionali ai seni degli'angoli opposti, adunque anche la retta  $CE$  farà infinitesima del secondo ordine.

Chiamate per tanto le  $DH = x$ ,  $HA = y$ ,  $HI = IM = dx$ , farà  $FB = GC = dy$ , ed  $EC = -ddy$ , prefiggendo il segno negativo, perchè per essa cala, e non cresce la  $dy$ , (Fig. 8.) e così all'opposto averà il segno positivo, se per essa cresce la  $dy$ , cioè se la curva sia convessa in quel punto all'asse  $DM$ . (Fig. 9.)

COROL-

## COROLLARIO.

Se dal punto  $E$  si conduca alla  $BC$  la normale  $ES$ , faranno pure  $ES$ ,  $CS$  flussioni del secondo ordine, imperciocchè ciascuna minore di  $EC$ .

## TEOREMA III.

8. Se nel circolo si prenda un'arco infinitesimo del primo ordine; dico che il seno verso farà quantità infinitesima del secondo, e la differenza fra il seno retto, e la tangente farà infinitesima del terzo.

Sia l'arco  $DC$  (*Fig. 10.*) infinitesimo del primo ordine,  $DB$  il seno retto,  $CE$  la tangente, e si conduca  $DF$  parallela ad  $AC$ . Per la natura del circolo si à  $GB, BD :: BD, BC$ ; ma  $GB$  è quantità finita, e  $BD$  infinitesima del primo ordine, adunque siccome  $GB$  è infinitamente maggiore di  $BD$ , così farà  $BD$  infinitamente maggiore di  $BC$ , e però  $BC$ , o sia  $DF$  infinitesima del secondo ordine. Per la similitudine de' triangoli  $ABD, DFE$ , farà  $AB, BD :: DF, FE$ ; ma  $AB$  quantità finita è infinitamente maggiore di  $BD$  infinitesima del primo ordine, adunque  $DF$  infinitesima del secondo ordine farà infinitamente maggiore di  $FE$ ; e però  $FE$  flussione del terzo.

COROL-

## COROLLARIO I.

9. E poichè la tangente è sempre maggiore dell' arco , l'arco della corda , e la corda del seno retto ; potendosi assumere per eguali la tangente , ed il seno retto , giacchè non differiscono se non per una infinitesima del terzo , si potranno anco assumere per eguali la tangente , l'arco , la corda , ed il seno retto .

## COROLLARIO II.

10. Se s'immagineremo , che il raggio del circolo sia  $AN$  infinitesimo del primo ordine , farà l'arco  $NO$  , ed il seno  $OM$  infinitesimo del secondo , e però il seno verso  $MN$  infinitesimo del terzo .

## COROLLARIO III.

11. Sieno nell' asse  $DM$  ( Fig. 11., e 12. ) due differenze prime , ed eguali  $HI$  ,  $IM$  , alle quali corrispondono i due archi infinitesimi di curva  $AB$  ,  $BE$  , e si tirino le due corde  $BE$  ,  $AB$  , e questa prodotta incontri in  $C$  l'ordinata  $ME$  parimenti prodotta , se fa d'uopo . Si tiri  $ES$  perpendicolare a  $BC$  , e col centro  $B$  , raggio  $BE$  l'arco  $EO$  . Per il Corollario del Teorema II. ,  $CS$  è infinitesima del secondo grado , e per l' antecedente ,  $OS$  è infinitesima del terzo , dunque  $CO$  è infini-

infinitesima del secondo, perchè l'infinitesima del terzo aggiunta, o sottratta dall'infinitesima del secondo non fa alcuna alterazione; ma essendo  $HI = IM$ , o sia  $AF = BG$ , per i triangoli simili, ed eguali  $AFB, BGC$ , è anco  $AB = BC$ , ma gl'archi possono assumersi eguali alle corde, dunque  $CO$  sarà la differenza de' due archi  $AB, BE$ , e però se sia la curva  $DA = s$ , sarà  $AB = BC = ds$ ,  $CO = -dds$  col segno negativo, perchè  $AB$  va calando, essendo  $BE$  minore di  $AB$  nella Fig. 11., ed all'opposto col segno positivo nella Fig. 12.

## S C O L I O .

12. Nel determinare le seconde differenze dell'ordinata, e dell'arco della curva ò supposto, e nel Teorema II., ed in quest'ultimo Corollario, che le  $HI, IM$  sieno eguali, vale a dire, che la differenza prima dell'assisa non si alteri giammai, ma rimanga costante, nel qual caso la differenza seconda dell'assisa è nulla, cioè chiamata  $x$  l'assisa,  $dx$  la prima differenza, è  $ddx = 0$ .

Si fanno però due altre supposizioni ancora, cioè l'una, che sia costante la differenza prima dell'ordinata, e variabile quella dell'assisa, e della curva; l'altra, che sia costante la differenza prima della curva, e variabile quella dell'assisa, e dell'ordinata.

Ma dalle premesse cose è facile il passaggio a

Tom. II.

G

quest'

quest'altre due ipotesi. Ritenuto ciò, ch'è stato detto di sopra, sia (Fig. 13., e 14.)  $BF=EG$ , cioè costante la flussione dell'ordinata, si conduca  $EP$  parallela a  $BG$ , e  $PT$  perpendicolare, farà dunque  $BF=PT$ , quindi  $AF=BT$ ,  $AB=BP$ , e però  $GT$ , o sia  $EP$  la differenza tra  $HI$ , ed  $IM$ ; e descritto col centro  $B$ , intervallo  $BE$ , l'arco  $EO$ , farà  $PO$  la differenza tra l'arco  $AB$ , e l'arco  $BE$ , potendosi assumere le corde per gl'archi infinitesimi. Ma, per i triangoli simili  $BTP$ ,  $CEP$ , avremo  $PT$ ,  $TB :: CE$ ,  $EP$ ;  $PT$ ,  $PB :: CE$ ,  $CP$ ; e  $PT$ ,  $TB$ ,  $BP$  sono flussioni prime, e  $CE$  flussione seconda, dunque saranno  $EP$ ,  $CP$ , e molto più  $OP$  flussioni seconde, onde se sia  $DH=x$ ,  $DA=s$ , farà  $TG=PE=ddx$ ,  $PO=dds$  nella Fig. 13., e  $PE=-ddx$ ,  $PO=-dds$  nella Fig. 14., e  $ddy=0$ .

Sia costante il differenziale primo della curva, cioè  $AB=BE$ . Dal punto  $O$  si abbassi  $ON$  parallela a  $TP$ . Poichè per la supposizione è  $AB=BE=BO$ , farà anco  $AF=BN$ , adunque  $VE$ , o sia  $NG$  è la differenza tra  $HI$ , ed  $IM$ ; ma farà anco  $FB=NO$ , dunque  $VO$  è la differenza tra  $BF$ , ed  $EG$ . Ma egli è chiaro, che essendo flussione del secondo ordine  $EC$ , lo sono pure  $EV$ , ed  $VO$ ; dunque se sia  $DH=x$ ,  $HA=y$ , farà  $NG=ddx$ ,  $OV=-ddy$  nella Fig. 13., ed  $NG=-ddx$ ,  $OV=ddy$  nella Fig. 14., e  $dds=0$ .

La supposizione di una prima flussione costante, rende

rende più brevi e facili i calcoli , come si vedrà nel farne uso ; in varj incontri però , a fine di maggiore universalità , si procede dalle prime alle seconde differenze , senza fare la supposizione di alcuna prima flussione costante , ed è facile il determinarle .

Siano ( Fig. 15., e 16. )  $HI$ ,  $IM$  flussioni primie dell'assisa  $DH$ , ma non eguali , e la differenza tra loro sia  $ML$ , flussione seconda , e fatto il rimanente , come sopra , si tiri l'ordinata  $LN$ , e la  $Ei$  parallela a  $BG$ . Essendo adunque  $LM$  la differenza di  $HI$ , sarà  $HI=IL$ , cioè  $AF=BR$ , e però simili , ed eguali i triangoli  $ABF$ ,  $BRN$ , ed in conseguenza  $BF=NR$ ; dunque  $Ni$  farà la differenza tra  $BF$ , ed  $EG$ , cioè la differenza di  $BF$ , o sia la differenza seconda di  $AH$ . Similmente sarà  $AB=BN$ , dunque  $NO$  farà la differenza tra l'arco  $AB$ , e l'arco  $BE$ ; e però la differenza dell'arco  $AB$ , o sia la differenza seconda dell'arco  $DA$ , poichè egli è chiaro , che sono  $Ni$ ,  $NO$  flussioni del secondo grado . Lo stesso discorso vale , se in luogo di supporfi  $IM$  maggiore di  $HI$  di un differenziale secondo , si supponga minore .

13. Avvertirò , che le determinazioni fissate non racchiudono condizione alcuna intorno all'angolo delle coordinate , sebbene nelle Figure mostra di esser retto , ma nulla meno si deducono , qualunque siasi esso angolo .



## L E M M A .

14. Gl'angoli rettilinei sono tra loro nella ragione diretta degl'archi, e nell'inversa de' raggi.

Sieno i due angoli (*Fig. 17.*)  $EAB$ ,  $FAC$ . Prodotta  $AE$  in  $D$ , per la similitudine de' settori  $ABE$ ,  $ACD$ , farà  $AB, BE :: AC, CD$ , e però  $CD = \frac{BE \times AC}{AB}$ .

Ma l'angolo  $EAB$ , o sia  $DAC$ , è all'angolo  $FAC$ , come  $CD$  a  $CF$ ; dunque l'angolo  $EAB$  farà all'angolo  $FAC$ , come  $\frac{BE \times AC}{AB}$  a  $CF$ , cioè come  $\frac{BE}{AB}$  a  $\frac{CF}{AC}$ .

## T E O R E M A I V .

15. Preso l'arco  $CF$  (*Fig. 18.*) infinitesimo del primo grado della curva  $ACF$  qualunque, e condotte le perpendicolari  $CI$ ,  $FI$  alla curva, se col centro  $I$ , intervallo  $IF$ , si descriverà l'arco di circolo  $FS$ , dico: che egli caderà tutto al di dentro della curva  $ACF$  verso  $C$ , e l'intercetta  $CS$  farà quantità infinitesima del terzo grado.

Sulla curva  $AQR$  s'intenda condotto un filo, il quale essendo fisso al di sotto nel punto  $R$ , e preso nel punto  $A$ , si vada scostando dalla curva, ma in modo, che sia sempre teso, onde il punto  $A$  descriva la curva  $ACF$ . Essendo il filo nella polizione  $CQ$ , farà tangente

te

te della curva nel punto  $Q$ ; e nella posizione  $FR$ , che intendo infinitamente prossima alla  $CQ$ , sarà tangente in  $R$ , e prodotta  $CQ$  incontrerà  $FR$  in  $I$ . Poichè, per la generazione della curva  $ACF$ , la retta  $QC$  è eguale alla curva  $QA$ , e la retta  $RF$  alla curva  $RQA$ , e le due tangenti infinitesime  $QI$ ,  $RI$  sono assieme maggiori dell'elemento  $QR$ ; faranno anco  $CI$ ,  $IR$  prese assieme maggiori della curva  $RQA$ , o sia della retta  $FR$ ; dunque tolta la comune  $IR$ , farà  $IC$  maggiore di  $IF$ , ed il circolo  $FS$ , descritto col centro  $I$ , intervallo  $IF$ , caderà dentro la curva. Ma per il I., e III. Teorema le due tangenti  $QI$ ,  $RI$  non superano l'arco  $QR$ , che per una flessione terza; dunque la curva  $AQ$  assieme con le rette  $QI$ ,  $IR$  supera della stessa quantità la curva  $AQR$ , cioè la retta  $FR$ ; e detratta la comune  $IR$ , farà  $AQ$  con  $QI$ , cioè  $IC$  maggiore di  $IF$  per una infinitesima del terzo ordine.

## COROLLARIO.

16. Adunque si potrà considerare l'arco di circolo  $FS$ , come se si confondesse con l'arco di curva  $FC$ ; e potrà prendersi indifferentemente l'uno per l'altro, e la tangente  $RF$  sarà perpendicolare alla curva  $ACF$  nel punto  $F$ , e  $QC$  nel punto  $C$ .

La curva  $AQR$  si chiama l'*Evoluta*,  $ACF$  la *Generata dell'evoluta*, cioè nata dallo scioglimento del  
filo

filo della  $AQR$ ; ed il circolo  $FS$ , del centro  $I$ , raggio  $IF$ , il *Circolo Osculatore*.

### TEOREMA V.

17. Se alla curva  $DABE$  (*Fig. 11., e 12.*) ne' punti infinitamente prossimi  $A, B, E$ , cioè essendo gl'archetti  $AB, BE$  infinitesimi primi, si conducano le perpendicolari  $QA, QB$ , ed  $NE$ , la quale incontri la  $BQ$  nel punto  $N$ . Dico: che gl'angoli  $AQB, BNE$  potranno assumersi per eguali.

Per l'antecedente Lemma, l'angolo  $AQB$  stà all'angolo  $BNE$ , come  $\frac{AB}{AQ}$  ad  $\frac{EB}{BN}$ , cioè come  $AB \times BN$

ad  $EB \times AQ$ , ma il rettangolo  $EB \times AQ$  non è minore del rettangolo  $AB \times BN$ , se non per il rettangolo  $BE \times QN$ , e per il rettangolo di  $BN$  nella differenza degl'archetti  $AB, BE$ ; ed essendo  $QN, BE$  quantità infinitesime del primo grado, farà il rettangolo da esse fatto quantità infinitesima del secondo, siccome essendo la differenza degl'archetti  $AB, BE$  infinitesima del secondo, farà pure il rettangolo di questa in  $BN$  quantità infinitesima del secondo, adunque i due rettangoli  $AB \times BN, EB \times AQ$  non sono diversi, se non per due rettangoli infinitesimi del secondo grado; adunque possono prenderli per eguali, ed in conseguenza anco gl'angoli  $AQB, BNE$ .

COROL-

## COROLLARIO I.

18. Si conduca  $PBR$  tangente nel punto  $B$ ; questa dividerà in due egualmente l'angolo  $CBE$  fatto dalle due corde  $ABC$ , e  $BE$ ; imperciocchè essendo (Corollario III. Teorema I.) l'angolo  $BQA$  doppio dell'angolo  $PBA$ , a cui è eguale l'angolo  $CBR$ , anche l'angolo  $BNE$  farà doppio dell'angolo  $CBR$ ; ma, per lo stesso Corollario, l'angolo  $BNE$  è doppio pure dell'angolo  $RBE$ , adunque sono eguali gl'angoli  $CBR$ ,  $RBE$ .

## COROLLARIO II.

19. Sarà adunque l'angolo  $CBE$  eguale all'angolo  $BNE$ , e quindi il settore  $BNE$  simile al settore  $EBO$ .

## TEOREMA VI.

20. Se in due circoli, i diametri de' quali si eccedano d'un'infinitesima prima, si prenderanno due seni retti eguali, ed infinitesimi del primò grado; la differenza dei seni versi farà infinitesima del terzo.

Sieno i due circoli  $ABC$ ,  $PFH$ , (*Fig. 19.*) i seni retti infinitesimi del primò grado, ed eguali sieno  $BE$ ,  $FG$ , i seni versi  $EC$ ,  $GH$ . Si tirino le corde

de

de  $AB$ ,  $BC$ . Essendo il seno  $BE$ , e però l'arco  $BC$  flusso prima, farà l'angolo  $BMC$  infinitesimo del primo ordine, e però anche l'angolo  $BAC$ , che ne è la metà, e l'angolo  $EBC$ , che a quello è eguale; adunque poichè l'angolo  $EBC$ , ed i lati  $EB$ ,  $BC$  sono infinitesimi primi, farà il seno verso  $EC$  infinitesimo secondo.

Lo stesso vale del seno verso  $GH$ . Ma il seno verso  $EC$  (per la proprietà del circolo) si trova essere

$$= \frac{\overline{EB}^2}{\overline{AE}}, \text{ ed il seno verso } GH = \frac{\overline{GF}^2}{\overline{PG}} = \frac{\overline{EB}^2}{\overline{PG}}, \text{ dunque}$$

avremo l'analogia  $EC, GH :: PG, AE$ ; ma  $PG$  quantità finita supera  $AE$  quantità finita d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del primo ordine, per l'ipotesi, dunque  $EC$  quantità infinitesima del secondo ordine supererà  $GH$  infinitesima del secondo, d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del terzo.

### TEOREMA VII.

21. Sia la curva  $BEG$  (Fig. 20., e 21.) riferita al fuoco, cioè tale, che le ordinate tutte si partano da un punto dato, che si chiama il fuoco, e sia  $A$ , da cui si conducano tre ordinate infinitamente prossime  $AB$ ,  $AE$ ,  $AG$ , le quali comprendano i due archetti infinitesimi del primo grado  $BE$ ,  $EG$ , e si tiri la corda

da  $BE$ , la quale prodotta incontri in  $L$  l'ordinata  $AG$  pure prodotta, se fa bisogno. Col centro  $A$  si descrivano gl'archi  $BC$ ,  $EF$ , e seno  $BM$ ,  $EN$  i loro seni retti; indi si faccia l'angolo  $NEP$  eguale all'angolo  $MBE$ , dico: che l'intercetta  $GP$  farà differenza infinitesima del secondo ordine dell'ordinata  $AB$ .

Si tirì la corda  $EG$ . Poichè gl'angoli  $MBE$ ,  $NEP$  sono eguali per la costruzione, e gl'angoli in  $M$ , ed  $N$  sono retti, faranno simili i triangoli  $EBM$ ,  $PEN$ ; quindi preso per costante il seno  $BM$ , cioè supposto eguale ad  $EN$ , i predetti triangoli faranno in oltre eguali, e però farà  $ME = NP$ . Ma supposto  $BM = EN$ , per l'antecedente teorema, la differenza de' seni versi  $MC$ ,  $NF$  è infinitesima rispetto a loro, dunque faranno anco eguali le  $CE$ ,  $FP$ , e però  $GP$  farà la differenza tra  $CE$ , ed  $FG$ . Ma condotte perpendicolari alla curva ne' punti  $E$ ,  $G$  le rette  $EQ$ ,  $QG$ , l'angolo  $LEG$  è eguale all'angolo  $EQG$  per il Corollario II. del Teorema V., (il quale si verifica, o sia la curva riferita all'asse, o sia riferita al fuoco) e l'angolo  $EQG$  è infinitamente piccolo, dunque sarà infinitamente piccolo anche l'angolo  $LEG$ ; e perchè sono infinitesime del primo ordine le rette  $EG$ ,  $EL$ , sarà  $GL$  infinitesima del secondo, e molto più  $GP$  rispetto alla *Fig. 20.*

Per il Corollario I. del Teorema III. il seno  $BM$

Tom. II.

D

è

è eguale all'arco  $BC$ ; dunque, preso per costante in luogo del seno l'arco, e chiamato esso  $= dx$ ,  $AB=y$ ,  $CE=dy$ , farà  $GP=-ddy$ . E descritto col centro  $E$ , intervallo  $EG$  l'arco  $GV$ , farà  $VP=-dds$ , se sia  $BE=ds$ .

## COROLLARIO.

22. L'angolo  $LEP$  farà eguale all'angolo  $EAG$ ; imperciocchè l'angolo  $EPA$ , per la costruzione, è eguale all'angolo  $BEA$ , ma  $EPA$  esterno è eguale ai due interni  $L$ , ed  $LEP$ ; e l'altro  $BEA$  eguale ai due  $L$ , ed  $EAG$ , dunque tolto il comune  $L$ , rimarranno eguali i due  $LEP$ ,  $EAG$ . E perchè ciò si verifica, o sia la curva concava al punto  $A$ , (*Fig. 20.*) o sia convessa, (*Fig. 21.*) come è facile a vedere, farà nella stessa *Fig. 21.* infinitesimo l'angolo  $LEP$ , e quindi infinitesima del secondo ordine la  $LP$ , ma si è veduto, che  $GL$  è pure infinitesima del secondo, dunque lo farà anche tutta la  $GP$ , che farà  $= ddy$ ; e col centro  $E$ , intervallo  $EG$  descritto l'arco  $GV$ , farà  $PV=dds$ .

Facendo l'ipotesi della  $dy$  costante, col centro  $A$ , intervallo  $AG$  si descriva l'arco  $GT$ , e dal punto  $T$  si tiri la retta  $TOA$ . Poichè  $FG=EC$ , per l'ipotesi, farà il triangolo  $TEO$  simile, ed eguale al triangolo  $EBC$ , e però  $BC=EO$ , e  $BE=ET$ ; dunque

que  $OF = ddx$ , e  $TV = dds$  nella Fig. 20.; ma  $OF = - ddx$ , e  $TV = - dds$  nella Fig. 21.

Presa  $ds$  costante, si conduca la retta  $VRA$ , farà  $EG = EV = BE$ , e però simili, ed eguali i triangoli  $EBC$ ,  $EVR$ , adunque  $BC = ER$ ,  $CE = RV$ ; onde  $RF = ddx$ ,  $VI = - ddy$  nella Fig. 20., ma  $RF = - ddx$ ,  $VI = ddy$  nella Fig. 21.

Che se non si prenda alcuna prima flussione costante: sia  $EF$  maggiore di  $BC$  (Fig. 22., e 23.) per la flussione seconda  $RF$ ; si conduca la retta  $ART$ ; col centro  $A$ , intervallo  $AG$  l'arco  $GT$ ; e col centro  $E$ , intervallo  $EG$  l'arco  $GV$ . Poichè dunque  $BC = ER$ , farà anco  $CE = RI$ , e  $BE = EI$ , adunque  $TI$  farà la differenza tra  $CE$ , ed  $FG$ , ed  $VI$  la differenza tra  $BE$ , ed  $EG$ .

SCOLIO.

23. Non farà fuor di proposito il prevenire una difficoltà, che mi potrebbe esser mossa. Ella è, che nel Teorema antecedente si assumono per eguali le  $CE$ ,  $FP$  in virtù però del Teorema VI., ed il Teorema VI. suppone eguali i seni  $BM$ ,  $EN$ ; dunque pare, che le determinazioni fissate de' differenziali secondi abbiano luogo solo nel caso, che si faccia l'ipotesi della flussione costante  $BC$ , e non nell'altre; ma per togliere questa difficoltà basta riflettere, che quan-

D 2

tunque



tunque si ponga variabile la  $BC$ , la differenza però è infinitesima del secondo grado, che non toglie l'egualianza tra le flussioni prime  $BC$ ,  $EF$ ; e così nè meno tra i seni  $BM$ ,  $EN$ .

## S C O L I O II.

24. Ne' premessi Teoremi si contengono i principj, con i quali si maneggiano le quantità infinitesime di qualunque grado, e ci si apre la strada di far buon uso del calcolo differenziale, e sommatorio; ed ancora di applicare in oltre alle grandezze minime la Sintesi, e l'Analisi degli Antichi, e di servirsi della pura geometria, il che riesce di una particolare semplicità, ed eleganza.

Per iscarsare poi i paralogismi, ne' quali pur troppo è facile incorrere, gioverà il riflettere, che nelle linee infinitamente piccole di qualsivoglia ordine, conforme si pratica anco nelle finite, hanno a considerarsi due importanti circostanze, cioè la loro grandezza, e la loro posizione. E quanto alla grandezza non credo, che mai si possa sbagliare, se non da coloro, che credono tali grandezze infinitesime un mero nulla.

Ora sebbene le quantità col diminuirsi all'infinito passano da genere a genere, le proporzioni in qualunque ordine persistono le medesime; e perchè di tre  
linee

linee della stessa classe può costituirsi un triangolo, si noti, che minorandosi proporzionalmente i lati fino a far transito da un grado all'altro, non si mutano gli angoli, che sempre fra loro la stessa ragione conservano. In tali incontri non è mai lecito prendere una linea per l'altra, nè fingere eguaglianza, o adeguazione dove non ci può essere, anzi conviene tener ferme le analogie, e paragonare i triangoli d'un genere con quelli dell'altro, cioè gl'infinitefimi coi finiti, e gl'infinitefimi del secondo ordine con quelli del primo, e con i finiti, e così vadasi discorrendo.

Ma se due grandezze di qual si sia ordine differiranno per una grandezza, che rispetto a loro sia inassegnabile, sicuramente, e senza rischio alcuno d'errare una si può prendere per l'altra, nè v'è timore, che l'adequamento porti un minimo sconcerto.

Fa d'uopo adunque stare molto guardinghi quando si tratta della posizione delle linee, e degl'angoli, conciosiacchè il confondergli quando non deesi tira seco manifesti paralogismi.

25. Stabiliti i fondamenti principali di questo calcolo, farò passaggio alle maniere, o regole di differenziare le formole. Ed in primo luogo, debbasi prendere la differenza di varie quantità sommate assieme, o sottratte l'una dell'altra, per esempio di  $a+x+z+y-u$ . Siccome la differenza di  $x$  è  $dx$ , di  $z$  è  $dz$  ec.,

e

e della  $a$  costante è nulla, considerando ogni quantità accresciuta della sua differenza con quel segno, che lo compete, la formola proposta si muterà in quest' altra  $a + x + dx + z + dz + y + dy - u - du$ , da cui sottraendo la prima, farà il residuo  $dx + dz + dy - du$ , che è appunto ciò, per cui è cresciuta la quantità proposta, vale a dire la sua differenza.

Da ciò si ricava la regola generale, che per differenziare qualunque complesso di quantità analitiche di una dimensione, basterà prendere le differenze di ciascheduna variabile coi loro segni, ed il complesso di queste differenze farà la differenza della quantità proposta. La differenza adunque di  $b - s - z$  farà  $-ds - dz$ ; la differenza di  $ax - bz + by$  farà  $-bdz + bdy$ .

26. Che se la quantità proposta da differenziarsi farà il prodotto di più variabili, come  $xy$ , mentre  $x$  diviene  $x + dx$ , la  $y$  diviene  $y + dy$ , ed  $xy$  diviene  $xy + ydx + xdy + dxdy$ , che è il prodotto di  $x + dx$  in  $y + dy$ ; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta  $xy$ , rimane  $ydx + xdy + dxdy$ , ma  $dxdy$  è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell' altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e  $dxdy$  è il rettangolo di due infinitesime, e però infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di  $xy$  farà  $xly + ydx$ .

Sia

Sia da differenziarsi  $xyz$ ; il prodotto di  $x + dx$  in  $y + dy$  in  $z + dz$  è  $xyz + yzdx + xzdy + xydz + zdx dy + ydx dz + xdy dz + dxdy dz$ , il quale, sottratta la quantità proposta, rimane  $yzdx + xzdy + xydz + zdx dy + ydx dz + xdy dz + dxdy dz$ ; ma il primo, secondo, e terzo termine è ciascuno il prodotto di due quantità finite, e di una infinitesima; ed il quarto, quinto, e sesto è ciascuno il prodotto di una quantità finita, e di due infinitesime, dunque ciascuno di questi è infinitamente minore di ciascuno di quelli, e però si potrà trascurare, e molto più l'ultimo, che è il prodotto di tre infinitesimi; trascurati per tanto tutti i termini, principiando dal quarto, farà  $yzdx + xzdy + xydz$  la differenza di  $xyz$ .

Quindi nasce la regola, che per differenziare un prodotto di più quantità moltiplicate assieme, si dovrà prendere la somma de' prodotti della differenza di ciascuna di tali quantità nel prodotto dell'altre. La differenza adunque di  $bxzt$  farà  $bxzdt + bxt dz + btz dx + xzt \times 0$ , perchè la differenza della costante  $b$  è nulla, cioè la differenza di  $bxzt$  farà  $bxzdt + bxt dz + btz dx$ . La differenza di  $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$  farà  $dx \times \overline{b-y} - dy \times \overline{a+x}$ , cioè  $bdx - ydx - ady - xdy$ .

27. La formola da differenziarsi sia una frazione, per esempio,  $\frac{x}{y}$ . Si ponga  $\frac{x}{y} = z$ , farà dunque  $x = zy$ ,

e

e però anche eguali le loro differenze, cioè  $dx = zdy + ydz$ , quindi  $dz = \frac{dx - zdy}{y}$ , ora  $z = \frac{x}{y}$ , sostituito per-

tanto questo valore in luogo di  $z$ , farà  $dz = \frac{dx - \frac{xdy}{y}}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ ; ma se  $z = \frac{x}{y}$ , farà  $dz$  il differenziale di  $\frac{x}{y}$ , dunque il differenziale di  $\frac{x}{y}$  farà  $-\frac{xdy + ydx}{yy}$ .

E la regola farà, che il differenziale d'una frazione farà un'altra frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore della proposta frazione; ed il denominatore sia il quadrato del denominatore della stessa proposta frazione da differenziarsi.

La differenza adunque di  $\frac{a}{x}$  farà  $-\frac{adx}{xx}$ . La differenza di  $\frac{a+x}{x}$  farà  $\frac{xdx - adx - xdx}{xx}$ , cioè  $-\frac{adx}{xx}$ .

La differenza di  $\frac{y}{b-y}$  farà  $\frac{bdy - ydy + ydy}{(b-y)^2}$ , cioè  $\frac{bdy}{(b-y)^2}$ .

La differenza di  $\frac{3xy}{a-x}$  farà  $\frac{3xdy + 3ydx \times \frac{a-x}{a-x} + dx \times 3xy}{(a-x)^2}$ ,

cioè  $\frac{3axy + 3aydx - 3xxdy}{(a-x)^2}$ .

28. Debbonfi differenziare le potestà. E sia in primo luogo una potestà perfetta, e positiva, cioè di esponente intero positivo, per esempio,  $xx$ ; ora  $xx$  è il prodotto di  $x$  in  $x$ , adunque per la regola de' prodotti il differenziale sarà  $x dx + x dx$ , cioè  $2x dx$ . Sia da differenziarsi  $x^3$ ; ma  $x^3$  è il prodotto di  $x$  in  $x$  in  $x$ , adunque il differenziale farà  $xx dx + xx dx + xx dx$ , cioè  $3xx dx$ , e comechè la facenda procede con lo stesso ordine all' infinito, il differenziale di  $x^m$ , essendo  $m$  un numero qualunque intero positivo, farà  $mx^{m-1} dx$ .

Se l'esponente sarà negativo, per esempio  $ax^{-2}$ , o sia  $\frac{a}{xx}$ , il differenziale, per la regola delle frazioni,

farà il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, diviso il tutto per il quadrato del denominatore; ma il differenziale del denominatore è  $2x dx$ , dunque il differenziale di  $ax^{-2}$ , o sia  $\frac{a}{xx}$ , farà  $-\frac{2ax dx}{x^4}$ , cioè  $-\frac{2a dx}{x^3}$ ; il differenziale

di  $x^{-3}$ , o sia di  $\frac{1}{x^3}$ , farà  $-\frac{3xx dx}{x^6}$ , cioè  $-\frac{3 dx}{x^4}$ ; e

generalmente il differenziale di  $\frac{ax^{-m}}{b}$ , o sia di  $\frac{a}{bx^m}$ ,

farà  $-\frac{max^{m-1} dx}{bx^{2m}}$ , cioè  $-\frac{max^{-m-1} dx}{b}$ .

Sia la potestà imperfetta, ed in primo luogo positiva (cioè l'esponente sia rotto positivo)  $\sqrt[n]{x^m}$ , o sia  $x^{\frac{m}{n}}$ , esprimendo  $\frac{m}{n}$  un qualunque rotto positivo.

Si ponga  $x^{\frac{m}{n}} = z$ , ed elevando ciascun membro alla potestà  $n$ ,  $x^m = z^n$ , e differenziando,  $mx^{m-1} dx = nz^{n-1} dz$ , onde  $dz = \frac{mx^{m-1} dx}{nz^{n-1}}$ , ma essendo  $x^m = z^n$  è

anco  $z^{n-1} = x^{\frac{m(n-1)}{n}}$ , dunque sostituito questo valore in luogo di  $z^{n-1}$ , farà  $dz = \frac{mx^{m-1} dx}{nx^{\frac{m(n-1)}{n}}}$ , cioè

$$dz = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} dx,$$

Se l'esponente sarà negativo, come  $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ , cioè  $x^{-\frac{m}{n}}$ , o sia  $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ , il differenziale, per la regola

delle frazioni, farà  $-\frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} dx$ , cioè

$$-\frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} dx.$$

La

La regola generale è adunque, che il differenziale d'una qualunque potestà perfetta, o imperfetta, positiva, o negativa, è il prodotto dell'esponente della potestà nella quantità elevata alla potestà minore, per l'unità, della potestà data, ed il tutto moltiplicato nella differenza della quantità.

Sia da differenziarsi  $x^{\frac{3}{2}}$ , il differenziale sarà  $\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} dx$ , cioè  $\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$ , o sia  $\frac{3}{2} dx \sqrt{x}$ .

Sia  $x^{\frac{5}{4}}$ , la differenza sarà  $\frac{5}{4} x^{\frac{5}{4}-1} dx$ , cioè  $\frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} dx$ , o sia  $\frac{5}{4} dx \sqrt[4]{x}$ .

Sia  $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ , cioè  $x^{-\frac{3}{2}}$ , la differenza sarà  $-\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} dx$ , cioè  $-\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} dx$ , o sia  $-\frac{3 dx}{2x^{\frac{5}{2}}}$ .

Sia da differenziarsi  $ax + xx^2$ , farà la differenza  $2 \times ax + xx \times adx + 2x dx$ , cioè  $2aax dx + 6axx dx + 4x^2 dx$ .

Sia  $xy + ax^2$ , la differenza farà  $3 \times xy + ax \times xdy + ydx + adx$ ,

E 2

. cioè



cioè  $3x^2yydy + 6axy^2dy + 3aax^2dy + 3y^2xxdx + 9ayyxxdx + 9aayxxdx + 3a^2xxdx$ .

Sia  $\sqrt{ax - yy}$ , farà la differenza  $-2 \times \frac{ax - yy}{ax - yy} \times \frac{adx - 2ydy}{ax - yy}$ ,

cioè  $-\frac{2adx + 4ydy}{ax - yy}$ .

$\frac{3}{ax - yy}$

Sia  $\sqrt{ax - xx}$ , cioè  $ax - xx^{\frac{1}{2}}$ , farà la differenza

$\frac{1}{2} \times \frac{ax - xx^{\frac{1}{2}}}{ax - xx^{\frac{1}{2}}} \times \frac{adx - 2xdx}{ax - xx^{\frac{1}{2}}}$ , cioè  $\frac{adx - 2xdx}{2 \times \frac{ax - xx^{\frac{1}{2}}}{ax - xx^{\frac{1}{2}}}}$ ,

o sia  $\frac{adx - 2xdx}{2 \sqrt{ax - xx}}$ .

Sia  $\sqrt{xx + xy}$ , cioè  $xx + xy^{\frac{1}{2}}$ , farà la differenza

$\frac{1}{2} \times \frac{xx + xy^{\frac{1}{2}}}{xx + xy^{\frac{1}{2}}} \times \frac{2xdx + xdy + ydx}{xx + xy^{\frac{1}{2}}}$ , o sia  $\frac{2xdx + xdy + ydx}{2 \sqrt{xx + xy}}$ .

Sia  $\sqrt[3]{ax - xx}$ , cioè  $ax - xx^{\frac{1}{3}}$ , farà la diffe-

renza  $\frac{1}{3} \times \frac{ax - xx^{\frac{1}{3}}}{ax - xx^{\frac{1}{3}}} \times \frac{adx - 2xdx}{ax - xx^{\frac{1}{3}}}$ , o sia

$\frac{adx - 2xdx}{3 \times \frac{ax - xx^{\frac{1}{3}}}{ax - xx^{\frac{1}{3}}}}$ .

$3 \times \frac{ax - xx^{\frac{1}{3}}}{ax - xx^{\frac{1}{3}}}$

Sia

Sia  $\frac{1}{\sqrt[3]{ay+xy}}$ , cioè  $\frac{1}{ay+xy}^{\frac{1}{3}}$ , farà la differenza

$$-\frac{1}{3} \times \frac{1-1}{ay+xy}^{\frac{1}{3}} \times \frac{ady+xdy+ydx}{ay+xy}^{\frac{2}{3}}, \text{ cioè}$$

$$-\frac{ady-xdy-ydx}{3 \times ay+xy}^{\frac{4}{3}}.$$

Sia  $\frac{a-x}{\sqrt[3]{a+x}}$ , cioè  $\frac{a-x}{a+x} \times \frac{1}{a+x}^{\frac{1}{3}}$ , farà la differenza

$$-dx \times \frac{1}{a+x}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{1-1}{a+x}^{\frac{1}{3}} \times \frac{a-x}{a+x} \times dx,$$

o sia  $-dx \sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}} + \frac{1}{3} \frac{dx \times a-x}{\sqrt[3]{a+x}^2}.$

Sia  $\frac{\sqrt{ax+xx} + \sqrt[4]{a^4-x^4}}{\sqrt[4]{a^4-x^4}^{\frac{1}{2}}}$ , cioè

$\frac{ax+xx + \sqrt[4]{a^4-x^4}}{\sqrt[4]{a^4-x^4}^{\frac{1}{2}}}$ , farà la differenza

$$\frac{adx+2xdx - \frac{x^4 dx}{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}}}{2 \sqrt{ax+xx} + \sqrt[4]{a^4-x^4}} \text{, cioè } \frac{adx+2xdx \times \frac{a^4-x^4}{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}} - x^4 dx}{2 \sqrt{ax+xx} + \sqrt[4]{a^4-x^4}}$$

Sia

Sia  $\frac{ax + xx}{\sqrt{ax + xx}}$ , farà la differenza

$$\frac{3axx dx + 2x^3 dx - a^3 dx - 2aax dx}{2 \times \frac{\sqrt{ax + xx}^{\frac{3}{2}}}{2}}$$

Sia  $\frac{x \sqrt{ax + xx}}{a \sqrt{ay - xy}}$ , farà la differenza

$$\frac{3aayx dx + 2ayxx dx - 3yx^3 dx - aaxx dy + x^4 dy}{2a \times \frac{\sqrt{ay - xy}^{\frac{3}{2}} \sqrt{ax + xx}}{2}}$$

29. In quella guisa, che si prendono le differenze prime delle quantità finite, si prendono ancora le differenze delle quantità infinitesime del primo ordine, e le differenze delle quantità infinitesime del secondo, e così successivamente, servendosi delle stesse regole, che ô fin' ora spiegate.

Solo vi farà da riflettere, se alcuna flussione prima sia stata assunta per costante, e quale essa sia, poichè la di lei differenza sarà nulla, e si dovrà ommettere nel differenziare.

Sia proposta da differenziarsi la formola  $ydx - xdy$ , e non sia stata assunta costante flussione alcuna, la differenza sarà  $dx dy + yddx - dx dy - xddy$ , cioè  $yddx - xddy$ . Sia stata assunta costante la flussione  $dx$ , farà la differenza  $dx dy - dx dy - xddy$ , cioè  $-xddy$ . Sia costante la flussione  $dy$ , farà la differenza  $dx dy + yddx - dx dy$ , cioè  $yddx$ .  
Sia

Sia  $\frac{ydx}{dy}$ , in cui nessuna flussione prima si prenda costante, farà la differenza  $\frac{dx dy^2 + y dy ddx - y dx ddy}{dy^2}$ ; presa costante  $dx$ , farà  $\frac{dy^2 dx - y dx ddy}{dy^2}$ ; presa per costante  $dy$ , farà  $\frac{dy^2 dx + y dy ddx}{dy^2}$ , cioè  $\frac{dy dx + y ddx}{dy}$ .

Sia  $\frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz}$ , e, costante la  $dz$ , farà la differenza  $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz \times \frac{dx ddx + dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{dz^2}$ , cioè

$$\frac{dx^2 dy + dy^3 + y dx ddx + y dy ddy}{dz \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Presa per costante  $dy$ , farà  $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz dx ddx - y ddz \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , cioè

$$\frac{dx^2 dy dz + dy^3 dz + y dz dx ddx - y dx^2 ddz - y dy^2 ddz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Presa per costante  $dx$ , farà  $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz \times \frac{dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - y ddz \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$ , cioè

$$\text{cioè } \frac{dx^2 dydz + dy^3 dz + ydzdyddy - ydx^2 ddx - ydy^2 ddy}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

E finalmente presa nessuna flussione costante, farà la differenza

$$\frac{dydz \sqrt{dx^2 + dy^2} + ydz \times \frac{dx ddx + dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - y ddx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$$

$$\text{cioè } \frac{dx^2 dydz + dy^3 dz + ydz dx ddx + ydz dy ddy - y dx^2 ddx - y dy^2 ddy}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

E se in questa si cancelleranno tutti i termini, ne quali si trova la  $ddx$ , cioè fatta l'ipotesi di  $dz$  costante, si muterà essa nella prima; cancellando quelli, ne quali si trova la  $ddy$ , si muterà nella seconda; e cancellando quelli, ne quali si trova la  $ddx$ , si muterà nella terza, come è chiaro.

Sia  $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$ , e costante  $dx$ , farà la differenza

$$\frac{dx^2 + dy^2 + y ddy \sqrt{xx + yy} - x ddx - y dy \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

$$\text{cioè } \frac{xx dy^2 + xx y ddy + yy dx^2 + y^3 ddy - 2xy dx dy}{xx + yy^{\frac{3}{2}}}$$

Prefa

Presa per costante  $dy$ , farà

$$\frac{dx^2 + xddx + dy^2 \sqrt{xx + yy} - xdx - ydy \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

cioè  $\frac{x^3 ddx + xx dy^2 + yy dx^2 + yy x ddx - 2xy dxdy}{xx + yy^{\frac{3}{2}}}$ .

E finalmente presa nessuna flussione costante, farà

$$\frac{dx^2 + xddx + dy^2 + yddy \sqrt{xx + yy} - xdx - ydy \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

cioè  $\frac{x^3 ddx + xx dy^2 + xxyddy + yy dx^2 + yy x ddx + y^3 ddy - 2xy dxdy}{xx + yy^{\frac{3}{2}}}$ .

Sia proposta da differenziarsi la formola differenziale del secondo grado  $\frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx ddy}$ , o sia

$\frac{dx^2 + dy^2^{\frac{3}{2}}}{dx ddy}$ , e si prenda  $dx$  costante, farà la differenza

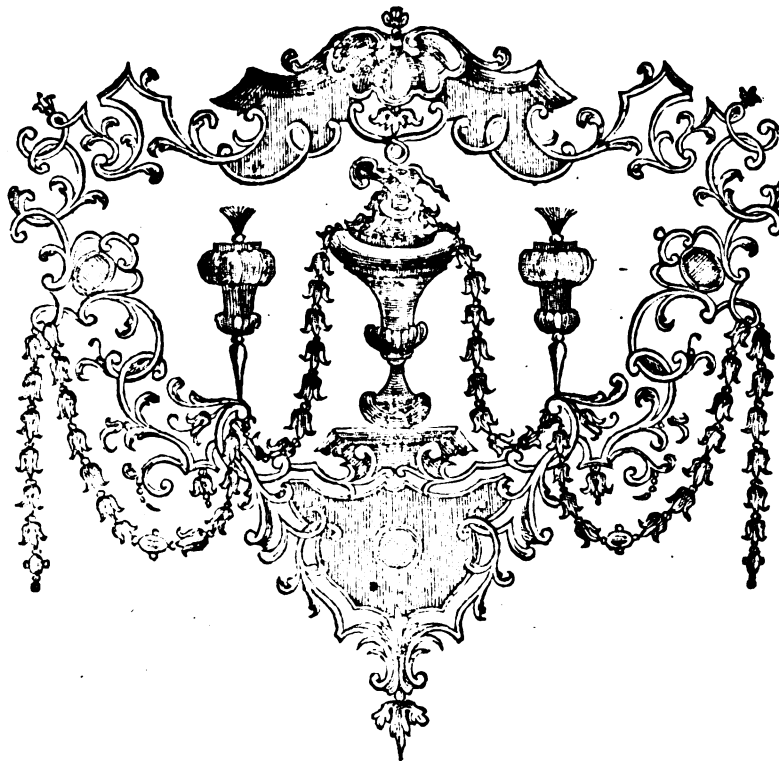
$$\frac{3 \times dyddy \times \frac{dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}}}{dx^2 ddy^2} \times -dxddy + dxddy \times \frac{dx^2 + dy^2^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}}{dx^2 ddy^2}$$

L'ipotesi di  $dy$  costante ripugna per questa formola, in cui già si trova la  $ddy$ .

Presa nessuna flussione costante, farà

$$\frac{3 \times dxddx + dyddy \times dx^2 + dy^2 \times -dxddy + dxddy + dxddy \times dx^2 + dy^2}{dx^2 ddy^2}$$

Con simil metodo si proceda in tutti gl'altri casi più composti .



CAPO

## C A P O I I.

*Del Metodo delle Tangenti.*

30. **A**LLA Curva  $ADF$  (Fig. 24., e 25.) sia tangente in un qualunque punto la retta  $TDG$ , e perpendicolare all'asse  $AB$  l'ordinata  $BD$  nel punto  $B$ , alla quale sia infinitamente prossima  $CF$ , che prodotta (se fa bisogno) incontri la tangente nel punto  $G$ , e si tiri  $DE$  parallela all'asse  $AB$ . Per quanto è stato dimostrato ne' premessi Teoremi, e suoi Corollarj, la  $GF$  sarà infinitesima rispetto ad  $EF$ , e sarà pure infinitesima rispetto all'archetto  $DF$  la differenza tra  $DF$ , e  $DG$ ; dunque si potranno usurpare per eguali le due  $EF$ ,  $EG$ , siccome le due  $DF$ ,  $DG$ ; e però, se sia  $AB = x$ ,  $BD = y$ , farà  $EF = EG = dy$ ,  $DF = DG = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Ma i triangoli simili  $GED$ ,  $DBT$  ci danno l'analogia  $GE$ ,  $ED :: DB$ ,  $BT$ , cioè in termini analitici,  $dy$ ,  $dx :: y$ ,  $BT$ , dunque  $BT = \frac{ydx}{dy}$ , ed ecco la formola generale della sottotangente per qualunque curva.

Nel caso per tanto di una curva data nulla altro rimarrà da farsi, per averne la sottotangente, che dif-



ferenziare l'equazione , ed il valore della  $dx$  , o  $dy$  sostituirlo nella formola generale  $\frac{ydx}{dy}$  , con che svani-

ranno i differenziali , ed averassi il valore della sottotangente espresso in termini finiti , che compete alla data curva per un qualunque punto , e se si voglia per un determinato punto , basterà sostituire in luogo dell'incognite quel valore , che loro compete , rispetto al punto determinato .

31. Dal poterfi assumere  $EF=EG$  , e  $DF=DG$  , ne viene , che si può considerare il punto  $G$  , come se cada in  $F$  , cioè , che la tangente  $DG$  , l'arco  $DF$  , e la sua corda si confondano assieme , vale a dire , che le curve sieno poligoni d'infiniti lati infinitamente piccoli . Questo discorso però procede solo , quando noi ci fermiamo nelle prime differenze ; ma se si dovranno computare le seconde , non si confonderà il punto  $G$  col punto  $F$  essendo appunto  $GF$  una seconda differenza . Quindi perchè nel metodo delle tangenti non s'introducono differenziali secondi , farassi giustamente il supposto , che essa tangente si confonda con l'archetto , e sua corda .

32. Lo stesso triangolo  $GDE$  ci somministra le formole per l'altre linee analoghe alla sottotangente .

Per la similitudine de' triangoli  $GED$  ,  $DBT$  , farà

$GE$  ,

$GE, GD :: DB, DT$ , cioè  $dy, \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y, DT$ ; e però  $DT = \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$ , formola generale della tangente.

Sia  $DN$  perpendicolare alla curva nel punto  $D$ , faranno simili i triangoli  $GDE, DBN$ , onde sarà  $DE, EG :: DB, BN$ , cioè  $dx, dy :: y, BN$ ; e però  $BN = \frac{ydy}{dx}$ , formola generale della sottonormale.

Sarà ancora  $DE, DG :: DB, DN$ , cioè  $dx, \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y, DN$ ; e però  $DN = \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ , formola generale della normale.

Dal punto  $B$  si conduca  $BM$  normale a  $DN$ , e  $BH$  normale a  $DT$ . Il triangolo  $GDE$  sarà simile al triangolo  $DBM$ , onde sarà  $GD, GE :: DB, BM$ , cioè  $\sqrt{dx^2 + dy^2}, dy :: y, BM = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , formola generale della linea  $BM$ .

Lo stesso triangolo  $GDE$  sarà anco simile al triangolo  $DBH$ , onde sarà  $GD, DE :: DB, BH$ , cioè  $\sqrt{dx^2 + dy^2}, dx :: y, BH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , formola generale della linea  $BH$ .

33. La similitudine de' due triangoli  $GED,$   
 $DBT$

$DBT$  ci farà scoprire in oltre l'angolo, che fa con l'asse la tangente ad un qualsivoglia punto di curva, conciosiacchè farà noto l'angolo  $DTB$ , qualora sia nota la ragione del seno retto  $DB$  al seno del complemento  $BT$ , cioè la ragione di  $GE$  ad  $ED$ , o sia di  $dy$  a  $dx$ .

Adunque data l'equazione della curva, se si differenzierà, e si risolverà in analogia, di cui sieno due termini  $dy$ ,  $dx$ , avrassi la ragione de' seni dell'angolo  $DTB$ , e però noto l'angolo.

34. In virtù dello stesso discorso nascono le medesime formole anco nelle curve riferite al fuoco, (*Fig. 26., e 27.*) solo che si rifletta, che condotta dal fuoco  $B$  normale all'ordinata  $BD$  la retta  $BT$ , che incontri la tangente in  $T$ , i triangoli  $DBT$ ,  $DGE$  faranno simili, perchè gl'angoli  $TBD$ ,  $DEG$  sono retti, e l'angolo  $TDB$  non è maggiore dell'angolo  $DGE$  se non per l'angolo infinitesimo  $DBG$ , il che si vede chiaro conducendo  $GQ$  normale a  $TB$ ; adunque si potranno assumere per eguali i due angoli  $TDB$ ,  $DGE$ , ed in conseguenza anco i due  $BTD$ ,  $GDE$ , e però simili i due triangoli  $DTB$ ,  $GDE$ ; ma inoltre  $GF$  è infinitesima rispetto ad  $EF$ , adunque ec.

ESEM-

## E S E M P I O I.

35. Sia la curva  $ADF$  (Fig. 24.) la parabola apolloniana dell'equazione  $ax = yy$ . Differenziando sarà  $adx = 2y \cdot dy$ , e  $dx = \frac{2ydy}{a}$ . Sostituito per tanto questo

valore in luogo di  $dx$  nella formola generale della sottotangente  $\frac{ydx}{dy}$ , avremo  $\frac{2yy}{a}$ , o pure  $2x$ , posto in luogo

di  $yy$  il valore  $ax$  dato dall'equazione della curva. La sottotangente adunque nella parabola è doppia dell'affissa, e però se si prenda  $AT = AB$ , e dal punto  $T$  si tiri al punto  $D$  la retta  $TD$ , essa sarà tangente della curva nel punto  $D$ . Se in luogo del valore di  $dx$  dato dall'equazione della curva, sostituiremo il valore di  $dy$ , cioè  $\frac{adx}{2y}$  nella formola generale  $\frac{ydx}{dy}$ , farà essa

ciò nulla ostante  $\frac{2yy}{a}$ , come prima, il che basterà d'avere notato in quest'esempio.

Nella stessa parabola si ricerchi la sottotnormale  $BN$ . La formola generale della sottotnormale è  $\frac{ydy}{dx}$ ; ma per l'equazione della curva si ha  $dx = \frac{2ydy}{a}$ , dunque fatta la sostituzione, farà la sottotnormale nella parabola

rabola =  $\frac{a}{2}$ , cioè la metà del parametro, e però presa

$BN = \frac{a}{2}$ , e dal punto  $N$  condotta al punto  $D$  la retta

$ND$ , farà essa normale alla curva in  $D$ .

Si ricerchi la tangente  $DT$ , la di cui formola generale è  $y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dy}}$ . Per l'equazione della curva

abbiamo  $dx = \frac{2ydy}{a}$ , dunque fatta la sostituzione di

questo valore in luogo di  $dx$  nella formola, avremo  $y \sqrt{\frac{4yydy^2 + aady^2}{ady}} = y \sqrt{4yy + aa} = \sqrt{4xx + ax}$ , (posto

in luogo di  $yy$  il valore  $ax$  dato dall'equazione) che è la tangente cercata.

Si ricerchi la normale  $DN$ . Sostituito il valore di  $dx = \frac{2ydy}{a}$  nella formola generale  $y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx}}$ , farà

essa  $y \sqrt{\frac{4yydy^2 + aady^2}{2ydy}} = \sqrt{4yy + aa} = \sqrt{4ax + aa}$ , posto

in luogo di  $yy$  il valore dato dall'equazione.

Si ricerchi la retta  $BM$ . Sostituito il valore di  $dx = \frac{2ydy}{a}$  nella formola generale  $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , farà essa

$$\frac{aydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{ay}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{a\sqrt{ax}}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Si

Si ricerchi la retta  $BH$ . Sostituito il valore di  $dx$  nella formola generale  $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , farà essa

$$\frac{2yydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{2yy}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{2ax}{\sqrt{4ax + aa}} .$$

Ritrovata la sottotangente, non è necessario alcun ufo di formole per ritrovare l'altre linee, sebbene a motivo di esercizio me ne sono quì servita, imperciocchè, essendo nota la  $BT$ , il triangolo  $TBD$  rettangolo in  $B$  ci somministra la tangente  $TD$ , e la similitudine de' triangoli  $TBD$ ,  $DBN$ ,  $DMB$ ,  $DHB$  l'altre linee tutte, e però ne' seguenti Esempj applicherò il metodo alle sole sottotangenti.

Se vogliasi l'angolo, che fa la tangente della parabola con l'asse. Prefa l'equazione differenziale  $adx = 2ydy$ , e risolta in analogia, troverassi  $dy, dx :: a, 2y$ , cioè che il seno retto  $BD$  è al seno del complemento  $BT$ , come il parametro al doppio dell'ordinata, dovunque siasi il punto  $D$ ; e se si vorrà fissata la tangente ad un punto determinato, per esempio al punto  $D$ , a cui corrisponda l'assissa  $AB = x = \frac{a}{4}$ , dall'equazione della curva trovata la  $y$  corrispondente ad  $x = \frac{a}{4}$ , che in questo caso è  $y = \frac{a}{2}$ , farà l'analoga

già  $dy, dx :: a, a$ , cioè semiretto l'angolo  $DTB$ , quando sia  $y = \frac{a}{2}$ , o  $x = \frac{a}{4}$ .

Nel vertice  $A$  è  $y = 0$ , e però l'analogia per l'angolo della tangente nel vertice farà  $dy, dx :: a, 0$ , cioè la ragione di  $dy$  a  $dx$  infinita, vale a dire il seno del complemento farà nullo, e però la tangente nel vertice farà perpendicolare all'asse.

## E S E M P I O II.

36. Sia l'equazione generale di tutte le parabole di qualunque grado  $x = y^m$ , intendendo per  $m$  qualunque numero positivo intero, o rotto, e che l'unità supplisca alle dimensioni. Differenziando farà  $dx = my^{m-1} dy$ , e sostituito questo valore in luogo di  $dx$  nella formola generale  $\frac{y dx}{dy}$ , farà la sottotangente  $= my^m = mx$ . Sia  $m = 3$ , cioè la parabola prima cubica  $x = y^3$ , farà la di lei sottotangente  $= 3x$ . Sia  $m = \frac{3}{2}$ , cioè la seconda parabola cubica  $xx = y^3$ , farà la di lei sottotangente  $= \frac{3}{2} x$  ec.

L'equazione differenziale  $dx = my^{m-1} dy$  della curva ci dà l'analogia  $dy, dx :: 1, my^{m-1}$ ; ma posta  $y = 0$ , se farà  $m$  maggiore dell'unità, l'analogia farà

rà  $dy, dx :: 1, 0$ , cioè la ragione di  $dy$  a  $dx$  infinita, e però la tangente nel vertice perpendicolare all'asse; e se farà  $m$  minore dell'unità, farà l'analogia  $dy, dx :: 1, \frac{m}{y^{1-m}}$ , cioè posta  $y = 0$ ,  $dy, dx :: 1, \frac{m}{0}$ ,

vale a dire la ragione di  $dy$  a  $dx$  infinitamente piccola, e però la tangente nel vertice parallela all'asse.

## E S E M P I O III.

37. Sia la curva  $DCE$ , (Fig. 28.) di cui si vuole la sottotangente, l'iperbola fra gl'asintoti dell'equazione  $xy = aa$ . Differenziando farà  $xdy + ydx = 0$ , e  $dx = -\frac{xdy}{y}$ ; sostituito per tanto nella formola  $\frac{ydx}{dy}$  della sottotangente il valore di  $dx$ , farà la sottotangente  $= -x$ , valore negativo, e questo vuol dire, che la sottotangente  $BT$  dee prenderli della parte opposta alle assisse.

Presa adunque  $BT = BA$ , e condotta al punto  $C$  la retta  $TC$ , farà essa tangente della curva nel punto  $C$ .

Poichè nella curva  $DCE$  crescendo l'assissa, cala l'ordinata  $y$ , s'avrebbe dovuto nel differenziare prendere negativa la differenza  $dy$ , ma perchè per la stessa ragione s'avrebbe dovuto prendere negativa la stessa  $dy$  anco nella formola generale, si à ommesso di farlo



nell'uno, e nell'altro luogo, giacchè senza imbarazzarsi co' segni torna lo stesso, il che ora avvertito servirà per gl'altri simili casi.

Sia l'equazione generale  $x = \frac{1}{y^m}$  a tutte le infinite

iperbole fra gl'asintoti, essendo  $m$  un qualunque numero positivo intero, o rotto. Differenziando avremo  $dx = -\frac{my^{m-1}dy}{y^{2m}} = -\frac{m dy}{y^{m+1}}$ , e sostituito questo va-

lore nella formola generale  $\frac{y dx}{dy}$ , la sottotangente sarà  $-\frac{m}{y^m}$ , o sia  $-mx$ , per l'equazione della curva.

#### ESEMPIO IV.

38. Sia la curva  $ADF$  (Fig. 24.) un circolo del diametro  $= 2a$ ,  $AB = x$ ,  $BD = y$ , sarà l'equazione  $2ax - xx = yy$ , e differenziando  $2adx - 2xdx = 2ydy$ , e però  $dx = \frac{ydy}{a-x}$ , e sostituendo questo valore nella

formola  $\frac{y dx}{dy}$ , sarà la sottotangente  $\frac{yy}{a-x}$ , cioè  $\frac{2ax - xx}{a-x}$ ,

posto in luogo di  $yy$  il valore dato dall'equazione. Sarà dunque la sottotangente nel circolo la quarta proporzionale di  $a-x$ , di  $2a-x$ , e della  $x$ .

Ma se il circolo sarà dell'equazione  $aa - xx = yy$ , nel

nel quale (Fig. 29.) si prendano le affisse  $AB = x$  dal centro, differenziando avremo  $-x dx = y dy$ , e  $dx = -\frac{y dy}{x}$ , sostituendo per tanto questo valore nella formola, sarà la sottotangente  $= -\frac{yy}{x}$ , cioè la terza proporzionale di  $AB$ , e  $BD$ , ma negativa, vale a dire da prendersi da  $B$  verso  $T$ .

## E S E M P I O V.

39. Sia la curva  $ADF$  (Fig. 24.) l'Ellissi dell'equazione  $ax - xx = \frac{ayy}{b}$ , prese le affisse dal vertice  $A$ .

Differenziando avremo  $adx - 2x dx = \frac{2ay dy}{b}$ , e

$dx = \frac{2ay dy}{b \times a - 2x}$ . Sostituito questo valore nella formola

generale  $\frac{y dx}{dy}$ , sarà  $\frac{2ayy}{b \times a - 2x}$  la sottotangente, o pure

$\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$ , posto in luogo di  $\frac{ayy}{b}$  il valore  $ax - xx$

dato dall'equazione. Fatta  $x = \frac{1}{2}a$ , metà dell'asse trasverso, nel valore della sottotangente, sarà essa  $\frac{2aa}{0}$ ,

cioè infinita; adunque la tangente nel punto, in cui l'asse conjugato taglia la curva, sarà parallela all'asse tras-

trasverso, il che troveremo esser vero anche cercando, qual sia l'angolo, che essa tangente fa con il medesimo asse trasverso.

Sia generalmente l'equazione alle ellissi di qualunque grado  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$ , intendendo per  $m$ ,  $n$  due numeri positivi intieri, o rotti. Differenziando farà  $\frac{m+n}{b} \times ay^{m+n-1} dy = mx^{m-1} dx \times \overline{a-x}^n - ndx \times \overline{a-x}^{n-1} \times x^m$ , e però  $dx = \frac{m+n \times ay^{m+n-1} dy}{\overline{a-x}^n - bnx^m \times \overline{a-x}^{n-1}}$ , e sostituito questo valore nella formola generale, farà essa  $\frac{m+n \times ay^{m+n}}{\overline{a-x}^n - bnx^m \times \overline{a-x}^{n-1}}$ , e posto in luogo di  $\frac{ay^{m+n}}{b}$  il valore dato dall'equazione, farà la sottotangente  $\frac{m+n \times x^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - nx^m \times \overline{a-x}^{n-1}}$ , e dividendo il numeratore, e denominatore per  $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}$ , farà finalmente  $\frac{m+n \times ax - xx}{ma - mx - nx}$ .

Sia

ANALITICHE LIB. II. 483

Sia  $m=1$ ,  $n=1$ , cioè l'ellissi apolloniana, farà la sottotangente  $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$ , come sopra. Sia  $m=3$ ,

$n=2$ , cioè l'equazione  $\frac{ay^3}{b} = x^3 \times \frac{x^2}{a-x}$ ; farà la sottotangente  $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$  ec.

Se l'equazione fosse  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \frac{x^n}{a+x}$ , esprimerebbe essa tutte le iperbole di qualunque grado riferite agl'assi, prese istessamente le assisse dal vertice  $A$ . Operando nello stesso modo, troveremo essere la sottotangente  $\frac{m+n}{ma + mx + nx} \times \frac{ax + xx}{a+x}$ , diversa solo dall'antecedente ne' segni, siccome diversa solo ne' segni è l'equazione, da cui si ricava.

Sia  $m=1$ ,  $n=1$ , cioè l'iperbola apolloniana, farà la sottotangente  $\frac{2ax+2xx}{a+2x}$ . Sia  $m=3$ ,  $n=2$ , cioè l'e-

quazione  $\frac{ay^3}{b} = x^3 \times \frac{x^2}{a+x}$ , farà la sottotangente  $\frac{5ax + 5xx}{3a + 5x}$  ec.

40. Da questo metodo delle tangenti si ricava ancora la maniera di riconoscere, se le curve anno  
afin-

asintoti, ed il modo di condurli, quando essi sono inclinati all'asse, giacchè nel caso più semplice, che ad esso sieno, o perpendicolari, o paralleli, abbastanza si è parlato nel Libro I. Capo 5.

## E S E M P I O I.

41. Sia la curva  $ADE$  (Fig. 30.) dell'equazione di sopra  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ , la di cui sottotangente

$$TB = \frac{m+n \times \overline{ax+xx}}{ma+mx+nx}, \text{ farà dunque l'intercetta}$$

$$AT = \frac{m+n \times \overline{ax+xx}}{ma+mx+nx} - x, \text{ cioè } \frac{na}{ma+mx+nx}.$$

Egli è chiaro, che la tangente  $TD$  diverrà asintoto, quando toccando ella la curva in infinita distanza, cioè quando l'assisa  $AB=x$ , essendo infinita, l'intercetta  $AT$  rimanga finita; ma posta  $x$  infinita nell'espressione di  $AT$ , il primo termine  $ma$  del denominatore è infinitamente minore degli'altri, e però da trascurarsi, onde in questo caso farà  $AT = \frac{na}{mx+nx} = \frac{na}{m+n}$ ,

quantità finita, adunque la curva è l'asintoto, il quale partirà dal punto  $M$ , fatta  $AM = \frac{na}{m+n}$ . Ma per con-

durlo :

durlo: si alzi  $AH$  normale ad  $AB$ , e sia egli per esempio  $MHP$ ; ciò posto, se si prenda  $x$  infinita, farà  $dx$ ,  $dy :: MA, AH$ , ed in questa supposizione di  $x$  infinita

l'equazione della curva  $ay^{m+n} = x^m \times \overline{a+x^n}$  (essendo  $a$  nullo rispetto ad  $x$ ) si muta in quest' altra  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$ , o sia, estraendo la radice, e facen-

do per maggior comodo  $m+n = t$ ,  $y \sqrt[t]{a} = x \sqrt[t]{b}$ ,

ma differenziando è  $dy \sqrt[t]{a} = dx \sqrt[t]{b}$ ; dunque  $dx$ ,

$dy :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$ , dunque  $MA, AH :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$ , e

perchè  $MA = \frac{na}{t}$ , farà  $\frac{na}{t}$ ,  $AH :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$ , cioè

$AH = \frac{na \sqrt[t]{b}}{t \sqrt[t]{a}}$ . Se per tanto si prenda  $AM = \frac{na}{t}$ , e si

alzi la normale  $AH = \frac{na \sqrt[t]{b}}{t \sqrt[t]{a}}$ , e si conduca infinita

la retta  $MHP$ , farà essa l'asintoto della curva  $ADE$ .

Sia  $m = 1$ ,  $n = 1$ , cioè l'equazione  $\frac{ayy}{b} = ax + xx$

all'iperbola apolloniana, farà  $t = 2$ , e però  $AM = \frac{a}{2}$ ,

$$AH = \frac{a\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}, \text{ cioè } AM \text{ la metà dell' asse trasverso, ed } AH \text{ la metà del conjugato, appunto come dalle sezioni coniche si fa, dover essere.}$$

verfo, ed  $AH$  la metà del conjugato, appunto come dalle fezioni coniche si fa, dover essere.

## E S E M P I O II.

42. Sia  $ADE$  la curva dell'equazione  $y^3 - x^3 = axy$ , fatte le  $AB = x$ ,  $BD = y$ . Differenziando avremo  $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$ , e però  $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$ ,

$$\text{ed } AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay}, \text{ o pure, po-}$$

sto in luogo di  $3y^3 - 3x^3$  il valore  $3axy$  dato dall'equazione della curva, farà  $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$ ; e fatta  $x$

infinita, cioè nel caso dell'asintoto, in cui  $AT$  diviene  $AM$ , il termine  $ay$  è nullo rispetto a  $3xx$ , adunque farà  $AM = \frac{axy}{3xx} = \frac{ay}{3x}$ .

Ma poichè nell'equazione proposta non si possono separare le indeterminate, nè in conseguenza determinare il valore della  $AM$ ; si ponga  $AM = \frac{ay}{3x} = t$ ,

(il medesimo, o simile artificio potrà servire in altri casi

casì della stessa natura ) sarà  $y = \frac{3tx}{a}$ , e sostituito questo valore nell'equazione proposta, sarà essa  $\frac{27t^3x^3}{a^3} -$

$x^3 = 3txx$ , ma quando sia  $x$  infinita, l'ultimo termine è nullo rispetto agli'altri; adunque sarà  $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 0$ ,

cioè  $t = \frac{a}{3}$ . Presa adunque  $AM = \frac{a}{3}$ , dal punto  $M$  si

dovrà condurre l'asintoto. Deve in oltre essere  $MA, AH :: dx, dy$ , e l'equazione proposta  $y^3 - x^3 = axy$ , o sia  $y^3 = x^3 + axy$  si riduce ad essere  $x^3 = y^3$ , cioè  $x = y$ , quando sia  $x$  infinita, e però  $dx = dy$ ; adunque fatta  $MA = AH$ , se dal punto  $M$  per lo punto  $H$  si condurrà una retta, essa sarà l'asintoto della curva.

Aggiungo in oltre, che deve necessariamente la linea  $AT$  accostarsi ad un certo limite, oltre il quale non possa trascorrere, e che il menzionato limite talora è infinitesimo, o nulla. Eccone un' esempio semplice.

Sia l'iperbola equilatera  $BCF$ , (Fig. 31.) e posta  $AB = a, AD = x, DC = y$ , abbiassi l'equazione  $aa + xx = yy$ , e differenziando,  $x dx = y dy$ . Quindi la sottotangente  $ED = \frac{y dx}{dy} = \frac{yy}{x} = \frac{aa + xx}{x}$ , e conseguentemente  $ED - AD = \frac{aa + xx}{x} - x = \frac{aa}{x} = AE$ .

Posta  $x = 0$ , si trova  $AE$  infinita, e la tangente  
 H 2 del



del punto  $B$  parallela all'asse  $AD$ ; e fatta  $x = \infty$ ; si è  $AE = 0$ . Per la qual cosa il punto  $E$  scorre tutta la  $AE$  infinitamente prodotta, e si ferma nella origine  $A$ , oltre cui non trascorre, quantunque la nostra curva volti il convesso all'asse. L'asintoto adunque  $AG$  nasce dal punto  $A$ , e forma con la linea delle assisse un'angolo semiretto, stante che nella equazione locale  $aa + xx = yy$ , posta  $x = \infty$ , svanisce la costante  $aa$ , e diventa  $xx = yy$ , o sia  $x = y$ .

43. Fino ad ora è stato da me supposto, che l'angolo delle coordinate sia retto. Che se egli sia ottuso, o acuto, poste come sopra  $BC = x$ ,  $CE = y$ ,  $CD = dx$ ,  $OG = dy$ , (Fig: 32., e 33.) la sottotangente farà nè più nè meno  $\frac{ydx}{dy}$ , perchè saranno sempre simili.

i due triangoli  $GEO$ ,  $EAC$ ; ma l'altre formole avranno bisogno di riforma.

Nel triangolo  $EOG$  l'angolo  $O$  eguale all'angolo  $ACE$  si suppone noto, adunque dal punto  $G$  abbassata  $GI$  normale ad  $AD$ ; e prodotta, se fa bisogno,  $EO$  in  $H$ , nel triangolo  $GOH$  farà noto l'angolo  $GOH$ , ma l'angolo in  $H$  è retto, quindi noto l'angolo  $OGH$ , e però noto in specie il triangolo  $OGH$ , cioè data la ragione di  $GO$  a  $GH$ , e sia quella di  $a$  ad  $m$ , farà pertanto  $a, m :: dy, GH = \frac{m dy}{a}$ ; farà pure data la ragione

di

di  $GO$  ad  $OH$ , e sia quella di  $a$  ad  $n$ , e però  $a$ ,  $n :: dy$ ,  $OH = \frac{ndy}{a}$ ; adunque  $EH = dx \pm \frac{ndy}{a}$  (cioè il

segno positivo nella Fig. 32., ed il negativo nella

Fig. 33.), quindi  $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + nndy^2 + mmdy^2}{aa}$ ;

ma se  $OG$  si esprime per  $a$ ,  $GH$  per  $m$ ,  $OH$  per  $n$ , farà  $aa = mm + nn$ , ed  $aady^2 = mmdy^2 + nndy^2$ , adunque

sostituito questo valore nell'espressione di  $\overline{EG}^2$ , farà

$\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{aa}$ , ed  $EG = ds =$

$\sqrt{\frac{adx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a}}$ , espressione dell'elemento della

curva. Ciò posto, per la similitudine de' triangoli  $EGO$ ,  $AEC$ , farà  $GO$ ,  $GE :: EC$ ,  $EA$ , cioè  $dy$ ,

$\sqrt{\frac{adx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a}} :: y$ ,  $EA = \frac{y}{dy} \sqrt{\frac{adx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a}}$ ,

formola della tangente.

Sia  $TE$  normale alla curva, ed  $ES$  al diametro  $AI$ , per la similitudine de' triangoli  $GOH$ ,  $ECS$ , avremo  $ES = \frac{my}{a}$ , e  $CS = \frac{ny}{a}$ ; e per la similitudine de'

triangoli  $GEH$ ,  $EST$ , avremo  $EH$ ,  $HG :: ES$ ,  $ST$ , cioè  $\frac{adx \pm ndy}{a}$ ,  $\frac{mady}{a} :: \frac{my}{a}$ ,  $ST = \frac{mmydy}{a \times adx \pm ndy}$ .

e

$$\begin{aligned} \text{e però } CT &= \frac{mmydy}{a \times \overline{adx \pm ndy}} \pm \frac{ny}{a} = \frac{mmydy + nnydy \pm anydx}{a \times \overline{adx \pm ndy}} = \\ &= \frac{aydy \pm nydx}{\overline{adx \pm ndy}}, \text{ formola della sottotnormale.} \end{aligned}$$

In simil modo si ridurranno l'altre formole, il che basti d'aver indicato.

44. Ma le curve, delle quali si vogliono le tangenti, possono esser trascendenti, cioè non esprimibili da alcuna equazione algebrica, ma dipendenti dalla rettificazione d'altre curve non rettificabili. Sia la curva  $APB$ , ( *Fig. 34* ) di cui si sappia condurre la tangente  $PTK$  ad un qualunque punto  $P$ , e prodotta in  $M$  la  $QP$  normale ad  $AQ$ , la relazione di  $MP$  all'arco  $PA$  sia espressa da un'equazione qualunque, e si ricerchi la tangente  $MT$  della curva  $CMA$  descritta da' punti  $M$ ; condotta  $qm$  infinitamente prossima a  $QM$ , ed  $MR$  parallela a  $PT$ , e supposto rettificabile l'arco  $AP$ , cioè  $=x$ , e chiamata  $PM=y$ , farà  $Pp=dx$ ,  $Rm=dy$ , e simili i due triangoli  $mRM$ ,  $MPT$ , e però  $mR$ ,  $RM :: MP$ ,  $PT$ , cioè  $dy$ ,  $dx :: y$ ,  $PT = \frac{ydx}{dy}$ , formo-

la per la sottotangente della curva  $CMA$  da prendersi sulla tangente della curva  $APB$ . Dall'equazione data della curva  $AMC$  si ritroverà il valore della  $dx$ , o  $dy$  da sostituirsi nella formola, e si farà il rimanente al solito.

ESEM-

## E S E M P I O .

45. Mentre il circolo  $DPC$  si arruota uniformemente sulla retta  $AB$  cominciando dal punto  $A$ , ( *Fig. 35.* ) il punto  $C$  della sua periferia, che nel principio del moto cade sul punto  $A$ , lasci impressa nel piano la traccia del suo cammino, e si continovi questo moto fino a che pervenga di nuovo il punto  $C$  nella retta  $AB$ ; descriverà esso una curva  $ACB$ , la quale dalla sua generazione viene chiamata la *Cicloide*; e dicesi *Cicloide ordinaria*, quando il circolo si muova talmente sulla retta  $AB$ , che tutta l'abbia esattamente misurata colla sua periferia dopo, che il punto  $C$  da  $A$  sia giunto in  $B$  per modo, che sia  $AB$  eguale alla periferia dello stesso circolo. Dicesi *Cicloide allungata* quando il moto sia tale, che la retta  $AB$  sia maggiore della periferia del circolo; e finalmente *Cicloide contratta* quando la stessa  $AB$  sia minore della periferia.

Dalla descrizione di questa curva chiaramente si vede, che condotta da un qualunque punto la retta  $MQ$  parallela ad  $AB$ , avrà l'intercetta  $MP$  fra la curva, ed il circolo  $CPD$  all'arco  $CP$  quella ragione, che à la retta  $AB$  a tutto il circolo.

Ed in fatti sia il circolo generatore nelle due posizioni  $EMF$ ,  $DPC$ ; condotte le corde  $ME$ ,  $PD$ ,

poi-

poichè sono eguali gli archi  $EM$ ,  $DP$ , faranno eguali, e parallele le corde  $EM$ ,  $DP$ , e però farà  $MP = ED$ ; ma per la natura della curva è  $AE$ ,  $EM :: AD$ ,  $EMF :: AB$ ,  $EMFE$ , e nella stessa ragione è pure  $ED$  ad  $MF$ ; ed  $MF = PC$ ,  $ED = MP$ , dunque farà  $MP, PC :: AD, EMF :: AB, EMFE$ . Se però si chiami la retta  $AB = a$ , la periferia  $EMFE$  del circolo generatore  $= b$ , ed un qualunque arco  $CP$  per affissa  $= x$ , l'ordinata  $PM = y$ , farà l'equazione della curva cicloide  $\frac{by}{a} = x$ .

Avuta l'equazione alla curva, la differenzio, per ritrovare la sottotangente; e però  $\frac{b dy}{a} = dx$ , e sostituito questo valore in luogo di  $dx$  nella formola  $\frac{y dx}{dy}$ , farà  $PT = \frac{by}{a} = x$ . Presa adunque sulla tangente  $PK$  (Fig. 34.)

del circolo, che si suppone condotta, una porzione  $PT$  eguale all'arco  $AP$  del circolo, e condotta al punto  $M$  la retta  $TM$ , essa farà tangente della cicloide nel punto  $M$ .

Che se in oltre la cicloide sia l'ordinaria; poichè in questo caso si ha  $b = a$ , e però  $y = x$ , farà  $PM = PT$ , e l'angolo  $PTM = PMT$ ; ma l'angolo  $TPQ$  esterno è doppio dell'angolo  $TMP$ , e gl'angoli  $TPA$ ,  $APQ$  ( per la 32., e 29. prop. del 3. d'Euclide ) sono eguali,

li, dunque farà l'angolo  $APQ$  eguale all'angolo  $TMP$ , e però la tangente  $MT$  parallela alla corda  $PA$ .

46. Senza supporre la tangente della curva  $APB$  (*Fig. 34.*) si potrà avere la sottotangente della curva  $AM$  presa nell'asse  $KAB$ . Sia  $AQ = x$ ,  $QP = y$ , l'arco  $AP = s$ ,  $QM = z$ , e la relazione dell'arco  $AP$  all'ordinata  $MP$  sia espressa da un'equazione qualunque. Sia  $qm$  infinitamente prossima alla  $QM$ , ed  $MS$  parallela ad  $AB$ , farà  $MS = dx$ ,  $Sm = dz$ , e la similitudine de' triangoli  $mSM$ ,  $MQN$  ci darà  $dz$ ,  $dx :: z$ .  $QN = \frac{zdx}{dz}$ , formola per la sottotangente.

Se in luogo di assumere per ordinata  $QM = z$ , si prenda  $PM = u$ , condotta  $MR$  parallela all'archetto  $Pp$ , farà  $mR = du$ ,  $RS = po = dy$ , e però  $MS = du + dy$ , ed i triangoli simili  $mSM$ ,  $MQN$  ci daranno  $du + dy$ ,  $dx :: u + y$ ,  $QN = \frac{u + y}{du + dy} \times dx$ , altra formola della sottotangente.

### ESEMPIO I.

47. Sia la curva  $APB$  (*Fig. 34.*) un circolo del diametro  $= 2r$ , e la ragione di  $PM$  all'arco  $PA$  sia quella di  $a$  alla  $b$ , cioè la curva  $AMC$  sia la cicloide. Chiamate  $AQ = x$ ,  $QP = y$ ,  $QM = z$ , l'arco  $AP = s$ ,

*Tom. II.* I e

e condotta  $mq$  infinitamente prossima ad  $MQ$ ,  $MR$  parallela a  $Pp$ ;  $MS$ ,  $Po$  parallele ad  $AB$ , farà  $mS = dz$ ,  $RS = po = dy$ ,  $Pp = ds$ , ed  $mR$  differenza di  $MP$  farà  $dz - dy$ . Ma poichè, per la proprietà della curva, abbiamo  $MP$  all'arco  $PA$ , come  $a$  a  $b$ , nella stessa ragione faranno ancora i differenziali loro  $mR$ ,  $pP$ ; e però farà  $dz - dy$ ,  $ds :: a$ ,  $b$ , cioè  $\frac{ads}{b} = dz - dy$ ;

ma  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , e per la proprietà del circolo  $y = \sqrt{2rx - xx}$ , dunque  $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$ , e  $dy^2 = \frac{r^2dx^2 - 2rx dx^2 + x^2dx^2}{2rx - xx}$ , quindi  $ds = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$ .

Surrogati per tanto questi valori in luogo di  $ds$ , e  $dy$  nell'equazione  $\frac{ads}{b} = dz - dy$ , avremo  $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx - xx}}$ , equazione differenziale della cicloide.

Sostituito adunque il valore di  $dz$  dato dall'equazione nella formola  $\frac{zdx}{dz}$  della sottotangente, avremo

$$QN = \frac{bz\sqrt{2rx - xx}}{ar + br - bx}.$$

Che se la cicloide sia l'ordinaria, farà  $a = b$ , e però

però  $QN = z \sqrt{\frac{2rx - xx}{2r - x}}$ , cioè  $2r - x, \sqrt{2rx - xx} :: z,$

$QN$ , o sia  $2r - x, y :: z, QN$ ; ma per la proprietà del circolo è  $2r - x, y :: y, x$ , adunque farà  $y, x :: z, QN$ , cioè  $QP, QA :: QM, QN$ , e però farà  $MN$  parallela a  $PA$ .

ESEMPIO II.

48. Sia la curva  $APB$  una parabola, la di cui equazione  $px = yy$ , poste  $AQ = x, QP = y$ , e sia l'arco  $AP = s, PM = u$ , e la ragione di  $MP$  all'arco  $PA$  sia quella di  $a$  alla  $b$ , farà pure  $mR, Pp :: a, b$ ; cioè  $du, ds :: a, b$ , e però  $\frac{ads}{b} = du$ . Ma nella

parabola  $y = \sqrt{px}$ , e  $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$ , dunque  $ds =$

$\frac{dx \sqrt{4px + pp}}{2\sqrt{px}}$ ; quindi surrogato questo valore in luogo

di  $ds$  nell'equazione  $\frac{ads}{b} = du$ , l'equazione alla curva

$AMC$  farà  $\frac{adx \sqrt{4px + pp}}{2b\sqrt{px}} = du$ . Prefa per tanto la

formola della sottotangente  $\frac{u+y}{du+dy} \times dx$ , che a questo



caso conviene, e fatte le sostituzioni in luogo di  $du$ , e  $dy$  farà  $QN = \frac{u+y \times 2b \sqrt{px}}{a \sqrt{4px+pp+bp}}$ ; ma  $y = \sqrt{px}$ , per

la proprietà della curva  $APB$ , ed  $\frac{as}{b} = u$ , per la proprietà della curva  $AMC$ ; dunque  $QN = \frac{2as \sqrt{px+2bpx}}{a \sqrt{pp+4px+bp}}$ .

49. Dal diverso modo, con cui molte curve si generano, nascono diverse dalle ritrovate le formole delle sottotangenti loro, benchè il metodo per ritrovarle sia simile. Basterà il ricercarle in alcune per fare idea della maniera, e dell'artificio, che dee usarsi in qualunque incontro; e però date le due curve  $AQC$ ,  $BCN$  (Fig. 36.) al comune diametro  $TF$ , alle quali si sappiano condurre le tangenti, sia un'altra curva  $MC$  tale, che la relazione delle ordinate  $PQ$ ,  $PM$ ,  $PN$  rispetto ad un qualunque punto  $M$  sia espressa da una qual si sia equazione, e si dimandi la tangente  $MT$  di un qualunque punto  $M$ . Si conduca  $pS$  infinitamente prossima a  $PN$ , e le  $NS$ ,  $MR$ ,  $QO$  parallele ad  $AB$ , e sia  $PE = s$ ,  $PF = t$ , cognite per la supposizione,  $PQ = x$ ,  $PM = y$ ,  $PN = z$ . Per la similitudine de' triangoli  $QPE$ ,  $qOQ$ , farà  $QO = \frac{sdx}{x} = MR = NS$ , e per la similitudine de' triangoli  $mRM$ ,  $MPT$ , farà

rà

rà  $PT = \frac{sydx}{xy}$ , formola della sottotangente; ma perchè

differenziando l'equazione della curva  $MC$ , a fine di avere il valore della  $dx$  da sostituirsi in essa formola, farà egli dato per  $dy$ , e  $dz$ , non si averà essa sottotangente in termini finiti. Si rifletta adunque, che i triangoli simili  $NSn$ ,  $NPF$  ci danno  $NP, PF :: nS, SN$ , cioè  $z, t :: \pm dz, SN = \pm \frac{tdz}{z}$  (cioè il segno positivo

vo alla  $dz$ , se crescendo  $x$ , ed  $y$ , cresce la  $z$ ; ed il segno negativo, se crescendo  $x$ , ed  $y$ , la  $z$  cala). Ma è anco  $SN = \frac{sdx}{x}$ , dunque  $\pm \frac{tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$ , e però

$dz = \pm \frac{szdx}{tx}$ . Posto adunque in luogo di  $dz$  questo va-

lore nell'equazione differenziata della curva  $MC$ , si averà un valore di  $dx$  dato per  $dy$ , il quale sostituito nella formola della sottotangente  $\frac{sydx}{xy}$  farà svanire le

differenze, e la sottotangente farà espressa in termini finiti.

## E S E M P I O I.

50. Sia  $xz = yy$  l'equazione della curva  $MC$ ; differenziando farà  $zdx + xdz = 2ydy$ , e sostituito in luogo di  $dz$  il valore  $\pm \frac{szdx}{tx}$ , farà  $zdx \pm \frac{szdx}{t} = 2ydy$ ,

e

e però  $dx = \frac{2tydy}{tz \pm sz}$ ; nella formola della sottotangente,

$\frac{sydx}{sdy}$  surrogato per tanto, in luogo di  $dx$ , questo valore, farà  $PT = \frac{2sty}{tzx \pm szx} = \frac{2st}{t \pm s}$ , quando si ponga

in vece di  $yy$  il valore  $xz$ . Sia ora la curva  $AQC$  una parabola del parametro  $= b$ ; la curva  $BCN$  un circolo del diametro  $AB = 2a$ . Se adunque il punto  $N$  cade nella periferia del primo quadrante principiando da  $A$ , in cui la  $dz$  è positiva, la formola della sottotangente  $PT$  farà  $\frac{2st}{t+s}$ , e la sottotangente del circolo farà

$\frac{2aq - qq}{a - q} = t$  (chiamata  $AP = q$ ), e quella della para-

bola farà  $2q = s$ ; posti adunque questi valori in luogo di  $t$ , e di  $s$  nell' espressione  $\frac{2st}{t+s}$ , avremo  $PT =$

$$\frac{8aq - 4qq}{4a - 3q}$$

Che se il punto  $N$  cade nella periferia dell'altro quadrante, farà  $dz$  negativa, e la formola della sottotangente  $PT$  farà  $\frac{2st}{t-s}$ ; ma in questo caso la sotto-

tangente del circolo è  $\frac{2aq - qq}{q - a} = t$ , e della parabola

rimane

rimane  $2q = s$ , e però fatte le sostituzioni de' valori di  $t$ , e di  $s$  nell'espressione  $\frac{2st}{t-s}$ , avremo  $PT = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q}$ ,

come nel primo caso.

52. Ma quando siasi denominata  $AP$ , essendo  $AQ$  una parabola, sarà  $PQ = x = \sqrt{bq}$ ; ed essendo  $BCN$  un circolo, sarà  $PN = z = \sqrt{2aq - qq}$ , adunque l'equazione  $yy = zx$  della curva  $MC$  sarà  $yy = q\sqrt{2ab - bq}$ , e data così l'equazione per le due coordinate  $AP, PM$ , troverassi la sottotangente  $PT$  con le solite ordinarie formole  $\frac{y dq}{dy}$ . Differenziando adunque l'equazione  $yy =$

$q\sqrt{2ab - bq}$ , sarà  $y dy = \frac{4abdq - 3bq dq}{4\sqrt{2ab - bq}}$ ; quindi multi-

plicando per  $y$  il numeratore, e denominatore della formola  $\frac{y dq}{dy}$ , onde sia  $\frac{yy dq}{y dy}$ , e sostituendo in luogo di  $yy$ , e di  $y dy$  i rispettivi valori, sarà  $\frac{yy dq}{y dy} = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q} =$

$PT$ , come prima.

53. Sia più generalmente  $x^m z^n = y^{m+n}$  l'equazione della curva  $MC$ , differenziando sarà  $mz^n x^{m-1} dx + nx^m z^{n-1} dz = \overline{m+n} \times y^{m+n-1} dy$ , e ponendo in

luogo

luogo di  $dz$  il valore  $\pm \frac{szdx}{tx}$ , farà

$$\frac{tmz^n x^{m-1} dx \pm snx^{m-1} z^n dx}{s} = \overline{m+n} \times y^{m+n-1} dy,$$

e però  $dx = \frac{\overline{mt+nt}}{mt \pm ns} \times y^{m+n-1} dy$ ; adunque  $PT =$

$$\frac{sdy}{x dy} = \frac{mst + nst \times y^{m+n}}{mt \pm ns \times z^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt \pm ns},$$

quando si ponga in luogo di  $y^{m+n}$  il valore  $x^m z^n$ .

54. Se le due curve  $AC$ ,  $BCN$  diverranno linee rette, nel caso dell'equazione semplice  $xz = yy$  della curva  $MC$  farà essa una delle Sezioni Coniche d'Apollonio, come si è veduto al Lib. I. Cap. III. num. 135., cioè un'Ellissi quando l'ordinata  $CD$  cade fra i punti  $A$ ,  $B$ ; un'Iperbola quando cade dall'una, o dall'altra parte; ed in fine una Parabola quando i punti  $A$ ,  $B$  sono infinitamente lontani l'uno dall'altro, cioè quando l'una delle rette linee  $AC$ ,  $BC$  è parallela al diametro. Da ciò manifestamente si vede, che nelle stesse circostanze faranno le medesime curve coniche, ma di grado superiore in infinito, quando l'equazione alla curva  $MC$  sia la generale  $x^m z^n = y^{m+n}$ .

55. Data la curva  $AP$  (Fig. 37.) con l'origine in  $A$ , di cui si sappia condurre la tangente, sia un'altra curva  $CMD$  tale, che condotta da un punto dato

F

$F$  la retta  $FMP$  in qualunque modo, la relazione di  $FM$  alla porzione  $AP$  sia espressa da un'equazione qualunque, e debbasi ritrovare la tangente della curva  $CMD$ .

Sia  $PH$  tangente della curva  $APB$  nel punto  $P$ , e si conduca  $FH$  normale ad  $FP$ , ed  $Fp$  infinitamente prossima, e col centro  $F$  si descrivano gl'archetti infinitesimi  $MR$ ,  $PO$ , e la ricercata tangente della curva  $CMD$  sia  $MT$ . Si chiamino  $PH = t$ ,  $FH = s$ ,  $FM = y$ ,  $FP = z$ , e l'arco  $AP = x$ . Poichè per gl'archi infinitesimi possono assumersi i loro seni retti, sarà il triangolo  $MRm$  rettangolo in  $R$ , e perchè l'angolo  $MmR$  non è diverso dall'angolo  $TMF$ , se non per l'angolo infinitesimo  $MFm$ , si potranno considerare simili i due triangoli  $MRm$ ,  $TFM$ , e per la stessa ragione simili i due triangoli  $POp$ ,  $HFP$ ; adunque sarà  $mR$ ,  $RM :: MF$ ,  $FT$ , cioè  $dy$ ,  $MR :: y$ ,  $FT$ , ed  $FT = \frac{MR \times y}{dy}$ , onde per avere il valore di  $FT$  con-

viene avere prima quello di  $MR$ , che si averebbe, se fosse nota  $PO$ ; ma per i triangoli simili  $PFH$ ,  $POp$ , sarà  $PH$ ,  $FH :: Pp$ ,  $PO$ , cioè  $t$ ,  $s :: dx$ ,  $OP = \frac{sdx}{t}$ ,

e per i settori simili  $FPO$ ,  $FMR$ , sarà  $FP$ ,  $PO :: FM$ ,  $MR$ , cioè  $z$ ,  $\frac{sdx}{t} :: y$ ,  $MR = \frac{sydx}{zt}$ , quindi  $FT = \frac{sydyx}{tzdy}$ ,

formola della sottotangente; la quale, se si sostituisc-

luogo di  $dx$  il valore dato dall'equazione differenziata della curva  $CMD$ , farà espressa in termini finiti.

## E S E M P I O I.

56. Sia il circolo  $ABCD$  (Fig. 38.) del centro  $H$ , raggio  $HA$ , e mentre il raggio  $HA$  fisso nel centro si muove uniformemente, descrivendo il punto  $A$  la periferia  $ABCD$ , si muova il punto  $H$  uniformemente sul raggio  $HA$  in modo, che restitutosi il raggio nella prima situazione  $HA$  il punto  $H$  abbia percorso tutto il raggio, e sia in  $A$ ; descriverà il punto  $H$  la curva  $HEcA$ , che dicesi la *Spirale d'Archimede*. Dalla generazione di questa curva è facile a vedere, che un qualunque arco  $AB$  del circolo farà alla corrispondente porzione  $HE$  del raggio, come tutto il circolo a tutto il raggio. Chiamato adunque il raggio  $= r$ , la periferia del circolo  $= c$ , l'arco  $AB = x$ , e l'ordinata  $HE = y$ , farà  $x, y :: c, r$ , e però  $y = \frac{rx}{c}$ , equazione

della spirale, in cui le ordinate sono dal punto fisso  $H$ . Ciò premesso, si voglia la tangente  $ET$  della spirale: poichè in questo caso la  $FP$  della Fig. 37. è il raggio  $HB$  del circolo, farà  $z = r$ , e le due,  $PH$  tangente, ed  $FH$  sottotangente, nella stessa Fig. 37. sono in questa ambedue perpendicolari al raggio  $HB$  (per la natura

natura del circolo), ed in conseguenza tra loro parallele, e però eguali; onde farà  $s = r$ , adunque la formola generale  $\frac{yydx}{szdy}$  farà in questo caso  $\frac{yydx}{r dy}$ ; quindi

differenziando l'equazione  $y = \frac{rx}{c}$ , farà  $dy = \frac{r dx}{c}$ , e so-

stituito nella formola il valore di  $dx$ , farà essa  $\frac{cyy}{r} = HT$ ; o pure posto in luogo di  $y$  il valore  $\frac{rx}{c}$ , farà  $\frac{xy}{r} = HT$ . Descritto adunque col centro  $H$ , rag-

gio  $HE = y$  l'arco  $EQ$ , e presa  $HT$  eguale all'arco  $EQ$ , farà essa la sottotangente, perchè per la similitudine de' settori  $HEQ, HBA$ , farà  $HA, AB :: HQ, QE$ ; cioè  $r, x :: y, QE = \frac{xy}{r}$ .

Se in luogo di essere l'equazione  $y = \frac{rx}{c}$ , sia

$y^m = \frac{r^m x}{c}$ , cioè la periferia all'arco  $AB$ , come una

qualunque potestà  $m$  intiera, o rotta del raggio ad egual potestà dell'ordinata, differenziata l'equazione, ci darà  $dx = \frac{mcy^{m-1} dy}{r^m}$ , ed  $ydx = \frac{mcy^m dy}{r^m}$ ; e fatta la sostitu-

zione nella formola  $\frac{yydx}{r dy}$  della sottotangente, farà essa

$$\frac{mcy^{m+1}}{r^{m+1}} = HT, \text{ ma } y^m = \frac{r^m x}{c}, \text{ dunque } \frac{mxy}{r} = HT =$$

$m \times EQ.$

K 2

57.



57. Più semplice si averà la formola della sottotangente, se l'equazione della curva  $APB$  (Fig. 37.) sia data dalla relazione di  $FM$  ad  $FP$ ; poichè i triangoli simili  $pOP$ ,  $PFH$ , ci danno  $PO = \frac{sdz}{z}$ , ed i settori simili  $FPO$ ,

$FMR$  ci danno  $MR = \frac{sydz}{zz}$ , e finalmente i triangoli simili

li  $MRm$ ,  $TFM$  ci daranno  $FT = \frac{syydz}{zzdy}$ .

## ESEMPIO II.

58. Sia la curva  $CMD$  al di sopra di  $APB$ , il che non fa alcuna alterazione (Fig. 39.), ed  $APB$  sia una retta linea, ed  $FM$ ,  $FP$  sieno sempre diverse fra loro per la stessa quantità, cioè  $PM$  costante  $= a$ , farà  $y - z = a$  l'equazione della curva, che è la Concoide di Nicomede, il di cui polo  $F$ , ed  $AB$  l'asintoto. Differenziando l'equazione, farà  $dy = dz$ , quindi la sottotangente  $FT = \frac{syy}{zz}$ .

Condotta adunque  $ME$  parallela a  $PA$ , ed  $MT$  parallela a  $PE$ , farà  $MT$  tangente della curva in  $M$ ; imperciocchè farà  $FA = s$ ,  $FE = \frac{sy}{z}$ , ed  $FT = \frac{syy}{zz}$ .

59. Data all'asse  $EAT$  la curva qualunque  $AM$ , (Fig. 40.) di cui si sappia condurre la tangente  $MH$  ad un qualunque punto  $M$ , e dato fuori della curva il punto  $F$ , da cui sia condotta la retta  $FPM$ ; se s'immagineremo, che

che aggirandosi la retta  $FPM$  sul punto  $F$  immobile, faccia muovere sulla retta  $ET$  il piano  $PAM$  sempre parallelo a se stesso, rimanendo la intercetta  $PA$  sempre la stessa: il punto  $M$ , che è la comune intersecazione delle due linee  $FM, AM$ , descriverà con questo moto una curva  $CMD$ , di cui si domanda la tangente. Si muova il piano  $PAM$ , e nel primo istante arrivi nella posizione infinitamente prossima  $pam$ ; e si conduca  $SRm$  parallela ad  $ET$ . La similitudine de' triangoli  $MRm, MHT$  ci darebbe la retta  $HT$ , che determina la tangente ricercata, se fossero noti i lati  $MR, Rm$ . Per averli adunque, chiamata  $FP$ , o  $Fp = x$ ;  $FM$ , o  $Fm = y$ ,  $Pp = dz$ , e le note  $PA = a$ ,  $MH = t$ ,  $PH = s$ ; egli è chiaro, che sarà  $Pp = Aa = Rm = dz$ , e per i triangoli simili  $FPp, FSm$  sarà  $Fp, Pp :: Fm, Sm$ , cioè  $x, dz :: y, Sm = \frac{ydz}{x}$ , dunque  $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$ ; e per i triangoli simili  $MPH, MSR$ , sarà  $HP, HM :: RS, RM$ , cioè  $s, t :: \frac{ydz - xdz}{x}, MR = \frac{tydz - txdz}{sx}$ ; finalmente, per i triangoli simili  $MRm, MHT$ , sarà  $MR, Rm :: MH, HT$ , cioè  $\frac{tydz - txdz}{sx}, dz :: t, Ht = \frac{sx}{y-x}$ .

Dal punto  $F$  si conduca  $FE$  parallela alla tangente  $MH$ , e si prenda  $HT = PE$ , tirata  $TM$ , sarà essa tangente della curva nel punto  $M$ . Imperocchè per i triangoli simili  $PMH, PFE$ , sarà  $PM, PH :: PF, PE$ , cioè  $y - x, s :: x, \frac{sx}{y-x} = PE = HT$ .

60. E' stato dimostrato al num. 136. Cap. III. Lib. I. che se la linea  $AM$  fosse una retta, la curva  $CMD$  farebbe l'iperbola, che averebbe  $ET$  per uno de' due asintoti. Se  $AM$  fosse un circolo col centro  $P$ , la curva  $CMD$  farebbe la Concoide di Nicomede, il di cui polo  $F$ , e l'asintoto  $ET$ . E se finalmente  $AM$  fosse una parabola, la curva  $CMD$  farebbe la *Compagna della Paraboloidi di Cartesio*, cioè una delle due *Concoidi Paraboliche*.

61. Al diametro  $AP$  (Fig. 41.) sia una curva qualunque  $AN$ , a cui si sappia condurre la tangente, ed un punto fisso  $F$  fuori di lei, e sia un' altra curva  $CMD$  tale, che condotta, come si vuole, dal punto  $F$  la retta  $FMPN$ , la relazione tra  $FN$ ,  $FP$ , ed  $FM$  sia espressa da un' equazione qualunque; si dimanda la tangente  $MT$  di un qualunque dato punto  $M$ .

Per lo punto  $F$  si conduca  $HK$  perpendicolare ad  $FN$ , che incontra in  $K$  il diametro  $AP$  prodotto, ed in  $H$  la tangente data  $NH$ . Sia  $FQ$  infinitamente prossima ad  $FN$ , e col centro  $F$  si descrivano gl'archi  $MR$ ,  $Po$ ,  $NQ$ . Chiamate  $FK = s$ ,  $FH = t$ ,  $FP = x$ ,  $FM = y$ ,  $FN = z$ , farà  $mR = dy$ ,  $po = dx$ ,  $Qn = -dz$ , e per la similitudine de' triangoli  $NQn$ ,  $NFH$ , farà  $NQ = -\frac{tdz}{z}$ ; e per la similitudine de' settori  $FNQ$ ,  $FMR$ , farà  $MR = -\frac{tydz}{zz}$ ; e finalmente, per la simi-

litu-

litudine de' triangoli  $MRm$ ,  $MFT$ , sarà  $FT = -\frac{yytdz}{zziy}$ ,

formola ricercata della sottotangente. Ma quì pure si rifletta, che differenziando l'equazione della curva, il valore di  $dy$  da sostituirsi nella formola sarà dato per  $dx$ , e  $dz$ , quindi non spariranno i differenziali; tuttavia però la similitudine de' settori  $FNQ$ ,  $FPO$  ci darà  $PO = -\frac{txdz}{zz}$ , e la similitudine de' triangoli  $Pop$ ,  $PFK$

l'analogia  $dx$ ,  $-\frac{txdz}{zz} :: x$ ,  $s$ , quindi l'equazione

$szzdx = -txxdz$ , e però  $-dz = \frac{szzdx}{txx}$ ; posto adun-

que nella formola della sottotangente il valore di  $dy$ , cavato dall'equazione differenziata della curva, indi in luogo di  $dz$  questo valore, spariranno le differenze, e si averà la sottotangente in termini finiti.

Se la linea  $AP$  in luogo di esser retta fosse una curva, condotta la tangente  $PK$ , col medesimo discorso si troverebbe lo stesso valore della sottotangente  $FT$ .

E S E M P I O.

62. La curva  $AN$  (Fig. 42.) sia un circolo, il quale passi per lo punto  $F$ , ed in tal modo posto, che conducendo dal puto  $F$  la  $FB$  normale ad  $AP$  prodotta, essa passi per lo centro  $G$  di esso circolo, e sia  
sem-

sempre  $PN$  eguale a  $PM$ , la curva  $CMD$  della Figura antecedente, cioè  $FMA$  in questa sarà la Cissoide di Diocle, la di cui equazione sarà  $z + y = 2x$ . Differenziando adunque avremo  $dz + dy = 2dx$ , e però  $dy = 2dx - dz$ , e posto in luogo di  $dy$  questo valore nella formola  $-\frac{yydz}{zzdy}$  della sottotangente, sarà

$$-\frac{yydz}{zzdx - zdz}$$

e finalmente surrogato in luogo di  $-dz$  il valore  $\frac{szdx}{txx}$ , avremo  $\frac{styy}{2txx + szz} = FT$ , sottotan-

gente ricercata.

Egli è chiaro, che se il punto  $M$ , di cui si vuole la tangente, cadesse nel punto  $A$ , essendo in questo caso  $KH$  normale ad  $FA$ , farebbe  $FN = FP = FM = FA = FK = FH$ ; e però  $FT = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}AF$ .

63. Troverassi forse più speditamente la sottotangente della Cissoide per mezzo della solita formola del num. 30.; poichè, condotte le  $NE$ ,  $ML$  perpendicolari ad  $FB$ , e chiamando  $FB = 2a$ ,  $FL = x$ ,  $LM = y$ , per la proprietà della curva  $FMA$  sarà  $BE = FL = x$ , e per la proprietà del circolo, sarà  $EN = \sqrt{2ax - xx}$ , ed i triangoli simili  $FLM$ ,  $FEN$  daranno  $FL$ ,  $LM :: FE$ ,  $EN$ , e però  $FL$ ,  $LM :: EN$ ,  $EB$ , cioè  $x$ ,  $y :: \sqrt{2ax - xx}$ ,  $x$ ; quindi  $y = \frac{xx}{\sqrt{2ax - xx}}$ , o

fia

sia  $yy = \frac{x^3}{2a-x}$ , equazione della curva  $FMA$ ; differen-

ziando adunque avremo  $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{2a-x^2}$ , e

presa la formola solita  $\frac{ydx}{dy}$ , e fatte tutte le sostituzioni,

farà  $\frac{ydx}{dy} = yy \times \frac{2a-x^2}{3axx-x^3} = LO = \frac{2ax-xx}{3a-x}$ , se si pon-

ga in luogo di  $yy$  il valore  $\frac{x^3}{2a-x}$ .

64. Sieno due curve  $ANB$ ,  $CPD$ , (Fig. 43.) ed una retta  $FK$ , ed in esse tre punti fissi  $A$ ,  $C$ ,  $F$ ; sia in oltre la curva  $EMG$  tale, che, condotta per un qualunque punto  $M$  di essa la retta  $FMN$  dal dato punto  $F$ , e dal punto  $M$  la retta  $MP$  parallela ad  $FK$ , la relazione dell'arco  $AN$  all'arco  $CP$  venga espressa da un'equazione qualunque. Si dimanda la tangente della curva  $EG$  nel punto  $M$ .

Sia  $MT$  la ricercata tangente, che incontri in  $T$  la retta  $FK$  prodotta, se fa bisogno, e dal punto  $T$  si tiri  $TH$  parallela ad  $FM$ , e per lo punto  $M$  si conducano  $MRK$  parallela alla tangente in  $P$ , ed  $MOH$  parallela alla tangente in  $N$ , e sia  $FmOn$  infinitamente prossima ad  $FN$ . Chiamate  $FM=s$ ,  $FN=t$ ,  $MK=u$ , e gli archi  $AN=y$ ,  $CP=x$ , e però  $Nn=dy$ ,  $Pp=dx$ , farà per i triangoli simili  $FNn$ ,  $FMO$ ,  $FN$ ,  $Nn :: FM$ ,  
MO,

$MO$ , cioè  $t$ ,  $dy :: s$ ,  $MO = \frac{sdy}{t}$ , e per i triangoli si-

mili  $MmR$ ,  $MTK$ ; ed  $MOm$ ,  $MHT$ , farà  $MR$ ,  
 $Mm :: MK$ ,  $MT$ ; ed  $Mm$ ,  $MO :: MT$ ,  $MH$ ; dunque  
 farà anche  $MR$ ,  $MO :: MK$ ,  $MH$ , cioè  $dx$ ,  $\frac{sdy}{t} :: u$ ,

$MH = \frac{usdy}{tdx}$ . Quindi differenziando l'equazione data,

averemo il valore di  $dy$  dato per  $dx$ , e fatta la sostituzione, farà  $MH$  espressa in termini finiti. Presa adunque  $MH$  eguale al ritrovato valore, e parallela alla tangente in  $N$  della curva  $ANB$ , e condotta  $HT$  parallela ad  $MF$ , se dal punto  $M$  si tirerà al punto  $T$  la retta  $TM$ , farà essa tangente nel punto  $M$  della curva  $EMG$ .

### E S E M P I O .

65. La curva  $ANB$  (Fig. 44.) sia un quarto di circolo, il di cui centro  $F$ , e  $CPD$  della Fig. 43. sia il raggio  $APF$  della Fig. 44. perpendicolare alla retta  $FKTB$ , e si conduca la tangente  $AR$ . S'intenda aggirarsi equabilmente il raggio  $FA$  intorno al centro  $F$ , e nello stesso tempo muoversi equabilmente la tangente  $AR$  sempre parallela a se stessa verso  $FB$  in modo, che quando il raggio  $FA$  cade in  $FB$ , cada pure in  $FB$  la tangente  $AR$ . Con questo moto il punto  $M$ , che è la intersecazione del raggio, e della tangente, descriverà la curva  $AMG$ , che chiamasi la *Quadratrice di Dinostrate*.  
 Dalla

Dalla generazione di questa curva è chiaro, che farà l'arco  $AN$  all'intercetta  $AP$ , come il quadrante  $AB$  al raggio  $AF$ ; chiamando adunque  $AN = y$ ,  $AP = x$ ,  $AB = a$ ,  $AF = r$ , farà  $ry = ax$ , e  $dy = \frac{adx}{r}$ ,

dunque sostituendo questo valore di  $dy$  nella formola  $\frac{tdy}{tdx}$ ,

farà  $MH = \frac{asu}{r}$ ; ma in questo caso  $FN$  è il raggio del

circolo, ed  $MK = AF - AP$ , dunque  $t = r$ ,  $u = r - x$ , quindi  $MH = \frac{asr - asx}{r} = \frac{as - sy}{r}$ , posto in luogo di

$ax$  il valore  $ry$  dato dall'equazione. Dal punto  $M$  si alzi  $MH$  normale ad  $FM$ , ed eguale all'arco  $MQ$  descritto col centro  $F$ , raggio  $FM$ , e si tiri  $HT$  parallela ad  $FM$ , farà  $MT$  tangente della quadratrice nel punto  $M$ ; imperocchè, per i settori simili  $FNB$ ,  $FMQ$ , farà  $FN$ ,  $NB :: FM$ ,  $MQ$ , cioè  $r$ ,  $a - y :: s$ ,  $MQ = \frac{as - sy}{r} =$

$MH$ .

66. Sieno due curve  $BN$ ,  $FQ$ , (Fig. 45.) delle quali si sappiano condurre le tangenti, e che abbiano per asse comune la retta  $BA$ , in cui sieno due punti fissi  $A$ ,  $E$ , e sia un'altra curva  $LM$  tale, che condotta per un qualunque punto  $M$  di essa la retta  $AMN$ ; e descritto col centro  $A$ , raggio  $AM$ , l'arco  $MG$ ; e dal punto  $G$  abbassata  $GQ$  normale ad  $AG$ , sia data la re-



lazione de' spazj  $ANB$ ,  $EFQG$ , e delle linee  $AM$ ,  $AN$ ,  $QG$  per mezzo di un'equazione qualunque. Si ricerca la tangente della curva  $LM$  nel punto  $M$ .

Condotta la retta  $ATH$  perpendicolare ad  $AMN$ , sia un'altra  $Amn$  infinitamente prossima ad  $AMN$ , e l'arco  $(mg)$ , e la perpendicolare  $(gq)$ , quindi col centro  $A$  descritto l'archetto  $NS$ , si chiamino le sottotangenti date  $HA=a$ ,  $GK=b$ , e sia  $AM=y$ ,  $AN=z$ ,  $GQ=u$ , e gli spazj  $EGQF=s$ ,  $ANB=t$ , farà  $Rm=Gg=dy$ ,  $Sn=dz$ , ed a cagione de' triangoli simili  $KGQ$ ,  $Qog$ , farà  $(og) = -du = \frac{udy}{b}$ , e per i triangoli simili  $HAN$ ,

$NSn$ , farà  $SN = \frac{adz}{z}$ . Lo spazio  $GQgg$  si può pren-

dere per lo spazio  $GQog$ , perchè la differenza loro  $Qog$  è quantità infinitesima del secondo ordine, onde farà  $GQgg = udy = -ds$ ; così pure farà  $ANn = \frac{1}{2} AN \times NS = \frac{1}{2} adz = -dt$ . Sostituiti per tanto nella differenza dell'equazione proposta, in luogo di  $du$ ,  $ds$ ,  $dt$ , questi valori, avremo un'equazione, da cui si caverà il valore di  $dz$  dato per  $dy$ . Ora per i settori simili  $ARM$ ,  $ANS$ , farà  $MR = \frac{aydz}{zz}$ , e per i

triangoli simili  $mRM$ ,  $MAT$ , farà  $AT = \frac{ayydz}{zzdy}$ , for-

mola della sottotangente, in cui se si sostituirà, in luogo di  $dz$ , il valore dato per  $dy$  dall'equazione della

curva,

curva, spariranno le differenze, e la sottotangente sarà data in termini finiti.

## E S E M P I O .

67. Lo spazio  $EGQF$  sia doppio di  $ABN$ , cioè  $s = 2t$ , farà  $ds = 2dt$ , ma  $ds = -udy$ , e  $dt = -\frac{1}{2}adz$ , dunque farà  $udy = adz$ , e  $dz = \frac{u.y}{a}$ , dunque la sottotangente  $AT = \frac{uyy}{zz}$ .

La curva  $BN$  sia un circolo del centro  $A$ , raggio  $AN = c$ , quindi  $z = c$ , e la curva  $FQ$  sia un'iperbola dell'equazione  $uy = ff$ , farà la sottotangente  $AT = \frac{ffy}{cc}$ ,

cioè la ragione di  $AM$  ad  $AT$  costante. La curva  $LM$  (*Fig. 46.*) chiamasi in questo caso la *Logaritmica spirale*.

E' chiaro, che la curva  $LM$  farà infiniti giri prima di giungere nel punto  $A$ ; imperocchè quando il punto  $G$  (*Fig. 45.*) arriva in  $A$ , lo spazio  $s$  farà infinito, come vedrassi nel calcolo integrale, dunque dovrà essere infinito anche lo spazio  $t$ , che non può esserlo, se non dopo infiniti giri del raggio  $AM$ .

68. Rimane per ultimo da considerarsi un caso particolare delle tangenti. Si è veduto, che essendo le coordinate di una curva qualunque  $x$ , ed  $y$ , la formola generale della sottotangente è  $\frac{ydx}{dy}$ , o  $\frac{xdy}{dx}$ , secon-

do

do che la  $y$ , o la  $x$  fa figura di ordinata ; e però, differenziata l'equazione della curva, se da essa si ricavi il valore della  $dx$ , o della  $dy$ , questo valore surrogato nella formola generale ci somministra una frazione in termini tutti finiti, la quale è l'espressione, o valore della sottotangente per un qualunque punto della proposta curva. Che se si vuole la sottotangente per un determinato punto della curva, niente altro si deve fare, che sostituire nella frazione in luogo delle  $x$ , ed  $y$  i valori, che esse hanno nel dato punto. Ma accade alcuna volta, che sostituendo in luogo di  $x$ , o di  $y$  un determinato valore nella frazione, che esprime la sottotangente, o sia nel rapporto della  $dx$  alla  $dy$  cavato dall'equazione differenziata della curva, tutti i termini nel numeratore, e denominatore di esso svaniscano, e così ne provenga  $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ , e però anco la sottotangente  $= \frac{0}{0}$ , dal che però non si deve inferire, che essa

sia nulla in quel punto.

Sia per un'esempio la curva

$$y^4 - 8ay^3 - 12axy^2 + 16a^2yy + 48aaxy + 4aaxx - 64a^3x = 0,$$

e sia  $y$  l'assisa,  $x$  l'ordinata, e però  $\frac{xdy}{dx}$  la formola

della sottotangente. Differenziando adunque l'equazione, avremo  $\frac{dy}{dx} = \frac{3ayy - 12aay - 2aax + 16a^2}{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax}$ , e la sot-

totan-

$$\text{totangente } \frac{xdy}{dx} = \frac{3axy^2 - 12aaxy - 2aaxx + 16a^3x}{y^3 - 6ayy - 6axy + 8ay + 12aax}$$

ma se si vuole la sottotangente di quel punto di curva, a cui corrisponde l'assissa  $y=2a$ , essendo in questo caso, per la data equazione, anche  $x=2a$ , fatte le sostituzioni nella frazione, che esprime il rapporto della  $dx$  alla  $dy$ , si trova egli essere  $\frac{12a^3 - 24a^3 - 4a^3 + 16a^3}{8a^3 - 24a^3 - 24a^3 + 16a^3 + 24a^3}$ , cioè  $\frac{0}{0}$ , perchè tutti i termini si distruggono, e però

anco la sottotangente in quel punto  $= \frac{0}{0}$ , il che nulla ci fa sapere, quantunque allo stesso punto corrisponda benissimo la sottotangente, anzi due.

69. Accaderà infallibilmente questo caso ogni qual volta la curva abbia più rami, che s'incontrino, e si voglia la tangente nel punto del concorso; ed in fatti la curva  $NOPQR$  (Fig. 47.) dell'equazione proposta à i due rami  $OP$ ,  $MQ$ , che si tagliano nel punto  $G$ , a cui appunto corrisponde  $y=2a$ , essendo  $OT$  l'asse delle  $y$ , ed il principio in  $O$ , ed  $x=2a$ , prese le  $x$  nell'asse  $OQ$ .

Per rendere ragione di questo caso, basta avvertire due cose: la prima, che nel punto del concorso di diversi rami di curva diverse radici dell'equazione si fanno eguali tra loro; così rispetto alla proposta equazione

ne

ne nel punto  $G$  sono eguali i due valori della  $x$ , e due pure sono eguali de' quattro valori della  $y$ ; la seconda, (come si è dimostrato nell'Algebra Cartesiana) che se un'equazione, la quale contenga delle radici eguali, si moltiplicherà termine per termine con una serie aritmetica qualunque, il prodotto sarà eguale al zero, e conterrà in se una meno delle radici eguali; se questo prodotto si moltiplicherà pure per una serie aritmetica, il nuovo prodotto sarà istessamente eguale al zero, e conterrà una meno delle radici eguali, che contiene il primo prodotto, cioè due radici meno delle eguali, che contiene la prima equazione, e così successivamente fino a quel prodotto; che una sola contenga delle radici eguali.

Se adunque un'equazione qualunque di curva, trattando  $x$  per variabile, ed  $y$  per costante, si moltiplicherà per una serie aritmetica, la quale termini nel zero; nel caso di radici eguali il prodotto sarà eguale al zero, e lo sarà ancora, se si divida esso prodotto per  $x$ , la qual divisione succede dal moltiplicarsi per zero l'ultimo termine. Lo stesso farà, trattando  $y$  per variabile, ed  $x$  per costante, e moltiplicando l'equazione per tale serie aritmetica, che ponga il zero sotto l'ultimo termine.

Ciò posto, è facile a vedersi, che questa tale operazione si fa appunto differenziando, cioè si tratta la  $x$ ,  
come

come variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della  $x$ , e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in  $dx$ ; indi si tratta  $y$  per variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della  $y$ , e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in  $dy$ ; ma nel caso di radici eguali di  $x$ , e di radici eguali di  $y$ , tanto il prodotto, che moltiplica  $dx$ , quanto quello, che moltiplica  $dy$ , sono zero; dunque appunto deve nascere la ragione di  $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$  in quel punto, nel quale

due rami di curva s'incontrano.

Per vedere ciò chiaramente, ordino l'equazione della proposta curva per la lettera  $y$ , e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine sia zero.

$$y^4 - 8ay^3 + 12axy^2 + 48a^2xy + 4a^3xx - 16a^2yy - 64a^3x = 0,$$

4,    3,    2,    1,    0.

il prodotto sarà

$$4y^4 - 24xy^3 - 24axy^2 + 32a^2yy + 48a^3xy = 0,$$

cioè dividendo per  $4y$

$$y^3 - 6axy - 6axy + 8ay + 12a^2x = 0.$$

Ordino la stessa equazione per la lettera  $x$ , e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine

sia zero

$$\begin{array}{r} 4aaxx + 48aaxy + y^4 \\ - 64a^3x - 8ay^3 \\ - 12aayx + 16aayy \\ \hline 2, \quad 1, \quad 0 \end{array} = 0,$$

il prodotto farà

$$8aaxx + 48aaxy - 64a^3x - 12aayx = 0,$$

cioè dividendo per  $4x$

$$2aax + 12aay - 16a^3 - 3aay = 0.$$

Ciò fatto, differenzio l'equazione proposta, ed il differenziale si è  $4y^3 dy - 24aaydy - 24axydy - 12aaydx + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 8aaxdx - 64a^3 dx = 0$ , cioè dividendo per 4, e trasportando i termini della  $dx$

$$\frac{y^3 - 6aay - 6axy + 8aay + 12aax \times dy =}{3aay - 12aay - 2aax + 16a^3 \times dx} =$$

Ma il moltiplicatore della  $dy$  è il primo prodotto nella serie aritmetica, ed in conseguenza  $= 0$  relativamente al punto  $G$ , in cui  $y$  à due valori eguali; ed il moltiplicatore della  $dx$  è il secondo prodotto nella sua serie aritmetica, mutati i segni, il che però non fa, che non sia  $= 0$  relativamente allo stesso punto  $G$ , in cui  $x$  à due valori eguali, dunque farà  $dy \times 0 = dx \times 0$ , cioè  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$  nel punto  $G$ .

Ma se il moltiplicare qualunque equazione per una serie aritmetica, o sia il differenziarla (giacchè è lo stesso) fa,

fa , che nel supposto di radici eguali nasca il caso , di cui si tratta , cioè  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ , fa ancora , che nell' equazione

indivisa vi sia una meno delle radici eguali , e però se l'equazione proposta à due radici eguali , la differenziata ne avrà una sola di esse eguali ; se la proposta ne avrà tre , differenziando di nuovo la già differenziata , ( assumendo per costanti le flussioni  $dx$  ,  $dy$  ) quella , che indivisa nasce , ne avrà una sola , e così di mano in mano discorrendo . Si assumono poi per costanti le flussioni  $dx$  ,  $dy$  , perchè distruggendosi vicendevolmente tanto i termini moltiplicati in  $dx$  , quanto quelli moltiplicati in  $dy$  , nella supposizione di quel tale determinato valore della  $x$  , e della  $y$  , si distruggeranno nullameno sì i termini moltiplicati in  $ddx$  , come quelli moltiplicati in  $ddy$  . In questo modo operando si ridurranno le equazioni a non contenere , che una sola di quelle molte radici eguali , che prima avevano ; e però differenziando finalmente l'ultima , per ritrarne la ragione di  $dy$  alla  $dx$  , non potrà più nascere il caso di  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ .

Ripiglio adunque l'equazione di prima

$$y^4 - 8xy^3 - 12axy^2 + 16a^2xy + 48a^3xy + 4a^4xx - 64a^5x = 0 ,$$

differenziata si trova essere

$$y^3 dy - 6ayydy - 6axydy - 3ayydx + 8aaydy + 12aaxdy + 12aaydx + 2aaxdx - 16a^3dx = 0 .$$

M 2

Ma



Ma poichè sostituendo in luogo di  $y$  il valore  $2a$ , ed il corrispondente in luogo di  $x$ , che è pure  $2a$ , a fine di avere la tangente del punto  $G$ , ritrovo  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ ,

passo a differenziare la già differenziata, prendendo sempre per costanti le flussioni  $dx$ ,  $dy$ , e ricavo  $3yydy^2 - 12aydy^2 - 6axdy^2 + 8aady^2 - 12aydydx + 24aadxdy + 2aadx^2 = 0$ .

Sostituisco in luogo di  $y$ , e di  $x$  il valore  $2a$  relativamente al punto  $G$ , e trovo  $dx = \pm dy \sqrt{8}$ , indi nella formola generale della sottotangente  $\frac{xdy}{dx}$  posti i

valori di  $x = 2a$ , e di  $dx = \pm dy \sqrt{8}$ , farà finalmente  $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$  la sottotangente, o per meglio dire, le due sot-

totangenti, che corrispondono al punto  $G$ , una positiva, l'altra negativa, ed eguale alla positiva.

Se la curva averà tre radici eguali nel punto, di cui si vuole la tangente, cioè se la curva averà tre rami, che in quel punto s'incontrino; poichè dopo averla la prima volta differenziata averà ancora due radici eguali, differenziata di nuovo, a fine di avere la ragione di  $dy$  alla  $dx$ , ci darà ciò non ostante, per quanto è stato detto,  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ , e però farà necessaria

una terza differenziazione; generalmente tante volte  
dovrà

dovrà differenziarsi l'equazione, quante sono le radici eguali, o sia i rami della curva, e dall'ultima differenza ricaverassi la ragione della  $dy$  alla  $dx$ , e tante faranno le tangenti, quanti sono i rami della curva stessa, i quali in quel punto si tagliano.

Sia la curva  $QADHAbdAI$  (Fig. 48.) dell'equazione  $x^4 - ayxx + by^3 = 0$ , la quale à i tre rami  $QAD$ ,  $IAd$ ,  $bAH$ , che si tagliano in  $A$ ; e sia  $AP$  l'asse delle  $x$ , ed  $AB$  normale ad  $AP$  l'asse delle  $y$ , ed  $A$  la comune loro origine. Differenziando l'equazione, farà  $4x^3 dx - 2ayx dx - axxdy + 3byydy = 0$ , cioè  $\frac{dx}{dy} = \frac{axx - 3byy}{4x^3 - 2ayx}$ . Ma se si voglia la tangente del punto

$A$ , poichè in esso è  $x=0$ ,  $y=0$ , farà  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ . Si

passi adunque alla seconda differenziazione, e farà  $12xxdx^2 - 2aydx^2 - 4axdx dy + 6bydy^2 = 0$ , ma di qua pure si ricava  $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ , essendo ogni termine moltiplicato per  $x=0$ , secondo la supposizione, ovvero per  $y=0$ .

Differenziando finalmente per la terza volta, farà  $24xxdx^3 - 6adydx^2 + 6bby^3 = 0$ , ma posta  $x=0$ , svanisce il primo termine, e però è  $adx^2 dy = bdy^3$ ; dal che si ricavano tre valori della  $dy$ , cioè  $dy=0$ , e  $dy = \pm \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ , i quali ci danno tre rapporti della  $dx$  alla

$dy$ ,

$dy$ , vale a dire tre tangenti per lo punto  $A$ ; una infinita, che si confonde con l'asse  $AP$ , e serve per il ramo  $baH$ . L'altre, prendendo una qualunque  $AS$ , e tirando normalmente  $ST$  tale, che sia  $ST, SA::\sqrt{a}, \sqrt{b}$ , le  $TA$  saranno tangenti nel punto  $A$ , l'una del ramo  $QAD$ , l'altra del ramo  $IAd$ .

70. La verità di questo metodo si può dimostrare anco in altra maniera, e come suol dirsi *A posteriori*. I differenziali dell'equazioni finite, che con le accennate regole del differenziare si trovano, non sono essi realmente i differenziali compiuti, dandoci le regole i soli termini, che contengono i differenziali primi, cioè di una sola dimensione, ed ommettendo in figura di compendio, e di maggior comodo i differenziali di altro grado, cioè di maggior dimensione, i quali per i principj del calcolo, già renderebbero relativamente nulli i termini, ne' quali si trovano.

Richiamata l'equazione

$$y^4 - 8ay^3 - 12axy^2 + 48aaxy + 4aaxx + 16aayy - 64a^3x = 0,$$

e differenziata, farà

$$4y^3 dy - 24ayydy - 12ayydx - 24axydy + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 8aaxdx - 64a^3 dx = 0;$$

ma se la  $y$  si consideri accresciuta della sua differenza, e così la  $x$ , e che nella proposta equazione in luogo della  $y$ , e

sue

sue potestà si ponga  $y + dy$ , e le corrispondenti potestà, e lo stesso si faccia ponendo  $x + dx$ , e le potestà corrispondenti in luogo di  $x$ , e sue potestà, averassi  $y^4 + 4y^3 dy + 6yydy^2 + 4ydy^3 + dy^4 - 8ay^3 - 24ayydy - 24aydy^2 - 8ady^3 - 12axy - 24axydy - 12axy^2 - 12ayydx - 24aydxdy - 12adxdy^2 + 16aay + 32aaydy + 16aady^2 + 48aaxy + 48aaydx + 48aaxydy + 48aadxxy + 4aaxx + 8aaxdx + 4aadx^2 - 64a^3 x - 64a^3 dx = 0$ , ed ordinando i termini in colonne secondo le dimensioni de' differenziali

I.	II.	III.	IV.	V.
+	+	+	+	+
$y^4$	$4y^3 dy$	$6yydy^2$	$4ydy^3$	$dy^4$
-	-	-	-	
$8ay^3$	$24ayydy$	$24aydy^2$	$8ady^3$	
-	-	-	-	
$12axy$	$24axydy$	$12axy^2$	$12adxdy^2$	
+	-	-		= 0.
$16aayy$	$12ayydx$	$24aydxdy$		
+	+	+		
$48aayy$	$32aaydy$	$16aady^2$		
+	+	+		
$4aaxx$	$48aaydx$	$48aadxxy$		
-	+	+		
$64a^3 x$	$48aaxdy$	$4aadx^2$		
	+			
	$8aaxdx$			
	-			
	$64a^3 dx$			

La somma per tanto di tutte queste colonne, tolto-  
ne la prima, che è l'equazione stessa proposta, farà il  
compiuto, ed intero differenziale di lei. Ma perchè  
l'ultima termine, cioè la colonna quinta è infinitamen-  
te piccola rispetto alla quarta, e la quarta rispetto alla  
terza,

terza, e la terza rispetto alla seconda, si assume la seconda colonna per il differenziale della proposta equazione, il quale compendio ci vien dato dalla solita regola del differenziare; ma non è già, che le colonne dopo la seconda sieno assolutamente nulle. Se adunque nascerà il caso, che la seconda colonna sia assolutamente nulla, non sarà più nulla rispetto a lei la terza, e però non dovrà trascurarsi, anzi farà essa il differenziale della prima. Itteffamente si discorra della quarta, quando sia zero la seconda, e la terza, e così de l'altre. Ora questo caso appunto succede, quando si cerca la relazione di  $dx$  alla  $dy$  nella proposta equazione in quel punto, in cui sia  $y = 2a$ , ed  $x = 2a$ ; poichè, fatte queste sostituzioni, si trova essa seconda colonna esser zero, e però si passa a far uso della terza, il che è affatto la stessa cosa, che differenziare due volte l'equazione, come è manifesto.

71. Per gli stessi principj, e nella stessa maniera si scioglie un simil caso, che nasce talora nella costruzione delle curve, se l'ordinata venga espressa da una frazione, il di cui denominatore, e numeratore divengano eguali al zero, quando si fissi per l'assisa un determinato valore.

A fine d'uscir d'imbarazzo basta considerare la frazione, come se esprimesse le ordinate di due curve, che in qualche punto del loro comune asse concorrano,

c

e perchè in quel punto la ragione loro non può in altro modo esser espressa, che per  $\frac{0}{0}$ , bisogna cercare,

quale sia il loro rapporto nel punto infinitamente prossimo, cioè quando esse sieno cresciute d'un'infinitesimo, vale a dire, passare alla differenziazione del numeratore, poi del denominatore della frazione stessa, e ciò una, due, o più volte fin tanto, che finalmente, posto il valore determinato dell'assisa nella frazione, essa non sia più  $\frac{0}{0}$ , e ciò per quella stessa ragione

detta di sopra intorno alle colonne de' differenziali.

Sia l'equazione  $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt{aax}}{a - \sqrt{ax^3}}$ . Presa

$$x = a, \text{ e fatta la sostituzione, farà } y = \frac{0}{0},$$

dal che non

si può perciò inferire, che all'assisa  $x = a$  corrisponda l'ordinata  $y = 0$ . Differenziando adunque il numeratore, indi il denominatore della frazione, farà  $y =$

$$\frac{a^3 dx - 2x^3 dx \times \frac{-\frac{1}{2}}{2a^3x - x^4} - \frac{1}{3} a^3 dx \times a^{-\frac{4}{3}} x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4} ax dx \times a^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{9}{4}}}$$

cioè dividendo sopra, e sotto per  $dx$ , e ponendo  $x = a$ , farà  $y = \frac{16a}{9}$ .

Sia l'equazione  $y = a \frac{\sqrt{4a^3 + 4x^3} - ax - aa}{\sqrt{2aa + 2xx} - x - a}$ , e

si faccia  $x = a$ , farà  $y = \frac{0}{0}$ .

Differenziando per tanto il numeratore, poi il denominatore della frazione, farà  $y = \frac{4axx \times \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{4a^3 + 4x^3}} - a}{2x \times \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2aa + 2xx}} - 1}$ .

ommettendo la  $dx$ , che è tanto nel numeratore, quanto nel denominatore; ma se in questa frazione pure si ponga  $x = a$ , farà ancora  $y = \frac{0}{0}$ , dunque passando a

differenziare questa seconda frazione, avremo  $y =$

$\frac{32a^4x \times \frac{-\frac{5}{3}}{\sqrt{4a^3 + 4x^3}}}{4aa \times \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2aa + 2xx}}}$ , ommettendo la  $dx$ , e posta

$x = a$ , farà  $y = 2a$ .



CAPO

## C A P O I I I.

*Del Metodo de' Massimi , e Minimi .*

72. **S**E in una curva qualunque , le di cui ordinate sieno parallele , crescendo le assisse  $BC$  ( *Fig. 49. 50. 51. , e 52.*  ) continovamente , cresca altresì l'ordinata  $CG$  sino ad un certo punto  $E$  dopo di cui vada calandó , o non vi sia più ordinata di forza alcuna ; o pure al contrario crescendo l'assissa , l'ordinata  $CG$  vada continovamente calando sino ad un certo punto  $E$  , dopo di cui , o cresca , o più non vi sia ; l'ordinata  $EF$  si chiama la *Massima* , o la *Minima* .

Alla curva  $GHF$  sia  $EF$  la massima delle ordinate ( *Fig. 49.* ) , o la minima ( *Fig. 50.* ) ; presa una qualunque assissa  $BC$  , e condotta l'ordinata  $CG$  , al punto  $G$  s'intenda essere tangente  $GA$  , e  $DH$  infinitamente prossima a  $CG$  ; chiamata  $BC = x$  ,  $CG = y$  , e fatta  $GI$  parallela a  $BC$  , sarà  $GI = CD = dx$  ,  $IH = dy$  . Poichè sono simili i triangoli  $ACG$  ,  $GHI$  nella *Fig. 49.* , sarà  $AC$  ,  $CG :: GI$  ,  $IH$  ; e poichè sono simili i triangoli  $ATG$  ,  $GHI$  nella *Fig. 50.* , sarà  $AT$  ,  $TG :: GI$  ,  $IH$  . Ciò posto , si finga che l'ordinata  $GC$  s'accosti sempre parallela a se stessa alla massima , o mi-



nima ordinata  $EF$ ; egli è chiaro, che accostandosi  $CG$  ad  $EF$ , la sottotangente  $AC$ , o  $AT$  si farà sempre maggiore per modo, che quando  $CG$  cada sopra la  $EF$ , la tangente si farà parallela a  $BC$ , e per conseguenza la sottotangente sarà infinita. In questo caso adunque avrà  $AC$  a  $CG$ , o  $AT$  a  $TG$  ragione infinita, rimanendo  $CG$  quantità finita; ma poichè è sempre  $AC, CG, o AT, TG :: GI, IH$ , averà anco  $GI$  ad  $IH$  ragione infinita, e però farà  $dy$  nulla rispetto alla  $dx$ , cioè  $dy = 0$  nel punto della massima, o minima ordinata.

Sia la curva  $GHF$ , (*Fig. 51., e 52.*)  $EF$  la minima delle ordinate (*Fig. 51.*), o la massima (*Fig. 52.*); presa pure una qualunque asissa  $BC$ , e condotta l'ordinata  $CG$ , la tangente  $GA$ ,  $DH$  infinitamente prossima a  $CG$ , e  $GI$  parallela a  $BC$ , e chiamate  $BC = x$ ,  $CG = y$ , sarà  $GI = CD = dx$ ,  $IH = dy$ . Per i triangoli simili  $ACG, GIH$ , sarà (*Fig. 51.*)  $AC, CG :: GI, IH$ ; e per i triangoli simili  $ATG, GIH$ , (*Fig. 52.*) sarà  $AT, TG :: GI, IH$ . Accostandosi adunque l'ordinata  $CG$  sempre parallela a se stessa alla massima, o minima ordinata, la sottotangente  $AC$ , o  $AT$  si farà sempre minore per modo, che quando  $CG$  cada sopra la  $EF$ , la tangente si farà normale a  $BC$ , e per conseguenza nulla la sottotangente. In questo caso adunque averà  $AC$  a  $CG$ , o  $AT$  a  $TG$  la ragione del nulla alla

alla quantità finita , e però essendo nella stessa ragione  $GI$  ad  $IH$  , farà  $dx$  nulla rispetto alla  $dy$  , cioè  $dy = \infty$  nel punto della massima , o minima ordinata . Adunque la formola generale per le massime , e minime ordinate farà  $dy = 0$  , o pure  $dy = \infty$  .

73. Data adunque l'equazione della curva , di cui si cerca la massima , o la minima ordinata , si dovrà differenziare , per ritrarne il valore della frazione , o rapporto  $\frac{dy}{dx}$  , indi fatta la supposizione di  $dy = 0$  , o pure

di  $dx = 0$  , cioè di  $dy = \infty$  , si averà il valore dell'assissa  $x$  , a cui compete la massima o minima  $y$  , e questo valore sostituito nell'equazione proposta ci darà la massima , o minima ordinata , che si cerca ; solo avvertendo , che nel caso della supposizione di  $dy = \infty$  , cioè di  $dx = 0$  , la  $x$  farà figura di ordinata , se nell'altra supposizione la faceva la  $y$  . Che se nè la prima supposizione di  $dy = 0$  , nè la seconda di  $dy = \infty$  ci fornirà valore alcuno reale della  $y$  , si dovrà concludere , che la proposta curva non à nè massimi , nè minimi .

74. Serve questo metodo per avere una compiuta , ed esatta idea delle curve ; per ricavare , in quali punti le tangenti sieno parallele agl'assi conjugati ec. Ma oltre ciò si applica ad infinite questioni , che in tale proposito possono farsi sì geometriche , come fisiche ; tale sarebbe il ricercare fra gl'infiniti parallelepipedo di una  
data

data solidità, quale sia quello, che abbia la minima superficie; siccome il ricercare tra le infinite vie, che può tenere un mobile, per giugnere da un punto all'altro non posto nella medesima verticale, quale sia quella, che farà trascorsa nel minimo tempo con una data legge di moto, ed altre simili. In tali questioni ritrovata l'espressione analitica di ciò, che si vuole essere un massimo, o un minimo, si ponga eguale ad  $y$ , e fatta la differenziazione, si proceda avanti con le date regole.

## E S E M P I O I.

75. Sia la curva dell'equazione  $zax - xx = yy$ , e si voglia sapere, a quale punto dell'asse dell'assisse  $x$  corrisponda la massima ordinata  $y$ , e cosa ella sia.

Differenziata l'equazione, farà  $zadx - 2xdx = 2ydy$ , cioè  $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$ . Facendo la supposizione di  $dy = 0$ ,

dovrà essere zero il numeratore della frazione, e però farà  $a - x = 0$ , onde  $x = a$ ; adunque la massima ordinata corrisponde a quell'assissa, che sia eguale ad  $a$ ; sostituito questo valore in luogo di  $x$  nella proposta equazione, farà  $zaa - aa = yy$ , cioè  $y = \pm a$ ; la massima ordinata adunque positiva, e negativa è eguale ad  $a$ . Facendo la supposizione di  $dy = \infty$ , dovrà essere zero il denominatore della frazione, e però farà  $y = 0$ ,  
sosti-

sostituito per tanto questo valore in luogo di  $y$  nella proposta equazione, avremo  $x=0$ , ed  $x=2a$ ; vale a dire, che  $x=0$  farà la minima, ed  $x=2a$  la massima; o più propriamente, che quando sia  $x=0$ , ed  $x=2a$ , essendo infinita la  $dy$  rispetto alla  $dx$ , la sottotangente sarà nulla, cioè la tangente parallela alle ordinate  $y$ .

## ESEMPIO II.

76. Sia la curva dell'equazione  $xx - ax = yy$ . Differenziando sarà  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - a}{2y}$ . La supposizione di

$dy = 0$  ci dà  $x = \frac{a}{2}$ , ma sostituito questo valore in luogo

di  $x$  nella proposta equazione, la  $y$  si trova immaginaria, dunque la curva non à ordinata, che a tale assissa corrisponda, e però molto meno averà massima o minima. La supposizione di  $dy = \infty$ , cioè di  $dx = 0$  ci dà  $y = 0$ , vale a dire, che la tangente sarà perpendicolare all'asse dell'assisse  $x$  nel punto, in cui è  $y = 0$ , il quale corrisponde alle due assisse  $x = 0$ , ed  $x = a$ , poichè sostituito in luogo di  $y$  il zero nella proposta equazione, sarà  $xx - ax = 0$ , e però  $x = 0$ , ed  $x = a$ .

ESEM-

## ESEMPIO III.

77. Sia la curva dell'equazione  $2axy = a^3 + axx - bxx$ , in cui le  $x$  sono le assisse,  $y$  le ordinate. Differenziando farà  $2axdy + 2aydx = 2axdx - 2bx dx$ , e però  $\frac{dy}{dx} = \frac{ax - bx - ay}{ax}$ . La supposizione di  $dy = 0$  ci dà  $x = \frac{ay}{a-b}$ , e sostituito questo valore nell'equazione pro-

posta, farà  $\frac{2aayy}{a-b} = a^3 + \frac{a^3yy - aabyy}{a-b}$ , cioè  $yy = a \times \sqrt{a-b}$ ,

ed  $y = \pm \sqrt{aa - ab}$ , massima, o minima ordinata. E poichè abbiamo  $x = \frac{ay}{a-b}$ , fatta la sostituzione del valo-

re della  $y$ , farà  $x = \pm \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$ , assissa, a cui corrispon-

de la ritrovata massima, o minima ordinata. La supposizione di  $dy = \infty$ , o sia di  $dx = 0$  ci dà  $ax = 0$ , cioè  $x = 0$ , e fatta la sostituzione nella proposta equazione, farà  $a^3 = 0$ , ma implica, che una quantità data finita sia zero, adunque la curva non averà altri massimi, o minimi dai ritrovati nella prima supposizione, i quali per l'ambiguità de' segni sono due, ed eguali; uno positivo, che corrisponde alla assissa positiva, l'altro negativo, che corrisponde alla assissa negativa.

78.

78. Ci dà il metodo confusamente i massimi, e minimi; nè in forza di esso si possono distinguere gl'uni dagl'altri, si riconoscono però quando sia noto l'andamento della curva; ma senza tale notizia si può procedere così. Si assegni all'assisa nell'equazione data un valore per poco maggiore, o minore di quello, che corrisponde alla massima, o minima ordinata, di cui si tratta, ed il valore dell'ordinata, che indi nasce, scioglierà il quesito; poichè se farà maggiore di quello somministratoci dal metodo, la questione farà de' minimi; ed all'opposto essendo, farà de' massimi. La curva adunque di quest'esempio avrà due minimi.

E S E M P I O I V.

79. Sia la curva *MADEAN* (Fig. 53.) dell'equazione  $x^3 + y^3 = axy$ ,  $AB = x$ ,  $BE = y$ . Differenziando si averà  $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - 3xx}{3yy - ax}$ , e però facendo la supposizione di  $dy = 0$ , farà  $y = \frac{3xx}{a}$ , e fatta la sostituzione di questo valore nella data equazione, si trova  $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$ , quindi poichè  $y = \frac{3xx}{a}$ , farà  $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4} = BE$  la massima ordinata nella curva, la quale corrisponde all'assisa

fa  $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2} = AB$ . La supposizione di  $dx = 0$  ci darà  $x = \frac{3yy}{a}$ , e fatta la sostituzione nell'equazione data, farà  $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$ , quindi  $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4}$  la massima  $AC$ , cui corrisponde  $y = CD = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$ , che è tangente nel punto  $D$ .

80. Ma prima di passare più avanti con gl'esempj, è necessario prevenire un caso, che suole alcuna volta succedere, ed è che tanto la supposizione di  $dy = 0$ , quanto quella di  $dy = \infty$  ci fornisca un medesimo valore dell'ordinata, o dell'assisa, ed in tale caso non si determina alcun massimo o minimo, ma bensì un punto di intersecazione, o d'incontro di due rami della curva. E la ragione è evidente, imperciocchè essendo  $\frac{dy}{dx}$  eguale ad una frazione, se dal numeratore si ricava lo stesso valore della  $x$ , per esempio, che si ricava dal denominatore, questo valore, o radice sostituita renderà nullo l'uno e l'altro, e però in quel tal punto di curva farà  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ , ma si è veduto di sopra al num. 69., che  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$  indica sempre incontro di due rami di curva, adunque ec.

ESEM-

ESEMPIO V.

81. Sia la curva  $GFM$  (Fig. 51.) la Parabola cubica dell'equazione  $y - a = \sqrt[3]{a^3 - 2aax + ax^2}$ ,  $BE = EF = a$ ,  $BC = x$ ,  $CG = y$ . Differenziando farà  $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{2ax - 2aa}{3 \times \sqrt[3]{a^3 - 2aax + ax^2}}$$

. La supposizione di  $dy = 0$  ci dà  $x = a$ ; la supposizione di  $dy = \infty$  ci dà parimenti  $x = a$ , adunque la curva ha un punto d'incontro  $F$ , che corrisponde all'assisa  $x = a$ , ed alla minima ordinata  $y = a$ , che si cava dalla proposta equazione, sostituito in luogo di  $x$  il suo valore.

Sia la stessa equazione, ma libera da radicali, cioè  $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + ax^2$ ; differenziando farà  $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa}$ . La supposizione di  $dy = 0$

ci dà  $x = a$ , e posto questo valore nella proposta equazione, si ricava  $y = a$ . La supposizione di  $dy = \infty$  ci dà pure  $y = a$ , adunque  $x = a$ , ed  $y = a$  ci danno il punto  $F$ , che è un punto d'incontro, o contatto de' due rami  $GF$ ,  $FM$ , e nello stesso tempo la minima  $y$ .

Ma se opereremo sopra l'equazione  $y - a = \sqrt[3]{a^3 - 2aax + ax^2}$ ,

O 2

che



che esprime il solo ramo  $GF$  ( $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{x - a}$ )  
 esprimerrebbe l'altro ramo  $FM$ ) avremo  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3 \times \sqrt[3]{a - x}}$

La supposizione di  $dy = 0$  nulla ci fa sapere; la supposizione di  $dy = \infty$  ci dà  $x = a$ , e però  $y = a$ , ed il punto  $F$  in questo caso ci fornisce un massimo rispetto alla  $x$ , ed un minimo rispetto alla  $y$ .

82. Dissi, che la supposizione di  $dy = 0$ , che ci dà  $2a^{\frac{1}{3}} = 0$  nulla ci fa sapere, intendendo rispetto ai massimi finiti, perchè comprendendo anco gl'infiniti, ella ce ne somministra due. Se  $2a^{\frac{1}{3}} = 0$ , farà dunque  $a = 0$ , e sostituito questo valore, nella proposta equazione, farà essa  $\frac{y}{0} = \sqrt[3]{xx}$ , cioè  $x = \pm \sqrt{\frac{y^3}{0}}$ , e però  $x$ , ed  $y$  infinite. Due sono i massimi, servendo uno al ramo  $FG$ , l'altro al ramo  $FM$ , poichè posta  $a = 0$ , l'equazione ambedue gli esprime.

Nascerà generalmente questo caso ogni qual volta la supposizione di  $dy = 0$ , o di  $dy = \infty$  ci dia un'espressione finita costante, o un divisore costante eguale al zero, il qual valore sostituito nell'equazione proposta non porti o immaginario, o contraddizione; e la ragione

ne si è, che una quantità finita non può essere presa per zero, se non rispetto a quantità infinita.

## E S E M P I O VI.

83. Sia la curva (Fig. 54.) dell'equazione  $x^4 - 2ax^3 + aaxx = y^4$ ,  $AB = a$ ;  $AC$ , o  $AP = x$ ;  $CM$ , o  $PM = y$ ; differenziando sarà  $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6axx + 2aax}{4y^3}$ .

La supposizione di  $dy = 0$  ci dà tre valori di  $x$ , cioè  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = \frac{1}{2}a$ ; il valore  $x = 0$  sostituito nella proposta equazione rende  $y = 0$ , il valore  $x = a$  rende  $y = 0$ , il valore  $x = \frac{1}{2}a$  rende  $y = \pm \frac{a}{2}$ . La supposi-

zione di  $dy = \infty$  ci dà  $y = 0$ , adunque la  $y$  â il medesimo valore nell'una, e nell'altra supposizione, quando sia  $x = 0$ , ed  $x = a$ , quindi i punti  $A$ ,  $B$  saranno punti d'incontro de' rami della curva, ed  $x = \frac{1}{2}a = AC$  darà la massima ordinata  $y = \pm \frac{1}{2}a = CM$ , o  $Cm$ . Il luogo del sopra posto esempio può chiamarsi luogo doppio, il quale nasce dall'esserealzata al quadrato l'una, o l'altra delle due semplici formole  $ax - xx = yy$ , al circolo, o pure  $xx - ax = yy$ , all'iperbola. Quindi non sarebbe bastato il ridurre l'equazione al semplice circolo, o alla semplice iperbola, ma era necessario aver mira alla complicazione delle dette curve fra loro.

ESEM-

## ESEMPIO VII.

84. Sia la curva della Fig. 55., la di cui equazione  $yy = \frac{aax - 2axx + x^3}{2a - x}$ ,  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $AD = 2a$ .

Differenziando farà  $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{y \times 2a - x}$ , cioè

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{a - x \sqrt{x} \times 2a - x^{\frac{3}{2}}}$$

ti offervo, che tanto il numeratore della frazione, quanto il denominatore è divisibile per  $a - x$ ; adunque, e nella supposizione di  $dy = 0$ , e in quella di  $dy = \infty$  si averà  $a - x = 0$ , cioè  $x = a$ , che sostituito ci dà  $y = 0$ , e però la curva avrà un nodo nell'asse al punto B, fatta  $AB = a$ . Fatta per tanto la divisione, farà  $\frac{dy}{dx} = \frac{aa - 3ax + xx}{2a - x \sqrt{2ax - xx}}$ . La supposizione di

$dy = 0$  ci dà  $x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$ ; il valore  $x = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}$

non serve, perchè sostituito nell'equazione proposta rende immaginaria la ordinata, la quale è generalmente immaginaria, qualora si assuma  $x$  maggiore di  $2a$ , come manifestamente si vede. Sostituito perciò l'altro

valore

valore  $x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$ , ci dà  $y = \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$ .

Fatta adunque  $AP = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$ , faranno  $PM$ ,  $PM$  le massime ordinate, positiva l'una, e negativa l'altra, ed  $= \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$ .

La supposizione di  $dy = \infty$  ci dà  $x = 0$ , ed  $x = 2a$ ; sostituiti quelli valori nell'equazione proposta, si averà  $y = 0$ , ed  $y = \infty$ ; vale a dire, che presa  $x = 0$ , cioè nel punto  $A$ , la tangente farà parallela alle ordinate  $PM$ , e presa  $x = 2a = AD$ , la ordinata farà infinita, cioè asintoto della curva rispetto ai rami  $BH$ ,  $BI$ .

E S E M P I O V I I I.

85. Sia la Concoide dell'equazione  $yy = \frac{aa\cancel{xx} - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bb\cancel{xx} + aabb}{xx}$ . Differenziando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - bx^3 - aabx - aabb}{\pm xx \sqrt{aa\cancel{xx} - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bb\cancel{xx} + aabb}}$$

Nel primo Libro al num. 239. sono stati da me considerati tre casi di questa curva; il primo quando sia  $a = b$ ; il secondo quando sia  $b$  minore di  $a$ ; ed il terzo quando  $b$  sia maggiore di  $a$ .

Rispetto al primo caso: la curva farà quella della

*Fig.*

Fig. 56., e l'equazione  $yy = \frac{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}{xx}$ ,

presa  $GA = GP = a$ ,  $GE = x$ ,  $EM = y$ ; e differenziando,  
 $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - ax^3 - a^3x - a^4}{\pm xx \sqrt{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}}$ . La supposizione

di  $dy = 0$  ci dà il numeratore eguale al zero, cioè  
 $x + a \times x^3 + a^3 = 0$ ; e però  $x = -a$ , il qual valore, so-  
 stituito nell'equazione della curva, ci dà  $y = 0$ . La sup-  
 posizione di  $dy = \infty$  ci dà il denominatore eguale al ze-

ro, cioè  $xx \sqrt{x + a} \times aa - xx = 0$ , e però  $x = 0$ ,  
 $x = -a$ , ed  $x = a$ ; ma il valore  $x = -a$  si è trovato  
 anche nella supposizione di  $dy = 0$ , adunque quando sia  
 $x = -a$ , cioè presa  $GP = a$ , la curva averà nel punto  $P$   
 un' incontro di due rami.

Il valore  $x = a$  sostituito nell'equazione ci dà  $y = 0$ ,  
 adunque la medesima  $x$  sarà  $= a = GA$ , a cui corrispon-  
 de  $y = 0$ . Il valore  $x = 0$  sostituito ci dà  $y = \infty$ ; adun-  
 que per lo punto  $G$ , in cui  $x = 0$ , condotta una paral-  
 lela alle ordinate, toccherà la curva in infinita distanza,  
 vale a dire, farà un' asintoto.

Rispetto agli altri due casi: (Fig. 57. 58.) sia  $GA =$   
 $GK = a$ ,  $GP = b$ , ed il resto come sopra. La supposi-  
 zione di  $dy = 0$  ci darà  $-x^4 - bx^3 - aabx - aabb = 0$ ,  
 cioè  $x + b \times -x^3 - aab = 0$ , e però  $x = -b$ ,  $x = \sqrt[3]{-aab}$ .

La

La supposizione di  $dy = \infty$  ci darà

$$xx\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb} = 0, \text{ cioè}$$

$$xx \sqrt{x+b} \times ax - xx = 0, \text{ e però } x = 0, x = -b, x = a, x = -a.$$

Il valore  $x = -b$ , che nel secondo caso sostituito nell'equazione rende  $y = 0$ , ci viene somministrato da ambedue le supposizioni, adunque (Fig. 57.) presa  $GP$  dalla parte de' negativi, ed  $= -b$ , il punto  $P$  farà un' incontro, o sia una intersecazione di due rami di curva. Lo stesso valore  $x = -b$ , sostituito nell' equazione della curva  $\pm y = \frac{b+x}{x} \sqrt{aa - xx}$ , ci dà nel terzo caso ne-

gativo il radicale, per essere  $b$  maggiore di  $a$ , e però immaginaria la curva, quindi a nulla serve.

Il valore  $x = \sqrt[3]{-aab}$ , sostituito nell'equazione della

$$\text{curva, ci dà } y = \pm \frac{\sqrt{aa - bb} \sqrt[3]{abb} + 3ab \sqrt[3]{-aab} + 3abb}{\sqrt[3]{abb}},$$

cioè immaginaria pure, quando sia  $b$  maggiore di  $a$  (Fig. 58.), e però similmente a nulla serve in questo terzo caso; ma ci dà  $y$  reale quando sia  $b$  minore di  $a$ ,

e però (Fig. 57.), fatta  $GI = \sqrt[3]{-aab}$ , farà  $IN$  la mas-

$$\text{sima ordinata } y = \pm \frac{\sqrt{aa - bb} \sqrt[3]{abb} + 3ab \sqrt[3]{-aab} + 3abb}{\sqrt[3]{abb}}.$$

Il valore  $x = 0$  ci dà  $y = \infty$ , cioè asintoto; Il valore  $x = \pm a$  ci dà  $y = 0$ , cioè la tangente ne' punti  $A, K$  parallela all'ordinate.

## ESEMPIO IX.

86. Sia la mezza Cicloide abbreviata  $AMF$  (Fig. 59.), chiamata  $AB = 2a$ ,  $BF = b$ ;  $AP = x$ ,  $PM = z$ , la femiperiferia  $ANB = c$ , l'arco  $AN = q$ ; farà  $PN = \sqrt{2ax - xx}$ ,  $NM = z - \sqrt{2ax - xx}$ , e per la proprietà della curva, è  $ANB, BF :: AN, NM$ ; cioè  $c, b :: q, NM = \frac{bq}{c}$ ;

dunque  $\frac{bq}{c} = z - \sqrt{2ax - xx}$ . Differenziando,  $\frac{bdq}{c} = dz - \frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ; ma condotta  $mp$  infinitamente prossi-

sima ad  $MP$ , farà  $Nn = dq = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ , quindi fatta la

sostituzione nell'equazione, avremo  $\frac{dz}{dx} = \frac{ab + ac - cx}{c\sqrt{2ax - xx}}$ .

La supposizione di  $dz = 0$  ci dà  $x = \frac{ab}{c} + a$ . Se adun-

que  $H$  sia il centro del circolo, presa  $HE$  eguale alla quarta proporzionale della femiperiferia  $ANB$ , della retta  $BF$ , e del raggio, la corrispondente ordinata farà la massima, che si cerca.

La

La supposizione di  $dz = \infty$  ci dà  $x = 0$ , ed  $x = 2a$ , vale a dire, che ne' punti  $A, F$  la tangente farà parallela alle ordinate.

PROBLEMA I.

87. Dato il rettangolo ADCB, (Fig. 60.) si dimanda la minima retta QH, che si possa condurre per lo punto C nell'angolo QAH.

Sia  $AB = a, BC = b, BH = x$ , farà  $CH = \sqrt{bb + xx}$ , e per i triangoli simili  $HBC, HAQ$ , averassi  $HB, HC :: HA, HQ$ ; cioè  $x, \sqrt{bb + xx} :: x + a, HQ = \frac{x + a}{x} \sqrt{bb + xx}$ . Supposta per tanto la  $HQ = y$ , come se fosse l'ordinata di una curva, onde si abbia  $y = \frac{x + a}{x} \sqrt{bb + xx}$ , e differenziando, farà  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - abb}{xx \sqrt{bb + xx}}$ .

La supposizione di  $dy = 0$  ci darà  $x = \sqrt[3]{abb}$ , e però fatta  $BH = \sqrt[3]{abb}$ , e condotta  $HCQ$ , farà essa la minima, che si cerca. La supposizione di  $dy = \infty$  ci darà  $x = \sqrt{-bb}$  immaginaria, ed  $x = 0$ , che a nulla serve, quando non s'intenda, che la retta condotta per lo punto C, che in questo caso sarebbe BC infini-



tamente prodotta, sia un massimo, appunto per esser infinita.

In queste tali questioni adunque basterà differenziare quell'espressione, che si vuole essere un massimo, o minimo, ed indi supporre eguale al zero il numeratore, poi il denominatore.

### PROBLEMA II.

88. *Divisa la retta AB (Fig. 61.) in tre parti date AC, CF, FB, si dimanda il punto E, in cui deve tagliare la porzione di mezzo CF per modo, che il rettangolo AE × EB abbia al rettangolo CE × EF la minima ragione possibile.*

Si chiami  $AC = a$ ,  $CF = b$ ,  $CB = c$ , e  $CE = x$ , farà  $AE = a + x$ ,  $EB = c - x$ ,  $EF = b - x$ , e però farà il rapporto  $\frac{AE \times EB}{CE \times EF} = \frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ , che

deve essere un minimo. Il differenziale adunque farà  $\frac{cxxx dx - bxxx dx - ax dx + 2acx dx - abcdx}{(bx - xx)^2}$ , e posto il

numeratore eguale al zero, avremo

$$x = \frac{-ac \pm \sqrt{abcc - abbc - aabc + aacc}}{c - b - a}.$$

Un valore positivo, che ci dà il punto ricercato E da C verso B, l'altro

l'altro negativo, che ci darebbe il punto  $E$  da  $C$  verso  $A$ . Posto il denominatore eguale al zero, avremo  $x = 0$ , ed  $x = b$ , ne' quali due casi il rapporto de' rettangoli farà il massimo, perchè presa  $x = 0$ , il punto  $E$  cade in  $C$ ; e presa  $x = b$ , il punto  $E$  cade in  $F$ , e però sì nell' uno, come nell' altro caso il rettangolo  $CE \times EF$  è zero.

PROBLEMA III.

89. La data retta  $AB$  si debba tagliare talmente nel punto  $C$ , che il prodotto  $\overline{AC}^2 \times CB$  sia il massimo di tutti i prodotti simili.

Chiamata  $AB = a$ ,  $AC = x$ , farà  $CB = a - x$ , e però  $\overline{AC}^2 \times CB = axx - x^3$ . Il differenziale farà  $2axdx - 3xxdx$ , il quale paragonato al zero, darà  $x = \frac{2a}{3}$ , ed  $x = 0$ . Presa per tanto  $AC = x = \frac{2a}{3}$ , il prodotto  $\overline{AC}^2 \times CB$  farà il massimo; e presa  $x = 0$ , il prodotto farà in un certo modo il minimo, perchè sarà zero, cadendo il punto  $C$  in  $A$ . Non essendo la differenziale una frazione, non à luogo l'altra solita supposizione del denominatore eguale a zero, ma se si voglia considerare l'espressione del prodotto  $axx - x^3$ ,  
come

come un'ordinata di curva , converrà per la legge degli omogenei dividere esso prodotto per un piano costante, e così il differenziale farà una frazione del denominatore costante ; ma essa costante non può mai esser zero, se non relativamente alla  $x$  assunta infinita, e certamente, che allora il prodotto farà un massimo, quando sia  $AC = x = \infty$  .

O detto , che il prodotto  $\overline{AC}^2 \times CB$  è un massimo, quando sia  $AC = \frac{2a}{3}$ , il che chiaramente si vede dal descrivere la curva dell'equazione  $\frac{axx - x^3}{aa} = y$  ; poichè tutte le ordinate tra  $A$ , e  $B$  sono minori di quella , che corrisponde all'assissa  $x = \frac{2a}{3}$  . Sostituito nell'equazione l'altro valore  $x = 0$ , farà  $y = 0$ , dal che si conchiude , che esso valore a nulla serve .

90. Nel Problema antecedente , ed in tutti quelli di simil natura si può fare uso di questo metodo per conoscere , se le questioni sono de' Massimi , o de' Minimi .

#### P R O B L E M A I V .

91. *Fra tutti i parallelepipedi eguali ad' un dato cubo , e de' quali sia dato un lato , si dimanda quello , che abbia la minor superficie .*

II

Il dato cubo sia  $a^3$ , ed il lato cognito del parallelepipedo sia  $= b$ , uno de' lati, che si cercano, sia  $= x$ ; il terzo sarà  $= \frac{a^3}{bx}$ , poichè il prodotto de' tre,

forma il parallelepipedo eguale al dato cubo  $a^3$ . I prodotti dei lati presi a due a due, cioè  $bx$ ,  $\frac{a^3}{x}$ ,  $\frac{a^3}{b}$

formano i tre piani, che sono la metà della superficie del parallelepipedo, e però la somma di questi, cioè  $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$  deve essere il minimo, che si cerca. Dif-

ferenziando adunque, avremo  $bdx - \frac{a^3 dx}{xx}$ , o sia

$\frac{bxxdx - a^3 dx}{xx}$ . La supposizione del numeratore eguale

al zero ci dà  $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$ ; faranno adunque i tre lati del

parallelepipedo, che si cerca,  $b$ ,  $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$ , ed  $\frac{a^3}{b\sqrt{\frac{a^3}{b}}}$ ,

cioè  $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$ , e però eguali faranno i due lati, che si

cercano. La supposizione del denominatore eguale al zero a nulla serve, perchè ci dà  $x = 0$ , il che distrugge il problema.

Se si volesse il parallelepipedo con le assegnate  
con-

condizioni, ma senza assumere lato alcuno per dato, chiamatone uno  $= x$ , sono gl'altri due eguali tra loro, ed  $= \sqrt{\frac{a^3}{x}}$ , e la somma de' tre piani, che deve esse-

re un minimo, farà  $2x \sqrt{\frac{a^3}{x}} + \frac{a^3}{x}$ , e differenziando,

$$\frac{a^3 dx}{x \sqrt{\frac{a^3}{x}}} - \frac{a^3 dx}{xx} \text{, o sia } \frac{a^3 x dx - a^3 dx \sqrt{\frac{a^3}{x}}}{xx \sqrt{\frac{a^3}{x}}}$$

il numeratore eguale al zero, si averà  $x = a$ , e gl'altri due lati parimenti  $= a$ , ed il cubo stesso farà il parallelepipedo, che si cerca.

### P R O B L E M A V.

92. *Fra gl'infiniti coni inscritti in una sfera, determinare quello, la di cui superficie convessa, cioè non compresa la base, sia la massima.*

Nel semicircolo  $ABD$  (Fig. 62.) sieno i triangoli  $ABC$ ,  $AEH$ , e si giri il semicircolo attorno al diametro  $AD$ ; nel mentre, che egli descrive la sfera, i triangoli descriveranno tanti coni, ma poichè da Archimede si dimostra, che le superficie de' coni inscritti sono tra loro, come i prodotti  $AE \times EH$ ,  $AB \times BC$ ,

la

la questione si riduce a determinare nel diametro  $AD$  il punto  $C$  tale, che il prodotto  $AB \times BC$  sia il massimo.

Chiamo adunque  $AC = x$ ,  $AD = a$ ; farà, per la proprietà del circolo,  $CB = \sqrt{ax - xx}$ ,  $AB = \sqrt{ax}$ , ed  $AB \times BC = \sqrt{ax} \sqrt{ax - xx} = \sqrt{aaxx - ax^3}$ . Differenziando adunque, avremo  $\frac{2aaxdx - 3ax^2dx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}}$ , e

fatto il numeratore  $= 0$ , farà  $x = \frac{2a}{3}$ , ed  $x = 0$ ; fatto il denominatore  $= 0$ , farà  $x = a$ , ed  $x = 0$ . Prefa adunque  $AC = \frac{2}{3} AD$ , la superficie del cono descritto dal triangolo  $ABC$  farà la massima, che si cerca. Gl'altri due valori  $x = 0$ , ed  $x = a$  non servono, come è chiaro.

### P R O B L E M A VI.

93. Dato l'angolo  $FDG$ , (Fig. 63.) e dato di posizione il punto  $A$ , ritrovare la minima retta, che nel dato angolo passi per lo punto  $A$ .

Sia  $CB$  quella, che si cerca, e si tiri  $AQ$  normale ad  $FD$ ,  $FAP$  normale a  $DG$ , e  $CK$  normale ad

Tom. II.

Q

FP.

*FP*. Poichè è dato l'angolo *FDG*, e l'angolo *FPD* è retto, farà noto l'angolo *AFQ*, ma è in oltre dato di posizione il punto *A*, dunque faranno note le *QA*, *QF*, *FA*, *QD*. Sia per tanto  $QF = a$ ,  $QA = c$ ,  $QD = b$ , e la  $QC = x$ , farà  $FA = \sqrt{aa + cc}$ ,  $CA = \sqrt{cc + xx}$ ,  $FD = b + a$ ,  $FC = a - x$ . Ma per i triangoli simili *FAQ*, *FDP*, è  $FA, FQ :: FD, FP$ ; adunque  $FP = \frac{aa + ab}{\sqrt{aa + cc}}$ , e però  $AP = \frac{ab - cc}{\sqrt{aa + cc}}$ ; e

per i triangoli simili *FCK*, *FAQ*, è  $AF, FQ :: FC, FK$ , adunque  $FK = \frac{aa - ax}{\sqrt{aa + cc}}$ , onde  $AK = \frac{cc + ax}{\sqrt{aa + cc}}$ ;

e finalmente per i triangoli simili *ACK*, *ABP*, farà  $AK, CA :: AP, AB$ ; adunque  $AB = \frac{ab - cc \sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$ ;

e però  $CB = \sqrt{cc + xx} + \frac{ab - cc \sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$ , che deve esser la minima. Differenziando farà

$$\frac{xdx}{\sqrt{cc + xx}} + \frac{xdx \times ab - cc \times cc + ax - adx \times ab - cc \times cc + xx}{\frac{cc + ax}{2} \times \frac{cc + xx}{2}}$$

e posto il numeratore = 0, (riducendo prima al comun denominatore) farà  $x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^4}{a} - bcc = 0$ , equazione solida.

Per

Per costruirla prendo l'equazione alla parabola  $xx = ay$ ; fatta la sostituzione, farà  
 $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{c^2}{aa} - \frac{bcc}{a} = 0$ , luogo all'iperbola fra  
 gl'asintoti.

Ciò posto, sulla retta  $QD$  si prenda  $QM = \frac{2cc}{a}$ , e  
 condotta dal punto  $M$  parallela ad  $AQ$  la retta  
 $MN = \frac{bcc}{aa}$ , si tiri  $NS$  parallela a  $QD$ , e fra gl'asin-  
 toti  $NS$ ,  $NT$  si descriva l'iperbola  $HOV$  del rettango-  
 lo costante  $= \frac{2bc^2 + aabcc - ac^2}{a^3}$ , e sieno sulla retta

$QF$  le  $x$  prese dal punto  $Q$ ; e ad esse normali le  $y$ .  
 Indi all'asse  $AQ$ , vertice  $Q$ , parametro  $= a$  si descri-  
 va la parabola  $QO$  dell'equazione  $xx = ay$ ; dal punto  
 $O$ , in cui la parabola taglia l'iperbola, condotta  $OC$   
 parallela ad  $AQ$ , e dal punto  $C$  condotta per lo punto  
 $A$  la retta  $CAB$ , farà essa la minima; che si cerca.

Ed in fatti, per la costruzione, è  $NS = x + \frac{2cc}{a}$ ,  
 $SO = y + \frac{bcc}{aa}$ , e per la proprietà dell'iperbola, deve  
 essere  $NS \times SO =$  al rettangolo costante, dunque  
 $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{2bc^2}{a^3} = \frac{2bc^2 + aabcc - ac^2}{a^3}$ , ma

$Q 2$

$CO =$



$CO = y = \frac{xx}{a}$ , per la proprietà della parabola, dunque

substituito in luogo di  $y$  questo valore, avremo  
 $\frac{x^3}{a} + \frac{2ccxx}{aa} + \frac{bccx}{aa} = \frac{bcc}{a} - \frac{c^4}{aa}$ , cioè

$x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^4}{a} - bcc = 0$ , che è l'equazione,

da cui si doveva ricavare il valore della  $x$ , adunque ec.

°O fatta la supposizione, che sia zero il numeratore della frazione, che esprime il minimo.

L'altra supposizione, che sia zero il denominatore, darà  $\frac{cc+ax}{\sqrt{cc+xx}} = 0$ , cioè  $\sqrt{cc+xx} = 0$ ,  $cc+ax = 0$ ; ma  $\sqrt{cc+xx} = 0$  ci dà  $x = \sqrt{-cc}$  immaginaria, e però non serve;  $cc+ax = 0$  ci dà  $x = -\frac{cc}{a}$ , ma presa  $Qc = x = -\frac{cc}{a}$ , e condotta  $Ac$ ,

farà il triangolo  $QAc$  simile al triangolo  $QFA$ , o sia  $PFd$ , e però l'angolo  $QcA$  eguale all'angolo  $FDP$ ; quindi  $cA$  farà parallela alla  $DP$ , vale a dire la condotta dal punto  $c$ , e per lo punto  $A$  nel dato angolo  $FDG$  farà infinita, che in certo modo è un massimo.

Più brevemente ancora si può vedere, che in questo caso la retta, che si cerca, farà infinita; poichè

nell'

nell' espressione  $\sqrt{cc + xx} + \frac{ab - cc}{cc + ax} \sqrt{cc + xx} = CB$ ,  
 sostituito in luogo di  $x$  il valore  $-\frac{cc}{a}$ , il denominato-  
 re diviene zero, e però la linea infinita;



CAPO

## C A P O I V.

*De' Flessi contrarj , e de' Regressi .*

94. **C**osa sieno i Flessi contrarj, ed i Regressi, è stato abbastanza detto nel Lib. I. Cap. VI., poste le quali notizie: Sia la curva  $ADEM$  (Fig. 64.) con le coordinate parallele, la quale abbia in  $E$  un flesso contrario, o regresso; presa una qualunque assissa  $AB = x$ , l'ordinata  $BD = y$ , e condotta  $CF$  parallela, ed infinitamente prossima a  $BD$ , egli è manifesto, che assunta  $dx = BC$  costante, crescendo sempre più la assissa  $AB = x$ , la differenza  $GF$  dell'ordinata  $BD$ , cioè la  $dy$  si farà sempre minore fin'a tanto, che l'ordinata sia la  $HE$ , che corrisponde al punto del flesso contrario, o del regresso, dopo del qual punto nell'uno, e nell'altro caso la  $dy$  anderà sempre facendosi maggiore. Adunque nel punto del flesso contrario, e del regresso la  $dy$  farà un minimo; ondè, per lo metodo de' massimi, e minimi,  $ddy = 0$ , o pure  $d.dy = \infty$  farà la formola de' flessi contrarj, e de' regressi.

Se la curva farà (Fig. 65.) prima convessa, e poi concava all'asse  $AH$ : crescendo parimente la assissa, cresce la differenza dell'ordinata fino al punto  $E$  del flesso

flesso contrario, o regresso, dopo di cui va calando; farà adunque in quel punto la  $dy$  un massimo, e però istessamente si dovrà porre  $ddy = 0$ , o pure  $ddy = \infty$ .

Lo stesso s'inferisca ancora dal considerare, che nelle curve prima concave all'asse la differenza seconda dell'ordinata  $y$ , cioè la  $ddy$  è negativa sino al punto  $E$  di regresso, o di flesso contrario, di poi si fa positiva; e nelle curve prima convesse essa differenza seconda è positiva sino al punto  $E$ , di poi si fa negativa; ma una quantità qualunque non può da negativa farsi positiva, o da positiva farsi negativa; se non passando per lo zero, o per l'infinito, adunque nel punto  $E$  di regresso, o di flesso contrario deve essere  $ddy = 0$ , o pure  $ddy = \infty$ .

Sia tangente della curva  $AEM$  prima concava all'asse (*Fig. 64.*) nel punto  $D$  la retta  $DT$ , e nel punto  $E$  la retta  $EP$ ; crescendo l'assisa  $AB$ , crescerà sempre l'intercetta  $AT$  fra la tangente, e l'origine delle assise fino a tanto, che il punto  $B$  cada in  $H$ , dopo di che nel caso del flesso contrario crescendo ancora l'assisa, calerà essa intercetta, adunque nel punto  $E$  di flesso contrario l'intercetta  $AP = \frac{ydx}{dy} - x$  dovrà essere un massi-

mo, e però differenziando, presa  $dx$  costante,  $\frac{dy^2 dx - y dx ddy - dy^2 dx}{dy^2}$  eguale al zero, o all'infinito,

ciò

cioè riducendo, dividendo per  $-ydx$ , e moltiplicando per  $dy^2$ , farà finalmente  $ddy=0$ , o pure  $ddy=\infty$ . Nel caso, che il punto  $E$  sia di regresso, crescendo l'intercetta  $AT$ , crescerà pure l'assissa  $AB$ , fino a che il punto  $T$  cada in  $P$ , e l'assissa farà  $AH$ , oltre il qual punto  $T$  l'assissa anderà calando; farà adunque  $AH$  un massimo, e però la sua differenza eguale al zero, o all'infinito, adunque relativamente a tale differenza farà infinita, o zero la differenza di  $AP$ , e però  $ddy=\infty$ , o pure  $ddy=0$ , come prima.

Se la curva (*Fig. 65.*) sia prima convessa all'asse, l'intercetta  $AT$  farà  $=x - \frac{ydx}{dy}$ , e la differenza

$$\frac{dx dy^2 - dx dy^2 + y dx ddy}{dy^2}, \text{ o sia } \frac{y dx ddy}{dy^2}, \text{ e però dividen-}$$

do per  $ydx$ , e moltiplicando per  $dy^2$ , si avrà nè più, nè meno  $ddy=0$ , o pure  $ddy=\infty$ .

Nella curva  $DEM$ , (*Fig. 66.*) essendo  $A$  l'origine delle assisse  $x$ , ed  $E$  il punto del flesso contrario, l'intercetta  $AP$  farà  $=AH + HP$ , ma in tale caso la sottotangente  $HP$  è negativa, vale a dire  $-\frac{ydx}{dy}$ , adunque farà  $AP = x - \frac{ydx}{dy}$ , onde si vede, che in nessun modo essa intercetta  $AP$  potrà essere  $x + \frac{ydx}{dy}$ .

95. Serve la ritrovata formola per le curve, che  
 anno

Anno le ordinate parallele, cioè che sono riferite ad un'asse; o diametro; ma ella è diversa nelle curve riferite al fuoco.

Sia ( Fig. 67. 68. ) la curva  $ADE$ , il fuoco  $Q$ , da cui partono le ordinate  $QD$ , e sia  $Qd$  infinitamente prossima alla  $QD$ ; condotta  $QT$  normale a  $QD$ , e  $Qt$  normale a  $Qd$ , si tiri  $DT$  tangente della curva nel punto  $D$ , e  $(dt)$  tangente nel punto  $d$ ; la  $Qt$  prodotta, se fa bisogno, incontrerà  $DT$  nel punto  $o$ . Ora è chiaro, che crescendo le ordinate, se la curva è concava verso il fuoco  $Q$ , ( Fig. 67. ) sarà  $Qt$  maggiore di  $QT$ ; ma se la curva è convessa verso il fuoco  $Q$ , ( Fig. 68. ) sarà  $Qt$  minore di  $QT$ ; adunque nel passare la curva da concava ad esser convessa, o vicendevolmente, cioè nel punto del flesso contrario, e regresso, la quantità  $(ot)$  dovrà farsi da positiva negativa, o all' opposto, e però dovrà passare per lo zero, o per l'infinito.

Sia pertanto  $QD=y$ ,  $DM=dx$ , e col centro  $Q$  si descrivano gli archi infinitesimi  $DM$ ,  $TH$ ; faranno simili i due triangoli  $dMD$ ,  $dQT$ , siccome  $dQo$ ,  $THo$ , e però sarà  $dM, MD :: dQ$ , o sia  $DQ, QT$ , cioè  $dy, dx :: y, QT = \frac{ydx}{dy}$ , ma sono simili pure i due settori

$DQM$ ,  $TQH$ ; quindi  $QD, DM :: QT, TH$ , cioè  $y, dx :: \frac{ydx}{dy}, TH = \frac{dx^2}{dy}$ , e per la similitudine de' trian-

goli  $dQo$ ,  $THo$ , farà  $dQ$  (o sia  $DQ$ ),  $Qo$  (o sia  $QT$ ) ::  $TH$ ,  $Ho$ ; cioè  $y$ ,  $\frac{ydx}{dy} :: \frac{dx^2}{dy}$ ,  $Ho = \frac{dx^2}{dy^2}$ ; ma

$Ht$  (Fig. 67.) è la differenza di  $QT$ , cioè  $Ht = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$ , (presa per costante  $dx$ ) adunque

$to = tH + Ho = \frac{dxdy^2 - ydxddy + dx^2}{dy^2}$ , che deve essere

eguale al zero, o all'infinito, e però anche moltiplicando per  $dy^2$ , e dividendo per  $dx$ , farà  $dy^2 - yddy + dx^2$  eguale al zero, o all'infinito.

Nella Fig. 68. la ( $ot$ ) viene ad esser negativa, e però  $= -\frac{dxdy^2 + ydxddy - dx^2}{dy^2}$ , onde dividendo per  $-dx$ ,

e moltiplicando per  $dy^2$ , farà  $dx^2 + dy^2 - yddy$  eguale al zero, o all'infinito.

Se per tanto una curva qualunque riferita al fuoco  $Q$ , (Fig. 69.) le di cui ordinate  $QB = y$ , e gli archetti  $BC = dx$ , averà un flesso contrario, o regresso, la formola generale per determinarlo farà  $dy^2 + dx^2 - yddy = 0$ , o pure  $dy^2 + dx^2 - yddy = \infty$ .

Se si supponga  $y$  infinita, nella formola  $dx^2 + dy^2 - yddy$  faranno nulli i primi due termini rispetto al terzo, e però farà  $-yddy$  eguale al zero, o all'infinito, e dividendo per  $-y$ , avremo  $ddy = 0$ , o  $ddy = \infty$ ,  
cioè

cioè la formola del primo caso delle curve riferite al diametro, come appunto deve succedere; perchè, supposta  $y$  infinita, le ordinate sono tra loro parallele.

96. Data la natura della curva, per mezzo di un'equazione, e supposta  $dx$  costante, differenziando due volte, se l'equazione è algebrica; una sola, se è differenziale del primo grado, a fine di avere il valore della  $ddy$  dato per  $dx$ , quello paragonato al zero, indi all'infinito ci fornirà i valori dell'assisa  $x$ , ai quali corrisponde l'ordinata  $y$ , che incontra la curva ne' punti di flesso contrario o regresso, se però, posti tali valori in luogo di  $x$  nell'equazione della curva, si abbia la  $y$  reale, che se la  $y$  sarà immaginaria, o involverà contraddizione, la curva non avrà tali punti.

97. Per distinguere i flessi contrarj dai regressi, giacchè il metodo ci dà confusamente gl'uni, e gl'altri, basterà vedere a un di presso l'andamento della curva, e quello ci darà il lume necessario per determinarli.

98. Un'altra sorta di regresso possono avere le curve diversa da quella, che ora si è considerata, ed è quando la curva ritorna indietro verso la sua origine rivoltando la sua concavità a quella stessa parte, a cui la rivolgeva prima del regresso. Dopo aver trattato de' Raggi Osculatori, darò alla fine del seguente Ca-



po la formola generale anche per i regressi di questa seconda sorta .

## E S E M P I O I.

99. Sia (Fig. 51.) la parabola cubica dell'equazione  $y = a + \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$ , che si è veduto nell'Esempio V. del Capo antecedente num. 81. avere un punto d'incontro . Differenziando è adunque  $dy = - \frac{2aadx + 2axdx}{\frac{2}{3} \times a^3 - 2aax + axx}$ , e differenziando di nuo-

$$vo, \text{ presa } dx \text{ costante, farà}$$

$$ddy = - \frac{2adx^2}{9 \times a^3 - 2aax + axx}$$

La supposizione di  $ddy = 0$  ci dà  $-2adx^2 = 0$ , il che non serve; fatta adunque la supposizione di  $ddy = \infty$ , farà  $9 \times a^3 - 2aax + axx = 0$ , cioè  $aa - 2ax + xx = 0$ , e però  $x = a$ . Sostituito, in luogo di  $x$ , questo valore nella proposta equazione, farà  $y = a$ , adunque la curva à un flesso contrario, o regresso, che corrisponde alla assissa  $x = a$ , alla quale compete l'ordinata  $y = a$ , e perchè si fa altronde, essere pure questo

un

un punto d'incontro, non potrà dunque essere un flesso contrario, ma bensì un regresso.

Sia la stessa parabola cubica, ma prese le affisse  $AB = x$  dal vertice  $A$ , (Fig. 70.) e  $BC$  le  $y$ . L'equazione è  $axx = y^3$ , e differenziando  $2axdx = 3yydy$ , e differenziando di nuovo, presa  $dx$  costante,  $ddy = -\frac{6ydy^2 + 2adx^2}{3yy}$ ; ma per l'equazione, si è  $3yy =$

$$3x \sqrt[3]{aax}, \text{ e per la prima differenziazione, } dy = \frac{2axdx}{3x \sqrt[3]{aax}} \text{, adunque fatte le sostituzioni, farà } ddy = -\frac{2adx^2}{9x \sqrt[3]{aax}}.$$

La supposizione di  $ddy = 0$  non serve; la supposizione di  $ddy = \infty$  ci dà  $9x \sqrt[3]{aax} = 0$ , cioè  $x = 0$ , il qual valore sostituito nell'equazione rende  $y = 0$ , adunque la curva è un regresso nel vertice  $A$ .

ESEMPIO II.

100. Sia la versiera  $DFM$ , (Fig. 71.) la di cui equazione  $y = a \sqrt{\frac{a-x}{x}}$ ,  $AB = x$ ,  $BF = y$ ,  $AD = a$ .

Diffe-

Differenziando,  $dy = -\frac{aadx}{2x\sqrt{ax-xx}}$ , e di nuovo dif-

ferenziando, presa  $dx$  costante,  $ddy = \frac{3a^2 dx^2 - 4aax dx^2}{4x \times ax - xx^2}$ .

La supposizione di  $ddy = 0$  ci dà  $3a^2 - 4aax = 0$ ,  
cioè  $x = \frac{3a}{4}$ , il qual valore sostituito nell'equazione del-

la curva rende  $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ , onde presa  $AB = \frac{3}{4}a$ , la  
ordinata  $BF = a\sqrt{\frac{1}{3}}$  incontrerà la curva nel punto  $F$ ,  
che farà un flesso contrario. La supposizione di  $ddy = \infty$

ci dà  $4x \times \frac{3}{ax - xx^2} = 0$ , cioè  $x = 0$ , ed  $x = a$ , il  
primo valore sostituito nell'equazione rende  $y = \infty$ ,  
il secondo  $y = 0$ ; ma nè l'uno, nè l'altro caso porta  
flesso contrario, e porta solo, che sì l'asintoto  $AQ$ ,  
come la tangente nel punto  $D$  è parallela alle or-  
dinate.

### ESEMPIO III.

101. Sia (Fig. 72. 73., e 74.) la Cicloide dell'equazione  $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx - xx}}$  num. 47. Differen-

ziando

$$\text{ziando, farà } ddz = \frac{arx - arr - brr}{b \times 2rx - xx^2} \times dx^2.$$

La supposizione di  $ddz = 0$  ci dà  $arx - arr - brr = 0$ , cioè  $x = r + \frac{br}{a}$ . Se  $a$  sia maggiore di  $b$ , la cicloide

farà l'allongata; onde, presa  $CE$  dal centro eguale alla quarta proporzionale di  $BF$ , del semicircolo, e del raggio, e condotta l'ordinata  $ED$ , (*Fig. 73.*) incontrerà essa la curva nel punto del flesso contrario  $D$ . Se sia  $a$  minore di  $b$ , (*Fig. 74.*) la cicloide farà la raccorciata; ma quando  $a \triangleq b$ , la  $x = r + \frac{br}{a}$  farà maggiore

di  $2r$ , cioè maggiore di  $AB$ , nel qual caso le ordinate sono immaginarie, perchè non vi è curva al di sotto del punto  $F$ , adunque la curva non à flessi contrarj, nè regressi. Se sia  $a = b$ , la cicloide farà l'ordinaria, (*Fig. 72.*) e però  $x = r + \frac{br}{a} = 2r = AB$ , ed  $y = BF$ , il

che non ci dà flesso contrario, o regresso; ma bensì ci fa sapere, che la tangente in  $F$  farà parallela alle assisse, o sia al diametro  $AB$ .

La supposizione di  $ddz = \infty$  ci dà  $b\sqrt{2rx - xx^2} = 0$ , cioè  $x = 0$ , ed  $x = 2r$ . Il valore  $x = 0$  in tutti tre i casi ci dà la tangente nel punto  $A$  parallela alle ordinate. Il valore  $x = 2r$  nel primo, e secondo caso ci dà

dà la tangente nel punto  $F$  istessamente parallela alle ordinate; ma nel terzo caso ci dà una contraddizione, poichè essendo l'equazione  $dz = \frac{dx \sqrt{2r - x}}{\sqrt{x}}$ , sostituito in

luogo di  $x$  il valore  $2r$ , farà  $dz = 0$ , ma non può essere  $dz = 0$ , e assieme  $ddz = \infty$ , adunque tale valore a nulla serve in questo caso.

## ESEMPIO IV.

102. Sia la Concoide di Nicomede di sopra considerata al num. 85., la di cui equazione è

$$yy = \frac{aaxx - x^4 + 2aabbx - 2bx^3 - bbxx + aabb}{xx}, \text{ o sia}$$

$y = \frac{b + x \sqrt{aa - xx}}{x}$ . Differenziando, farà

$dy = -\frac{x^3 dx - aabd x}{xx \sqrt{aa - xx}}$ , e di nuovo differenziando, pre-

fa  $dx$  costante,  $ddy = \frac{2a^4 b - aax^3 - 3aabxx}{x^3 \times \frac{aa - xx}{x^2}} \times dx^2$ .

A riguardo de' tre soliti casi, che può avere questa curva, comincio dal primo quando  $a = b$ . (Fig. 56.)

Ciò posto, farà  $ddy = \frac{2a^4 - aax^3 - 3a^3 xx}{x^3 \times \frac{aa - xx}{x^2}} \times dx^2$ .

La

La supposizione di  $ddy = 0$  ci dà  $2a^3 - aax^3 - 3a^3xx = 0$ , cioè  $x^3 + 3axx - 2a^3 = 0$ , e risolvendo l'equazione,  $x = \sqrt[3]{3aa} - a$ ,  $x = -\sqrt[3]{3aa} - a$ ,  $x = -a$ ; il primo valore ci dà l'assisa  $GE = x = \sqrt[3]{3aa} - a$ , a cui compete l'ordinata  $EM = y = \frac{\sqrt[3]{3aa} \sqrt[3]{2a \sqrt[3]{3aa} - 3aa}}{\sqrt[3]{3aa} - a}$ ,

che incontra la curva nel punto  $M$  del flesso contrario; il secondo valore a nulla serve, perchè rende l'equazione della curva immaginaria; il terzo ci dà un regresso nel punto  $P$ .

Riguardo agli altri due casi, la supposizione di  $ddy = 0$  ci dà  $2aab - x^3 - 3bxx = 0$ , o sia  $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$ . Per avere adunque le radici di quest'equazione, pongo  $xx = bz$ , luogo alla parabola apolloniana, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo  $xz + 3bz - 2aa = 0$ , all'iperbola.

Fra gli asintoti  $AQ$ ,  $AD$ , fatta  $AC = 2a$ ,  $CN$  normale  $= a$ ,  $AD = 3b$ , e prese sull'asintoto  $AD$  dal punto  $D$  le  $x$ , si descriva (*Fig. 75.*) l'iperbola  $GNF$  del rettangolo costante  $= 2aa$ , passerà essa per lo punto  $N$ ; indi alzata  $DM$  normale alla  $DA$ , all'asse  $DM$ , vertice  $D$ , parametro  $= b$ , si descriva la parabola dell'equazione  $xx = bz$ .

Se adunque si assuma  $b$  maggiore di  $a$ , poichè  $AD = 3b$ ,  $AC = 2a$ , farà  $CD$  maggiore di  $b$ , ora presa

nella parabola la affissa  $z = a = CN$ , l'ordinata farà  $x = \sqrt{ab}$ , ma se  $a$  è minore di  $b$ , farà anco  $\sqrt{ab}$  minore di  $b$ , e però anco minore di  $CD$ ; adunque la parabola taglierà l'iperbola tra  $N$ , e  $D$  nel punto, per esempio,  $I$ .

Ciò posto, se si affuma  $x = -a$ , farà nella parabola  $z = \frac{aa}{b}$ , e nell'iperbola  $z = \frac{2aa}{-a+3b}$ , ma  $\frac{aa}{b}$  è maggiore di  $\frac{2aa}{-a+3b}$ , dunque la parabola taglia l'iperbola

nel punto  $I$  tale, che farà  $HI = -x$  minore di  $a$ , e però questa affissa averà nella concoide (Fig. 58.) la ordinata reale, che ci determina il flesso contrario nel punto, per esempio  $N$ , del ramo inferiore  $KN$ . La  $GM$  condotta dal punto  $G$ , altra intersecazione della parabola, e dell'iperbola, farà necessariamente maggiore di  $a$ , e però a tale affissa non corrisponde nella concoide ordinata alcuna reale, onde questo valore a nulla serve. Finalmente il terzo valore  $TF$  ci darà l'affissa, a cui compete l'ordinata nel ramo superiore, che incontra la curva nel flesso contrario  $M$ .

Sia  $b$  minore di  $a$ , farà (Fig. 76.)  $CD$  minore di  $b$ , e presa nella parabola la  $z = a = CN$ , l'ordinata farà  $x = \sqrt{ab}$ , cioè maggiore di  $b$ , e però maggiore di  $CD$ , adunque la parabola passerà tra  $N$ , e  $C$ , quindi o non taglierà essa l'iperbola, e i due valori negativi della  $x$  nell'

nell' equazione  $x^3 + 3bx - 2aab = 0$  faranno immaginari; o se la taglia, faranno essi sempre maggiori di  $a$ , ai quali nella concoide (Fig. 57.) corrispondono ordinate immaginarie, e però a nulla servono. Taglierà però la parabola certamente l'iperbola dalla parte de' positivi nel punto, per esempio  $F$ ; quindi la  $TF$ , che è minore di  $a$ , farà il valore della  $x$ , a cui corrisponde l'ordinata nel ramo  $AM$  della concoide, che l'incontra nel punto del flesso contrario  $M$ .

Disi, che se la parabola taglia l'iperbola tra  $N$ , ed  $O$ , i due valori negativi della  $x$  faranno maggiori di  $a$ ; imperciocchè, presa  $x = -a$  nella parabola, farà  $z = \frac{aa}{b}$ , e nell'iperbola  $z = \frac{2aa}{3b-a}$ , ma  $\frac{aa}{b}$  è minore di  $\frac{2aa}{3b-a}$ ; dunque fino a tanto, che  $x$  negativa non sia maggiore di  $a$ , la parabola non taglierà l'iperbola, dunque la taglierà in un punto, in cui essa  $x$  sarà maggiore di  $a$ . Presa  $x$  positiva  $= a$ , farà nella parabola  $z = \frac{aa}{b}$ , e nell'iperbola  $z = \frac{2aa}{3b+a}$ ; ma  $\frac{aa}{b}$  è maggiore di  $\frac{2aa}{3b+a}$ , dunque la parabola taglierà l'iperbola in un punto  $F$  tale, che farà  $TF$  minore di  $a$ .

La supposizione di  $ddy = \infty$  ci dà  $x^3 \times \frac{3}{aa} - xx^2 = 0$ , cioè  $x = 0$ , ed  $x = \pm a$ ; vale a dire, che l'asintoto,



e la tangente in  $A$  sono parallele alle ordinate in tutti tre i casi, siccome la tangente in  $K$  nel secondo, e terzo caso; e nel primo, che in  $P$  vi è un punto d'incontro (come appunto portano i regressi) per esserci stato somministrato lo stesso valore  $x = -a$  anche dalla supposizione di  $ddy = 0$ ; il quale punto d'incontro si è trovato pure al num. 85.

103. In altro modo. Prendo la stessa Curva Concoide, ma con le ordinate tutte, che partano da un punto fisso, cioè dal polo  $P$ .

Sia adunque  $PM = y$ , (Fig. 56. 57., e 58.) e condotta  $PF$  infinitamente prossima a  $PM$ , e col centro  $P$  descritti gl' archetti  $MB$ ,  $DH$ , sia  $MB = dx$ ,  $AG = a$ ,  $GP = b$ , e chiamata  $PD = z$ ,  $HO = dz$ , per la proprietà della curva, farà l'equazione  $y = z \pm a$ , cioè  $y = z + a$  rispetto alla curva superiore al di sopra dell'asintoto  $GR$ , ed  $y = z - a$  rispetto alla curva inferiore. Differenziando adunque nell'uno, e nell'altro caso, farà  $dy = dz$ . Per la similitudine de' triangoli  $PGD$ ,  $DHO$  (giacchè gl'angoli  $GDP$ ,  $DOH$  non differiscono, se non per l'angolo infinitesimo  $DPH$ , e gl'angoli  $H$ ,  $G$  sono retti) si averà  $PG, GD :: DH, HO$ ; cioè  $b, \sqrt{zz - bb} :: \frac{zdx}{y}, dz$ , e però  $dz = \frac{zdx \sqrt{zz - bb}}{by}$ ,

ma

ma  $dz = dy$ , dunque  $dy = \frac{zdx \sqrt{zz - bb}}{by}$ ; e differenziando, presa  $dx$  costante,

$$ddy = \frac{2byzz - b^2y - bz^2 + b^2z \times dx dz}{bbyy \sqrt{zz - bb}}, \text{ mettendo } dz$$

in luogo di  $dy$ , e posto il valore di  $dz$ , avremo  $ddy = \frac{2yz^2 - bbyz - z^2 + bbzz \times dx^2}{bby^2}$ , e finalmente,

furrogato il valore di  $y = z \pm a$ , farà

$$ddy = \frac{z^2 \pm 2az^2 \mp abbz \times dx^2}{bb \times z \pm a^3}.$$

La formola delle curve riferite al fuoco si è veduto, essere  $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ , o pure  $= \infty$ ; adunque, posti i valori di  $y$ , di  $dy$ , e di  $ddy$ , farà

$$\frac{aabb \pm 3abbz \mp 2az^2 \times dx^2}{bb \times z \pm a^2} = 0, \text{ o pure } = \infty. \text{ La sup-}$$

posizione della formola eguale al zero ci dà  $abb \pm 3bbz \mp 2z^2 = 0$ .

Sia in primo luogo  $a = b$ , e si voglia considerare il ramo superiore, farà  $z^3 - \frac{3aa z}{2} - \frac{a^3}{2} = 0$ , ed i tre

valori di  $z$  sono  $z = -a$ ,  $z = \frac{a - \sqrt{3aa}}{2}$ ,  $z = \frac{a + \sqrt{3aa}}{2}$ ,

ma

ma è  $y = z + a$ , dunque sarà  $y = 0$ ,  $y = \frac{3a + \sqrt{3aa}}{2}$ ,

$y = \frac{3a - \sqrt{3aa}}{2}$ . Il terzo valore a nulla serve, perchè

ci dà l'ordinata  $y$  minore di  $2a$ , dove non è curva; il secondo ci dà la ordinata  $y$ , che incontra la curva nel punto del flesso contrario, per esempio  $M$ ; il primo ci viene somministrato anco considerando il ramo inferiore, e determina il punto  $P$  di regresso, ed infatti rispetto al ramo inferiore sarà  $z' - \frac{3aaz}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$ ,

cioè i tre valori  $z = a$ ,  $z = -\frac{a \pm \sqrt{3aa}}{2}$ ; ma in que-

sto caso  $y = z - a$ , dunque avremo  $y = 0$ ,  $y = -\frac{3a \pm \sqrt{3aa}}{2}$ ; i due ultimi valori a nulla servono, che

ci danno  $y$  negativa, dove non è curva.

Riguardo agli altri due casi (*Fig. 57. 58.*) sarà  $z' - \frac{3bbz}{2} \mp \frac{abb}{2} = 0$ . Per avere le radici di questa

equazione, pongo  $zz = \frac{bp}{2}$ , luogo alla parabola apollonia-

na, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo all'iperbola  $pz - 3bz = \pm ab$ , cioè positivo l'omogeneo di comparazione rispetto al ramo superiore, e negativo rispetto all'inferiore. Fra gli asintoti  $PQ$ ,  $MN$  normali in  $A$ , si descrivano le opposte iperbole (*Fig. 77.*) negli

gli angoli  $PAN$ ,  $MAQ$ , se l'omogeneo di comparazione è positivo, e negli angoli  $PAM$ ,  $NAQ$ , se è negativo; e supposta  $b$  maggiore di  $a$ , sia  $AR=b$ ,  $BC=a$ : passeranno l'iperbole per i punti  $C$ ; e presa  $AM=3b$ , dal punto  $M$  sull'asintoto  $MN$  sieno le  $p$ , indi al vertice  $M$ , asse  $MN$ , parametro  $b$  si descriva la parabola

$EMD$  dell'equazione  $zz = \frac{bp}{2}$ . Poichè presa  $p = Mb = 2b$ ,

la ordinata nella parabola è  $z = b$  maggiore di  $a$ , cioè di  $(bc)$ , passerà essa parabola al di fuori de' punti  $C$ , e taglierà l'iperbole  $DC$ ,  $CT$  ne' punti  $D$ ,  $T$ ,  $I$ , da quali condotte parallele all'asintoto  $QP$  le rette  $DH$ ,  $TV$ ,  $IO$ , faranno esse le tre radici della  $z$  nell'equazione  $z^3 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$ , cioè rispetto al ramo superiore della concoide;

ma  $y = z + a$ , dunque  $DH + a$  farà la ordinata  $y$ , che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio  $M$ . (*Fig. 58.*) L'altre due radici  $VT$ ,  $OI$  a nulla servono, perchè essendo negative, ad  $VT$  aggiunta  $a$ , la differenza, cioè  $y$  farà negativa, e ad  $OI$  aggiunta  $a$ , la differenza sarà positiva, ma minore di  $a$ ; ed alla  $y$  negativa, o minore di  $a$  non corrisponde in questo caso curva. Rispetto al ramo inferiore della concoide, cioè nell'equazione  $z^3 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$

le tre radici faranno  $OG$ ,  $VK$ ,  $HE$ , ma se dalla prima,

ma, e dalla terza si sottragga  $a$  per avere la  $y$ , la differenza sarà negativa, cioè  $y$  negativa, a cui non corrisponde curva, e però a nulla servono; se dalla seconda  $VK$  si sottragga  $a$ , la differenza  $LK$  farà la ordinata  $y$ , che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio,  $N$ .

Supposta  $b$  minore di  $a$ , la parabola passerà tra i punti  $c$ ,  $C$  dell'iperbole  $GcK$ ,  $ICT$ , e però i due valori negativi di  $z$  dell'equazione  $z^3 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$ , aggiungendo la  $a$ , daranno  $y$  minore di  $a$ , a cui non corrisponde curva; il terzo, aggiunta la  $a$ , darà la  $y$ , che incontrerà la curva nel flesso contrario, per esempio,  $M$  (Fig. 57.).

Rispetto al ramo inferiore, cioè all'equazione  $z^3 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$ , dalle due radici positive, che sono minori di  $b$ , sottratta  $a$ , e sottratta pure dalla radice negativa, avremo sempre  $y$  negativa maggiore di  $PK$ , a cui non corrisponde curva, e però il ramo inferiore della conoide quando  $b$  è minore di  $a$ , non ha nè flessi contrarij, nè regressi.

La supposizione della formola  $= \infty$  ci dà in tutti tre i casi  $z = \mp a$ , e però  $y = 0$ ; nella Fig. 58. a nulla serve il valore  $y = 0$ , perchè non è in curva; nelle Fig. 56. 57.

ci

ci dà la tangente in  $P$ , che è assieme punto di regresso nella Fig. 56., ma non già nella Fig. 57.

ESEMPIO V.

104. Sia il circolo  $AED$  descritto col centro  $B$  (Fig. 78.), e sia una curva  $AFK$  tale, che condotto un qualunque raggio  $BFE$ , sia sempre il quadrato  $FE$  eguale al rettangolo del corrispondente arco  $AE$  in una data retta  $b$ , e si voglia il flesso contrario della curva  $AFK$ .

Si chiami l'arco  $AE = z$ ,  $BA = BE = a$ ,  $BF = y$ , ed  $FG = dx$ , fatta  $Be$  infinitamente prossima a  $BE$ , e descritto col centro  $B$ , raggio  $BF$  l'archetto  $FG$ ; per la natura della curva farà  $bz = aa - 2ay + yy$ , e però differenziando,  $bdz = -2ady + 2ydy$ , onde  $dz = \frac{2ydy - 2ady}{b} = Ee$ .

Ma per i settori simili  $BEe$ ,  $BFG$ , farà  $BE$ ,  $BF :: Ee$ ,  $FG$ , cioè  $a$ ,  $y :: \frac{2ydy - 2ady}{b}$ , dunque  $dx =$

$\frac{2yydy - 2aydy}{ab}$ , e differenziando, presa  $dx$  costante,

$$\frac{4yddy^2 + 2yyddy - 2ady^2 - 2ayddy}{y - a} = 0, \text{ onde } yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}.$$

Nella formola generale delle curve riferite al fuoco  $dx^2 + dy^2 - yddy$  si sostituiscano i valori di  $dx^2$ , e di  $yddy$  dati per  $dy$ , ed averemo

$$\frac{4y^4 dy^2 - 8ay^3 dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2 - ady^2 + ydy^2}{aabb \times y - a}$$

cioè, riducendo al comun denominatore,

$$\frac{4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^2yy + 3aabby - 2a^2bb}{aabb \times y - a}$$

al zero, o all'infinito. Costruita per tanto l'equazione, una delle radici ci darà il valore dell'ordinata  $y$ , che incontra la curva nel punto del flesso contrario.



CAPO

## C A P O V.

*Delle Evolute, e de' Raggi Osculatori.*

105. Sia la Curva  $BDF$  (Fig. 79.) involupata dal filo  $ABDF$ , cioè essendo il filo fisso nel punto immobile  $F$  per un' estremità, s'intenda disteso sopra la curva  $BDF$ , e la porzione  $AB$  cada sulla tangente  $AR$  della curva nel punto  $B$ . Si muova il filo per l'estremità  $A$  sviluppando la curva, ma in maniera, che sia sempre teso, ed incapace di distrazione: il punto  $A$  descriverà con questo moto la curva  $AHK$ .

La curva  $BDF$  si chiama l'evoluta della curva  $AHK$ , come è stato detto anche di sopra al num. 16., e la curva  $AHK$  dicesi la generata dallo sviluppo della  $BDF$ , e le porzioni  $AB$ ,  $HD$ ,  $KF$  del filo si dicono raggi dell'evoluta, o raggi osculatori.

106. Poichè la lunghezza del filo  $ABDF$  è sempre la stessa, ne viene, che la differenza de' raggi osculatori  $AB$ ,  $HD$  farà eguale alla porzione  $BD$  della curva; siccome l'altra porzione  $DF$  è eguale alla differenza de' raggi  $HD$ ,  $KF$ , e la curva intiera  $BDF$  eguale alla differenza de' raggi  $AB$ ,  $KF$ ; e se il raggio  $AB$  fosse nullo, cioè, se il punto  $A$  cadesse in  $B$ , sarebbe il raggio  $HD$  eguale alla porzione  $BD$ , ed il raggio  $FK$  a tutta la curva  $BDF$ .



107. Dalla generazione della curva  $AHK$  per lo sviluppo del filo chiaramente si vede, che ciascun raggio  $HD$ ,  $KF$  nelle sue estremità  $D$ ,  $F$  tocca l'evoluta  $BDF$ .

108. L'arco  $HK$  della curva  $AHK$  sia infinitesimo, sarà pure infinitesimo l'arco  $DF$  dell'evoluta, e poichè è dimostrato nel corollario 4. del primo Teor. num. 6., che un qualunque archetto infinitesimo di curva à le stesse proprietà dell'arco di circolo; e nel Teorema 4. num. 15., che prodotto il raggio  $HD$ , sicchè incontri in  $S$  il raggio  $KF$ , sono  $SH$ ,  $SK$  diverse tra loro solo per una quantità infinitesima del terzo grado, si possono dunque prendere per eguali  $SH$ ,  $SK$ ; e però sono esse perpendicolari alla curva  $AHK$  ne' punti  $H$ ,  $K$ . Ma le due  $HD$ ,  $HS$  differiscono tra loro della  $DS$  infinitesima del primo ordine, ed è  $HD$  finita, dunque si potranno assumere per eguali; quindi per determinare un qualunque punto  $D$  nella curva evoluta, vale a dire, per determinare la lunghezza di un qualunque raggio osculatore  $HD$ , basterà, che data di posizione la perpendicolare  $HS$  della curva data  $AHK$ , (il che si à dal metodo delle tangenti) si determini il punto  $S$ , in cui essa si taglia con la perpendicolare infinitamente prossima  $KS$ . Ciò farassi nel seguente modo.

109. Sia in primo luogo la curva  $DABE$  (Fig. 80.) riferita agli assi; i due archetti infinitesimi  $AB$ ,  $BE$ , la perpendicolare  $BQ$ , e l'altra  $EQ$ , che la incontri nel  
ricer-

ricercato punto  $Q$ . Chiamate al solito  $DH = x$ ,  $HA = y$ , e condotte  $AF$ ,  $BG$  parallele a  $DM$ , e la corda  $PABC$ , che incontri  $ME$  prodotta in  $C$ , e condotta l'altra corda  $EBR$ ; e col centro  $B$ , intervalli  $BE$ ,  $BP$ , descritti gli archetti  $ES$ ,  $PO$ , farà  $AF = dx$ ,  $FB = dy$ ,  $AB = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ; ma per lo Corollario 2. del Teorema 5. num. 19. sono simili i settori  $QBE$ ,  $BES$ ; dunque avremo  $QB, BE :: BE, ES$ , cioè  $QB, ds :: ds, ES$ , (chiamando  $ds$  l'elemento della curva) e però  $QB = \frac{ds^2}{ES}$ .

Ora poichè l'archetto  $PO$  si può prendere per il suo seno retto, (Corollario 1. del Teor. 3. num. 9.) faranno simili i triangoli  $RPO$ ,  $BEG$ , e però  $BE, EG :: RP, PO$ , cioè  $ds, dy :: RP, PO = \frac{RP dy}{ds}$ ; ma sono pure simili

i settori  $BPO$ ,  $BES$ , e però farà  $BP, PO :: BE, ES$ , cioè  $\frac{y ds}{dy}, \frac{RP dy}{ds} :: ds, ES = \frac{RP \times dy^2}{y ds}$ , e finalmente

$QB = \frac{y ds^3}{RP \times dy^2}$ , formola generale de' raggi osculatori,

in cui nulla altro rimane da farli, che sostituire il valore della  $RP$ , differenza della  $DP = \frac{y dx}{dy} - x$ , secondo

la diversa ipotesi della flussione prima, che si prende per costante.

Se nessuna flussione prima si assuma per costante, farà  $RP = \frac{y dy ddx - y dx ddy}{dy^2}$ , e però  $QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dy ddx - dx ddy}$ <sup>3/2</sup>  
Se

Se si affuma costante  $dx$ , farà  $RP = -\frac{ydxddy}{dy^2}$ ,

e però  $QB = \frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{3}{2}}$  :

Se si affuma costante  $dy$ , farà  $RP = \frac{yddx}{dy}$ , e però

$QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dxddy}^{\frac{3}{2}}$  .

Se si affuma costante  $ds$ , cioè  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , farà  $dxddx + dyddy = 0$ , e  $-ddy = \frac{dxddx}{dy}$ , quindi  $RP =$

$\frac{yddx \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy^3}$ , e però  $QB = \frac{dy \sqrt{dx^2 + dy^2}}{ddx}$ , o pure

furrogato il valore di  $ddx$ ,  $QB = \frac{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-ddy}$ . Adun-

que nell'espressione di  $QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dyddx - dxddy}^{\frac{3}{2}}$ , in cui nes-

suna flussione è presa costante, basterà cancellare il termine  $ddx$  nella supposizione di  $dx$  costante; cancellare il termine  $ddy$  nella supposizione di  $dy$  costante; e porre in luogo di  $-ddy$  il valore  $\frac{dxddx}{dy}$  nella supposizione di  $ds$  costante.

110. Può la curva essere riferita ad un diametro, vale a dire con le coordinate tra loro in angolo obli-

bliquo . Sia  $DV$  l'assisa  $= x$ ,  $VK = dx$ ,  $VA$  l'ordinata  $= y$ , ed il rimanente, come sopra. Poichè è noto l'angolo  $DKB$ , farà noto l'angolo  $BNF$ , e nota la ragione de' lati tra loro nel triangolo  $BNF$ , quindi essendo  $NB = dy$ , farà data  $NF$ , ed  $FB$ , ed in conseguenza  $AB$ , o sia  $ds$ . Ma il triangolo  $RPO$  è simile al triangolo  $ABF$ , poichè gli angoli in  $O$ , ed  $F$  sono retti, e l'angolo  $ORP$  non è diverso dall'angolo  $FAB$ , che per l'angolo infinitesimo  $RBP$ ; adunque saranno date  $RP$ ,  $PO$ , ed indi  $ES$ , e finalmente  $QB$ .

III. Dall'estremità del raggio osculatore  $BQ$  si tiri  $QT$  parallela all'asse  $DM$ , che incontra in  $T$  l'ordinata  $BI$  prodotta, la retta  $BT$  chiamasi *Sottosculatrice*, o *Co-raggio*. Dato il raggio  $BQ$ , è pure istessamente sempre dato il co-raggio  $BT$ , perchè dal metodo delle tangenti è data la normale  $Bm$  della curva, e però dalla similitudine de' triangoli  $BmI$ ,  $BQT$  farà data  $BT$ .

Ma se si voglia l'espressione del co-raggio indipendentemente dal raggio, si chiami  $BT = z$ . Il triangolo  $BTQ$  è simile al triangolo  $BGC$ , o sia  $BAF$ , perchè essendo retti i due angoli  $TBG$ ,  $QBC$ , tolto il comune  $QBG$ , rimarranno eguali  $TBQ$ ,  $CBG$ ; e sono retti  $T$ , e  $G$ ; adunque farà  $dx, ds :: z, BQ = \frac{zds}{dx} = z \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}$ .

Ma per lo Teorema 4. num. 15.,  $BQ$  è eguale ad  $EQ$ , perchè non differiscono tra di loro, se non per una quan-

quantità infinitesima del terzo grado, adunque farà nulla la differenza di  $QB$ , e però differenziando, senza assumere flussione costante,

$$\frac{dx dz \times \overline{dx^2 + dy^2} + z dx^2 ddx + z dx dy ddy - z ddx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$$

ma  $dz = dy$ , perchè è la stessa la differenza di  $TB$ , e di  $IB$ ; dunque  $z = \frac{dx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dy ddx - dx ddy} = BT$ , formola del

co-raggio, in cui nessuna flussione è stata assunta costante. Se sia  $dx$  costante, il termine  $dy ddx$  farà nullo, e però la formola in questa supposizione farà  $\frac{dx^2 + dy^2}{- ddy} = BT$ .

Se sia costante  $dy$ , farà nullo il termine  $- dx ddy$ , e però la formola in questa supposizione farà  $\frac{dx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dy ddx} = BT$ .

Se sia costante l'elemento della curva, farà  $- ddy = \frac{dx ddx}{ay}$ , e però la formola in questa supposizione farà  $\frac{dx dy}{\overset{ddx}{- ddy}} = BT$ , surrogato il valore di  $ddy$ ; o pure  $\frac{dx^2}{- ddy} = BT$ , surrogato il valore di  $ddx$ .

Dato il co-raggio, per la similitudine de' triangoli  $BmI$ ,  $BQT$ , farà similmente dato il raggio  $QB$ .

112. Se le coordinate faranno tra loro in angolo obbliquo, nell' analogia  $dx, ds :: z, BQ$  in luogo delle

delle  $dx$ , e  $ds$ , basterà porre i rispettivi valori, che in questo caso convengono alle  $AF$ ,  $AB$ , e fare il rimanente, come sopra, e si averà la formola del raggio  $BT$  nel caso, che le coordinate sieno in angolo obliquo.

113. In diverse altre maniere si può avere la stessa formola del raggio osculatore. Col centro  $Q$ , intervallo  $Qm$  si descriva l'archetto  $(mn)$ . Assumendo l'archetto infinitesimo  $(mn)$  per la tangente in  $n$ , faranno simili i due triangoli  $BCG$ ,  $(mnq)$ , e però  $BC, BG :: (mq), (mn)$ ; cioè  $\sqrt{dx^2 + dy^2}, dx :: (mq), (mn) = \frac{(mq) \times dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , ma  $(mq)$  è la differenza di  $Dm$ , cioè del-

la sottornormale  $Im$  con l'assisa  $DI$ , o sia  $DH$ , cioè di  $x + \frac{ydy}{dx}$ ; adunque differenziando nell'ipotesi di nessuna flessione costante, farà

$$(mq) = \frac{dx^3 + ydxddy + dx dy^2 - ydyddx}{dx^2}, \text{ adunque}$$

$$(mn) = \frac{dx^3 + ydxddy + dx dy^2 - ydyddx}{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ ma per i fet-}$$

tori simili  $Qmn$ ,  $QBE$ , farà  $BE = (mn)$ ,  $BE :: Bm$   $(\frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx})$ ,  $QB$ , cioè sostituiti i valori analitici,

$$QB = \frac{dx^2 + dy^2}{\frac{dy^2 dx - dx^2 dy}{dx^3}}, \text{ la qual formola modificata secondo}$$

la supposizione di una flussione costante ci darà l'espressione del raggio  $QB$ , che a tale supposizione corrisponde.

114. In altro modo ancora.

Si produca  $EM$  in  $t$ ,  $BG$  in  $L$ . Poichè il triangolo  $EGL$  è simile al triangolo  $BIm$ , essendo gl'angoli  $GEL$ ,  $IBm$  diversi fra loro del solo angolo infinitesimo  $BQE$ , sarà  $GL = \frac{dy^2}{dx}$ , e però  $BL = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$ ,

ma si è veduto, essere  $(mq) = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$ ,

ed i triangoli simili  $QBL$ ,  $Qmq$  ci danno  $BL = (mq)$ ,  $BL :: Bm$ ,  $BQ$ ; dunque sostituiti i valori analitici,

$$\text{avèremo } BQ = \frac{\frac{dx^2 + dy^2}{dx}}{\frac{dyddx - dxddy}{dx^2}}.$$

115. Prendansi ora le curve riferite al fuoco: e però sia (*Fig. 81.*) la curva  $BEG$ , il fuoco  $A$ ; e presi due archetti infinitesimi  $BE$ ,  $EG$ , e condotte le ordinate  $AB$ ,  $AE$ ,  $AG$ , col centro  $A$  si descrivano gl'archetti  $BC$ ,  $EF$ , ed alle corde  $GE$ ,  $EB$  prodotte sieno perpendicolari  $AI$ ,  $AD$ , e finalmente la corda  $DE$  prodotta incontri in  $L$  l'ordinata  $AG$ , e col centro  $E$  si descriva l'archetto  $GR$ . Sia  $AB = y$ ,  $CE = dy$ ,  $BC = dx$ ,  $AD = p$ . Col centro  $A$  descritto l'archetto  $DH$ , sarà  $HI = dp$ , ma  $HM$  è quantità infinitesima del

del secondo grado; ( Teor. 3. num. 8. ) dunque si potranno prendere per eguali  $HI$ ,  $IM$ , e però sarà  $MI = dp$ . La similitudine de' triangoli  $EBC$ ,  $EAD$  ci dà  $ED = \frac{ydy}{ds} = EI$ , per esser diversa solo per un'

infinitesimo, ed assumendo l'archetto  $GR$  per la sua tangente, sono simili i triangoli  $EIM$ ,  $EGR$ , quindi  $GR = \frac{dpds^2}{ydy}$ ; ma condotte  $EQ$ ,  $QG$  normali

alla curva ne' punti  $E$ ,  $G$ , sono simili i settori  $QEG$ ,  $EGR$ , dunque  $QE = \frac{ydy}{dp}$ . I triangoli simili  $EBC$ ,  $EAD$

ci danno  $p = \frac{ydx}{ds} = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ; e però differenziando,

senza prendere costante alcuna,

$$dp = \frac{y(dx^2 + dy^2) - dx^2 dy - dy^2 dx}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

cioè  $dp = \frac{dx^3 dy + ydy^2 ddx + dx^2 dy^2 - ydx dyddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$ , onde

sostituito questo valore in luogo di  $dp$  nell'espressione

di  $QE$ , sarà  $QE = \frac{y \times (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + ydy ddx + dx^2 dy^2 - ydx dyddy}$ , for-

mola generale del raggio osculatore per le curve riferite



rite al fuoco, presa nessuna flussione costante:

Se si voglia costante  $dx$ , preso il valore di  $dy$  in questa ipotesi, e sostituito; o pure senz'altro cancellato nella formola generale il termine  $ydyddx$ , farà

$$QE = \frac{y \times \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dx^2dy^2 - ydxddy}$$

Se si voglia costante  $dy$ , cancellato nella formola generale il termine  $-ydxddy$ , farà

$$QE = \frac{y \times \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dx^2dy^2 + ydyddx}$$

E finalmente presa per costante  $ds$ , cioè  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , avremo  $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$ , e surrogato in luogo di  $ddx$

questo valore nella formola generale, farà

$$QE = \frac{ydx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 - yddy}, \text{ o pure surrogato il valore di } ddy,$$

$$QE = \frac{ydy \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 + yddx}.$$

116. Se in ciascheduna di queste formole si supporrà la  $y$  infinita, svaniranno tutti que' termini, ne quali essa non si ritrova, e le formole saranno le stesse delle ritrovate per le curve riferite agli assi, il che deve appunto succedere, poichè se la  $y$  è infinita, il punto  $A$  farà infinitamente lontano, e però parallele le ordinate.

117.

117. In altra maniera. All' archetto  $EG$  infinitesimo sia tangente  $ER$  nel punto  $E$ , (*Fig. 82.*) e sieno  $QE, QG$  due raggi osculatori, e si produca  $QG$  in  $R$ . Dal fuoco  $A$  si tiri  $AN$  normale a  $QG$ , ed  $AK$  normale a  $QE$ , e sia  $EK = t$ , farà  $KM = dt$ . Poichè il triangolo  $AKM$  è simile al triangolo  $QNM$ , e questo è simile al triangolo  $QER$ , farà  $QE, ER :: AK, KM$ , cioè  $QE, ER :: AK, dt$ ; ma per i triangoli  $ELC$ , o sia  $EGC, EAK$  simili, è  $AK = \frac{ydy}{ds}$ , ed  $ER$  si può assumere per  $EG$ , dunque farà  $QE, ds :: \frac{ydy}{ds}, dt$ , e però

$$QE = \frac{ydy}{dt}, \text{ ma } EK = t = \frac{ydx}{ds}, \text{ dunque fatto il rimanente}$$

, come sopra, cioè preso differenziando il valore di  $dt$ , e sostituito nell' espressione di  $QE$ , si avranno le stesse formole.

118. Fatta  $QP$  normale ad  $EA$  prodotta in  $P$ , faranno simili i triangoli  $EAK, EQP$ , e però  $EA, EK :: EQ, EP$ ; ma si è veduto, essere  $EQ = \frac{ydy}{dt}$ , dunque

$$y, t :: \frac{ydy}{dt}, EP = \frac{tdy}{dt}, \text{ e surrogato in luogo di } t \text{ il valore } \frac{ydx}{ds}, \text{ ed in luogo di } dt \text{ il differenziale}$$

$$\frac{dx^3 dy + ydy^2 ddx + dx dy^3 - ydx dy dy}{dx^2 + dy^2} \frac{3}{2}, \text{ senza assumere}$$

$$\frac{dx^3 dy + ydy^2 ddx + dx dy^3 - ydx dy dy}{dx^2 + dy^2} \frac{3}{2}$$

fin.

flusione costante, sarà  $EP =$

$$\frac{ydxds^2}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy} = \frac{ydx^3 + ydxdy^2}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy},$$

formola generale del co-raggio, in cui nessuna flusione è presa costante, dalla quale modificata si ricavano le altre, che alle supposizioni di differenziale costante corrispondono, e se in queste si supporrà la  $y$  infinita, cioè, se si cancelleranno que' termini, ne quali essa non trovasi, si averanno le stesse formole, che si sono ritrovate per le curve riferite agl'assi.

119. Poichè, qualunque siasi la curva, si ritrova una sola espressione del raggio osculatore, e del co-raggio sì nelle curve riferite agl'assi, come in quelle riferite al fuoco, ne viene, che qualunque curva non potrà avere, che una sola evoluta.

120. Data adunque, per mezzo di un'equazione qualunque, la curva, di cui si vuole il raggio osculatore, o co-raggio; converrà differenziare l'equazione a fine di avere i valori di  $dy$ ,  $dy^2$ , e  $ddy$  dati per  $dx$ , o di  $dx$  ec. dati per  $dy$ , e sostituirli nelle ritrovate formole, con che si averà l'espressione in termini finiti, e affatto liberi dai differenziali, del raggio osculatore, o co-raggio della proposta curva.

121. Se il valore del raggio osculatore, o del co-raggio sarà positivo, dovranno essi prenderfi dalla par-

te

te dell'asse  $DM$ , ( *Fig. 80.* ) o del fuoco  $A$  ( *Fig. 81.* ), come ò fin'ora supposto, e la curva farà concava a quest'asse, o fuoco; ma se farà negativo, dovranno essi prenderfi dalla parte opposta, ed in questo caso la curva farà convessa. Da ciò ne segue, che nel punto del flesso contrario, o regresso, se la curva ne à, il co-raggio dovrà farsi da positivo negativo, e due raggi osculatori infinitamente prossimi dall'essere convergenti passeranno ad essere divergenti. Ma ciò non può essere, se essi non divengano prima paralleli, vale a dire infinito il raggio dell'evoluta in quel punto, o pure se essi non cadano prima l'uno sopra dell'altro, e così si faccia nullo il raggio dell'evoluta. Egli è assai chiaro, che quando l'evoluta sia tale, che i raggi vadano sempre crescendo accostandosi al punto del flesso contrario, o regresso  $B$ , ( *Fig. 83.* , e *84.* ) per passare ad essere da convergenti divergenti, dovranno farsi prima paralleli, essendo  $AD$ ,  $FE$  l'evoluta della curva  $ABF$ . Ma se l'evoluta della curva  $ABF$  ( *Fig. 85.* , e *86.* ) farà  $DBE$ , sviluppandosi il filo dal punto  $B$ , e andando verso  $A$  rispetto alla porzione  $BA$  della curva, ed andando verso  $F$  rispetto alla porzione  $BF$ , poichè è sempre il raggio minore, quanto più è vicino al punto  $B$ ; converrà, che si faccia nullo prima di passare dall'esser positivo ad esser negativo.

ESEM-

## ESEMPIO I.

122. La curva  $AB$  (Fig. 87.) sia la parabola apolloniana dell'equazione  $ax = yy$ , di cui si voglia il raggio osculatore ad un qualunque punto  $B$ . Differenziando farà  $adx = 2ydy$ , e differenziando di nuovo, presa  $dx$  costante, se così piace,  $2dy^2 + 2yddy = 0$ , ma  $dy = \frac{adx}{2y}$ , dunque  $ddy = -\frac{aadx^2}{4y^3}$ . Sostituiti per

tanto questi valori nella formola del co-raggio  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ ,

farà  $\frac{4y^3 + aay}{aa} = BE$ , o pure, posto in luogo di  $y$  il

valore dato dall'equazione della curva,  $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$ .

Dal punto  $B$  si tiri la tangente  $BT$ , che incontra l'asse in  $T$ , e dal punto  $T$  si conduca  $TE$  parallela alla normale  $BM$ ; incontrerà essa la  $BP$  prodotta nel ricercato punto  $E$ . Imperciocchè essendo l'angolo  $BTE$  retto, farà  $BP, PT :: PT, PE$ , cioè per la proprietà della parabola,  $\sqrt{ax}, 2x :: 2x, PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ ;

adunque  $BP + PE$ , cioè  $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$ .

De-

Determinata  $BE$ , si conduca  $EQ$  parallela all'asse  $AP$ , la normale  $BQ$  prodotta incontrerà  $EQ$  nel punto  $Q$ , che farà all'evoluta.

O pure, a cagione de' triangoli simili  $BPM$ ,  $BEQ$ , farà  $BP, PM :: BE, EQ$ ; ma per la proprietà della parabola è  $PM = \frac{1}{2}a$ , dunque  $\sqrt{ax}, \frac{1}{2}a :: \frac{4x\sqrt{ax} + \sqrt{ax}}$ .

$\sqrt{ax}, EQ = 2x + \frac{a}{2} = PK$ ; dunque  $MK = 2x$ . Presa

per tanto  $MK$  doppia di  $AP$ , o sia  $PK = TM$ , e condotta  $KQ$  parallela a  $PB$ , incontrerà essa la normale  $BM$  prodotta nel punto  $Q$ , che farà all'evoluta: E poichè  $BP, BM :: BE, BQ$ , e  $BM = \sqrt{\frac{4ax + aa}{2}}$ , farà

$$\sqrt{ax}, \sqrt{\frac{4ax + aa}{2}} :: \frac{4x\sqrt{ax} + \sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}, BQ = \frac{4ax + aa}{2aa}^{\frac{3}{2}}$$

raggio osculatore.

Prendo la formola  $\frac{dx^2 + dy^2}{-dx dy}^{\frac{3}{2}}$  del raggio oscula-

tore, fatte le sostituzioni, farà  $QB = \frac{4yy + aa}{2aa}^{\frac{3}{2}} = \frac{4ax + aa}{2aa}^{\frac{3}{2}}$ , come prima.

Passando alle seconde differenze dell'equazio-

ne  $ax = yy$ , senza prendere alcuna flussione costante; poichè  $adx = 2ydy$ , farà  $addx = 2yddy + 2dy^2$ , e  $ddy = \frac{addx - 2dy^2}{2y}$ . Quindi presa la formola del raggio of-

culatore  $\frac{dx^2 + dy^2}{dyddx - dxddy}^{\frac{3}{2}}$ , che a questo caso conviene, e

fatta la sostituzione del valore di  $ddy$ , farà  $QB = \frac{2y \times \frac{dx^2 + dy^2}{2}}{2ydyddx - adxddx + 2dx dy^2}$ , e finalmente posti i valo-

ri di  $y$ , e di  $dy$ ,  $QB = \frac{4ax + aa^{\frac{3}{2}}}{2aa}$ , come sopra:

Si troverà la stessa cosa nell'altre supposizioni di  $dy$ , o di  $ds$  costanti, il che ometto di fare per brevità.

Se si volesse il raggio osculatore ad un determinato punto della curva, basterà sostituire nell'espressione finita già ritrovata del raggio osculatore per un qualunque punto il valore della  $x$ , che a tale determinato punto conviene. Così se si voglia il raggio osculatore nel vertice  $A$ , o sia il punto  $N$ , in cui l'asse  $AN$  della parabola tocca l'evoluta  $NQ$ : poichè nel vertice  $A$  è  $x=0$ ,

cancellato il termine  $4ax$  nell'espressione  $\frac{4ax + aa^{\frac{3}{2}}}{2aa}$

del raggio osculatore, avremo  $AN = \frac{a}{2}$ , il che non

può

può essere altrimenti, essendo in questo caso il raggio  $AN$  lo stesso, che la sottornormale, la quale nella parabola si fa essere sempre la metà del parametro.

123. Sarà ora facile il ritrovare l'equazione alla Cartesiana dell'evoluta  $NQ$ , o sia la relazione delle ordinate  $NK$ ,  $KQ$  nel seguente modo.

Si chiami  $NK = u$ ,  $KQ = t$ . Poichè  $KQ = PE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ , avremo l'equazione  $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ , ma  $AK =$

$AP + PK = 3x + \frac{1}{2}a$ , ed  $AN = \frac{1}{2}a$ ; dunque  $NK = 3x = u$ , ed  $x = \frac{u}{3}$ , e però posto in luogo di  $x$  questo

valore nell'equazione  $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ , avremo  $t = \frac{4u\sqrt{\frac{au}{3}}}{3}$ ,

e quadrando,  $27att = 16u^3$ , equazione alla seconda parabola cubica del parametro  $= \frac{27a}{10}$ , la quale esprime

la relazione delle coordinate  $NK$ ,  $KQ$ , ed è l'evoluta della proposta parabola apolloniana.

Egli è manifesto, che la seconda parabola cubica intiera farà l'evoluta dell'intiera parabola apolloniana, cioè che (Fig. 88.) il ramo  $NQ$  farà l'evoluta della parte superiore  $AB$ , ed il ramo  $Nq$  della inferiore  $Ab$ ; e che i due rami  $Nq$ ,  $NQ$  si voltano le convessità, ed hanno un regresso in  $N$ .

124. E' pure manifesto, che se le curve proposte



sono algebrache, faranno pure algebrache le loro evolte, e si potrà sempre avere l'equazione in termini finiti esprimenti la relazione delle coordinate, e che in oltre esse evolte faranno rettificabili, cioè si potranno ritrovare delle rette linee eguali ad una qualunque porzione delle medesime, per esempio  $NQ$ . Imperciocchè, se la proposta curva  $AB$  è algebrica, si avranno sempre in termini finiti i raggi osculatori  $BQ$ ,  $AN$ , e da  $BQ$  sottratto  $AN$ , il residuo farà l'arco  $NQ$ .

## E S E M P I O I I.

125. Sia la curva  $MBM$  (Fig. 89.) l'iperbola fra gli asintoti dell'equazione  $aa = xy$ . Differenziando,  $x dy + y dx = 0$ , e di nuovo differenziando, presa  $dx$  costante,  $ddy = -\frac{2dx dy}{x}$ . Sostituiti i valori di  $dy$ ; e  $ddy$

nella formola  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$  del co-raggio, avremo  $BE =$

$\frac{xx + yy}{-2y}$ , valore negativo. Se adunque sia  $AP = x$ ,

$PB = y$ , nella prodotta  $AB$  presa  $BN = \frac{1}{2} BA = \frac{\sqrt{xx + yy}}{2}$ ,

ed alzata normale  $NE$ , che incontri la ordinata  $BP$  prodotta in  $E$ , farà  $BE$  il co-raggio, che si cerca; imperciocchè, per la similitudine de' triangoli  $BPA$ ,  $BNE$ ,

farà

farà  $BP, BA :: BN, BE$ , cioè  $y, \sqrt{xx+yy} :: \sqrt{xx+yy}$ ,

$BE = \frac{xx+yy}{2y}$ , e perchè si prende dalla parte de' negativi,  $BE = -\frac{xx+yy}{2y}$ . Quindi condotta  $EQ$  parallela

ad  $AP$ , e prodotta in  $Q$  la normale  $FB$  alla curva nel punto  $B$ , farà  $BQ$  il raggio osculatore, ed il punto  $Q$  nell'evoluta.

Per determinare il raggio osculatore nel vertice  $D$  dell'iperbola, si ponga  $x = AH = a$ , e però  $y = HD = a$ , adunque il co-raggio  $\frac{xx+yy}{-2y}$  nel vertice  $D$  farà  $= -a$ ,

ed il raggio  $= -\sqrt{2aa}$ .

Per poco, che si rifletta alla figura della curva  $MBM$ , si vede, che l'evoluta averà due rami con un punto di regresso in  $L$ , in cui il raggio  $DL$  converrà, che sia il minimo di tutti i raggi  $BQ$ ; e però differen-

ziando la formola de' raggi osculatori  $\frac{dx^2+dy^2}{-dxddy}$ , la

differenza dovrà essere nulla, o infinita; cioè, supposta  $dx$  costante,

$$-\frac{3dxddy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^2ddy^2} + dxddy \times \frac{3}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0,$$

o pure  $=$  all'infinito, e dividendo per  $\sqrt{dx^2+dy^2}$ , e mol-

moltiplicando per  $dxddy^2$ , farà  $dx^2 ddy + dy^2 ddd - 3dyddy^2 = 0$ , o pure  $= \infty$ . Ma per l'equazione della curva, si à  $dy = -\frac{aadx}{xx}$ ,  $ddy = \frac{2aadx^2}{x^3}$ ,  $ddd = -\frac{6aadx^3}{x^4}$ ;

dunque fatte le sostituzioni, e supposta la detta quantità eguale a zero, averemo  $x = a = AH$ ; vale a dire, che il regresso farà nel raggio osculatore al vertice  $D$  della curva; ma si è veduto, essere esso raggio  $= -\sqrt{2aa}$ , farà dunque  $DL = -\sqrt{2aa} = DA$ .

Nella formola de' raggi osculatori, surrogati i valori di  $dy$ , e di  $ddy$ , averemo  $BQ = \frac{xx + yy^2}{-2xy} = \frac{xx + yy^2}{-2aa}$ ,

e però differenziando, a fine di avere il minimo raggio, cioè il punto di regresso  $L$ , farà

$3x dx + 3y dy \sqrt{xx + yy} = 0$ , e posto in luogo di  $dy$  il suo valore, farà  $3xx dx - 3yy dx \sqrt{xx + yy} = 0$ , cioè  $x = y = a$ , e sostituito questo valore nell'espressione del raggio osculatore, farà esso  $= -\sqrt{2aa} = DL$ , come sopra.

In altro modo ancora si può costruire il raggio  $BQ$ . Poichè  $ddy = -\frac{2dxdy}{x}$ , sostituiti in luogo di  $x$ , e di  $dx$  i valori dati per  $y$ , farà  $ddy = \frac{2dy^2}{y}$ , e però il co-rag-

gio

gio  $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$ , e per i triangoli simili  $BPF$ ,

$BEQ$ , avremo  $EQ = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$ . Si conduca ora

al punto  $B$  la tangente  $BT$ , e dal punto  $T$  la  $TS$  normale a  $BT$ , o sia parallela a  $BQ$ , e si prenda  $BE = \frac{1}{2} BS$ , o  $PK = \frac{1}{2} FT$ ; se si farà  $EQ$  parallela alla  $AT$ ,

o  $KQ$  perpendicolare, esse incontreranno la normale  $BQ$  nel punto  $Q$  dell' evoluta, poichè sarà  $BS = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$ , dunque  $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$ ; sarà ancora

$$FP + PT = FT = -\frac{ydy}{dx} - \frac{ydx}{dy}, \text{ dunque } EQ = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}.$$

Se l'equazione sarà  $y^m = x$ , la quale esprime tutte le parabole all' infinito, quando sia  $m$  numero positivo, ed in conseguenza anche la parabola dell' esempio primo; ed esprime tutte le iperbole fra gli asintoti all' infinito, quando sia  $m$  negativo, e però anche quella di questo esempio: differenziando avremo  $my^{m-1} dy = dx$ , e di nuovo differenziando, supposta  $dx$  costante,  $m \times y^{m-2} dy^2 + my^{m-1} ddy = 0$ , e dividendo per  $my^{m-1}$ , sarà  $-ddy = \frac{m-1}{y} \times \frac{dy^2}{y}$ . Presa pertanto

la

la formola  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$  del co-raggio, e fatta la sostituzione

del valore di  $ddy$ , si averà  $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{m-1 \times dy^2}$ , e

però  $EQ$ , o  $PK = \frac{ydx}{m-1 \times dy} + \frac{ydy}{m-1 \times dx}$ .

Dal punto  $T$ , in cui (Fig. 87., e 89.) la tangente  $BT$  incontra l'asse  $AP$ , si tiri istessamente  $TS$  parallela alla normale  $BQ$  alla curva, che incontra in  $S$  la ordinata  $BP$  prodotta, indi si prenda  $BE = \frac{BS}{m-1}$

la parte dei negativi, se  $m$  sia numero negativo, come nelle iperbole le quali sono all'asse  $AP$ , cioè all'asintoto convessa (Fig. 89.); si prenda  $BE$  dalla parte dei positivi, se  $m$  sia numero positivo, e maggiore dell'unità, come nelle parabole (Fig. 87.) concave all'asse  $AP$ , e dalla parte dei negativi, se  $m$  positivo sia minore dell'unità, nel qual caso le parabole sono convesse all'asse  $AP$ .

Per determinare il punto, in cui l'asse della parabola tocca l'evoluta, prendo la formola de' raggi oscu-

latori  $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{3}{2}}$ , da cui, sostituiti i valori di  $dx =$

$my^{m-1}dy$ , e di  $-ddy = \frac{m-1 \times dy^2}{y}$ , avere-

mo

mo  $BQ = \frac{mmy^{2m-2} + 1^{\frac{3}{2}}}{m \times m - 1 \times y^{m-2}}$ , intendendo, che l'unità

supplisca per la legge degl' omogenei; quindi supposta  $m$  maggiore dell'unità, acciò sieno concave le parabole all'asse  $AP$ , se sarà  $m$  minore di 2, la  $y$  del denominatore passerà ad essere un moltiplicatore del numeratore, e però fatta  $y = 0$ , come richiede il caso, che si cerca, sarà  $BQ = 0$ , cioè l'asse toccherà l'evoluta nel vertice  $A$  della parabola, come farebbe per esempio la seconda parabola cubica  $axx = y^3$  ( Fig. 70. ).

Che se  $m$  è maggiore di 2, la  $y$  del denominatore sarà elevata a potestà positiva, e però fatta  $y = 0$ , sarà  $BQ$  infinita, vale a dire che l'asse della parabola sarà asintoto dell'evoluta; come la prima parabola cubica  $AB$ , ( Fig. 90. ) il di cui asse  $AP$  è asintoto dell'evoluta  $LQ$ .

L'evoluta  $CLQ$  della semi-parabola cubica  $ABM$  dell'equazione  $axx = y^3$  à un punto di regresso  $L$ , e però due rami  $LQ$ ,  $LC$ ; sviluppando il ramo  $LQ$ , si genera la porzione  $BA$ ; sviluppando il ramo  $LC$ , la porzione infinita  $BM$ .

Per determinare il flesso contrario  $L$ , prendo il valore del raggio osculatore, che in questa curva è

$= \frac{9y^4 + a^4}{6a^4y^2}$ , il quale deve essere un minimo,

Tom. II. Y e

e però differenziando

$$3 \times \frac{18a^+ y^+ dy \times \frac{1}{2} \sqrt{9y^+ + a^+} - a^+ dy \times \frac{3}{2} \sqrt{9y^+ + a^+}}{6a^+ yy} = 0,$$

cioè  $45y^+ - a^+ = 0$ , quindi  $y = \sqrt[4]{\frac{a^+}{45}}$ , e surrogato que-

sto valore in luogo di  $y$  nell'equazione  $ax = y^3$ , avere-  
mo  $x = \sqrt[4]{\frac{a^+}{9 \cdot 125}}$ . Prefa adunque  $AP = \sqrt[4]{\frac{a^+}{9 \cdot 125}}$ , e con-

dotta l'ordinata  $PB$ , il punto di regresso  $L$  farà nella  
normale al punto  $B$  della curva; e nell'espressione del

raggio osculatore posto  $\sqrt[4]{\frac{a^+}{45}}$  in luogo di  $y$ , avremo  
il valore di  $BL$ .

In altro modo. Differenziando l'equazione  $ax = y^3$ ,

o sia  $y = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$ , farà  $dy = \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx$ ,  $ddy =$

$-\frac{2}{9} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{5}{3}} dx^2$ ,  $ddy = \frac{10}{27} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{8}{3}} dx^3$ , posta  $dx$

costante; quindi, prefa la formola

$dx^2 ddy + dy^2 ddy - 3dy ddy^2 = 0$ , e sostituiti i valori,

si averà  $AP = \sqrt[4]{\frac{a^+}{9 \cdot 125}}$ .

ESEM-

ESEMPIO III.

126. Sia la curva  $ABD$  (Fig. 91.) un' ellissi, o un' iperbola, il di cui asse  $AH = a$ , ed il parametro  $AF = b$ ,  $AP = x$ ,  $PB = y$ , e l'equazione

$$y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{a}}. \text{ Differenziando, far\`a } dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$$

e  $ddy = \frac{-a^3 b b dx^2}{4 \times \frac{aabx \mp abxx}{2}^{\frac{3}{2}}}$ , presa  $dx$  per costante.

Fatte le sostituzioni nella formola  $\frac{dx^2 + dy^2}{-dx dy}$  del raggio osculatore, far\`a

$$BGQ = \frac{4aabx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4hbxx^2}{2a^3 bb}.$$

Ma la normale  $BG$  si trover\`a essere

$$= \frac{4aabx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4hbxx^2}{2a},$$

dunque far\`a il raggio  $BGQ = \frac{BG}{bb}$ ; adunque preso il parame-

tro  $b$  per primo termine, la normale  $BG$  per secondo, e continovata la serie geometrica, il quadruplo



del quarto termine farà il raggio osculatore  $BQ$ :  
 Fatta  $x = 0$  nella espressione del raggio osculatore, farà  $BGQ = AM = \frac{b}{2}$ , e fatta  $x = AO = \frac{1}{2} a$ , si avrà  
 nell' ellissi  $BGQ = DOQ = \frac{a \sqrt{ab}}{2b}$ , cioè eguale alla

metà del parametro dell' asse conjugato, ed in  $Q$   
 vi farà un regresso, e l'evoluta della porzione  
 $AD = DH$  farà  $MQ$ ; della porzione  $DH$  farà  
 $RQ$ ; ma nell' iperbola il raggio si estende all' infi-  
 nito.

Se nell' ellissi si faccia  $a = b$ , il raggio osculato-  
 re  $BGQ$  farà  $= \frac{a}{2}$ , qualunque siasi il punto  $B$ ; dun-

que i raggi tutti eguali tra loro, e l'evoluta un pun-  
 to, cioè a dire l'ellissi, che in questo caso diviene un  
 circolo, à per evoluta il suo centro.

#### E S E M P I O I V.

127. Sia la curva  $ABD$  ( Fig. 92. ) la logaritmi-  
 ca ordinaria, la di cui equazione è  $\frac{ady}{y} = dx$ .

Differenziando, presa  $dx$  costante, farà  $ddy =$   
 $\frac{dx dy}{a} = \frac{y dx^2}{aa}$ , posto il valore di  $dy$ . Fatte le sostituzio-

ni

ni nella formola  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$  del co-raggio, avremo

$BE = \frac{-aa - yy}{y}$ , e perchè nella logaritmica si trova,

effere la sottonormale  $PH = \frac{yy}{a}$ , farà  $EQ = -a - \frac{yy}{a}$ .

Prefa adunque  $PK = TH$ , ed alzata in angolo retto  $KQ$ , incontrerà essa la normale  $HBQ$  nel ricercato punto  $Q$  dell'evoluta.

Se si voglia determinare il punto della massima curvatura nella logaritmica, cioè il punto del minimo raggio osculatore, fatte le sostituzioni nella formola

$\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}$  del raggio osculatore, farà  $\frac{aa + yy^2}{-ay}$ , e

differenziando farà

$$-3ayydy \times \frac{aa + yy^2}{aayy} + ady \times \frac{aa + yy^2}{a^2} = 0, \text{ e però}$$

$$PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}.$$

O pure, prefata la formola del num. 125.  $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$ , e fatte le sostituzioni di  $dy = \frac{ydx}{a}$ , di  $ddy = \frac{ydx^2}{a^2}$ , di  $ddy = \frac{ydx^3}{a^3}$ , troveremo ittes-

famente  $PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$ .

ESEM-

## ESEMPIO V.

128. Sia  $ABD$  (Fig. 93.) la logaritmica spirale, la di cui proprietà è, che condotta ad un qualunque punto  $B$  la tangente  $BT$ , e dal polo  $A$  la ordinaria  $AB$ , l'angolo  $ABT$  sia sempre lo stesso, e però fatta  $AM$  infinitamente prossima ad  $AB$ , sarà costante la ragione di  $MR$  ad  $RB$ , quindi posta  $AB = y$ , l'archetto  $BR = dx$ , l'equazione sarà  $adx = bdy$ , e differenziando, fatta  $dx$  costante,  $ddy = 0$ . Presa pertanto la formola del co-raggio num. 118.

$$\frac{y dx^3 + y dx dy^2}{dx^3 + dx dy^2 + y dy ddx - y dx ddy}$$
, per le curve riferite

al fuoco, la quale regolata nell'ipotesi di  $dx$  costante è  $\frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + dy^2 - y ddy}$ , e cancellato in questa il termine

$y ddy$ , perchè la curva ci dà  $ddy = 0$ , e fatta la sostituzione del valore di  $dx$ , o di  $dy$ , ovvero diviso il numeratore, e denominatore per  $dx^2 + dy^2$ , sarà il co-raggio  $BA = y$ .

Adunque, condotta  $AC$  normale ad  $AB$ , incontrerà essa la perpendicolare  $BC$  nel ricercato punto  $C$

dell'

dell'evoluta, e perchè la sottotangente  $AC = \frac{ay}{b}$ , farà

$$BC = \frac{y \sqrt{aa + bb}}{b}.$$

Condotta la tangente  $BT$  alla curva nel punto  $B$ , faranno simili i triangoli  $TCB$ ,  $CBA$ , e però eguali gl'angoli  $TBA$ ,  $ACB$ ; ma l'angolo  $TBA$  è sempre costante, dunque lo sarà ancora l'angolo  $ACB$ ; e però l'evoluta  $AC$  farà la stessa logaritmica spirale  $ABD$ , ma inversamente posta.

### ESEMPIO VI.

129. Sia  $ABD$  (Fig. 93.) la spirale iperbolica, la di cui proprietà è, che la sottotangente sia costante:

Fatte dunque le stesse cose dell'Esempio antecedente, l'equazione della curva farà  $\frac{y dx}{dy} = a$ , o sia

$y dx = a dy$ ; quindi differenziando, posta  $dx$  costante,  $d.y = \frac{dx dy}{a}$ . Presa per tanto la formola del co-raggio,

che all'ipotesi di  $dx$  costante corrisponde, cioè

$$\frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + dy^2 - y ddy},$$

indi sostituito in luogo di  $ddy$  il valo-

re

re  $\frac{dx dy}{a}$ , ed in luogo di  $dy$  il valore  $\frac{y dx}{a}$  dato dall'equazione, farà il co-raggio  $= y \times \frac{aa + yy}{aa}$ .

Ma poichè la sottotangente  $AT$  è  $= a$ , e la sottotangente normale  $AC = \frac{yy}{a}$ , farà  $TC = \frac{aa + yy}{a}$ ; dunque la quarta proporzionale della sottotangente  $TA$ , e della  $TC$ , e dell'ordinata  $AB$  ci determina il co-raggio. Quindi dal punto  $C$  condotta parallela alla tangente  $BT$  la  $CQ$ , che taglia in  $Q$  la ordinata  $BA$  prodotta, farà  $BQ$  il ricercato co-raggio.

Poichè per i triangoli simili  $BAT$ ,  $CAQ$ , si avrà  $CA, AQ :: TA, AB$ , e permutando  $CA, TA :: AQ, AB$ , e componendo  $TC, AT :: QB, AB$ , ed invertendo  $TA, TC :: BA, BQ$ ; il che ec.

## ESEMPIO VI.

130. Sia il settore di circolo  $ADN$ , (Fig. 94.) e condotto dal centro  $A$  un raggio qualunque  $ABP$ , si faccia  $ND, NP :: \overline{AP}^m, \overline{AB}^m$ , il punto  $B$  farà nella curva  $ABD$ , che è una delle spirali all'infinito, la di cui equazione, fatto  $NPD = b$ ,  $NP = z$ , il raggio

gio  $AP = a$ ,  $AB = y$ , farà  $y^m = \frac{a^m z}{b}$ , e differenzian-

do,  $my^{m-1} dy = \frac{a^m dz}{b}$ . Ma condotto il raggio  $Ap$

infinitamente prossimo ad  $AP$ , e chiamata  $BR = dx$ , per i settori simili  $APp$ ,  $ABR$ , farà  $dz = \frac{adx}{y}$ ,

quindi posto questo valore in luogo di  $dz$  nell' equazione differenziale, farà  $my^m dy = \frac{a^{m+1} dx}{b}$ , e pe-

rò di nuovo differenziando, presa  $dx$  costante,  $mmy^{m-1} dy^2 + my^m ddy = 0$ , cioè  $yddy = -m dy^2$ .

Fatta pertanto la sostituzione di questo valore, e del valore di  $dx$  nella formola del co-raggio, farà  $BE =$

$$\frac{y \times mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mmbby^{2m+1} + m \times a^{2m+2}}. \text{ Si faccia } TAC \text{ perpendi-}$$

colare ad  $AB$ , e si tiri la tangente  $BT$  della curva in  $B$ , e  $BC$  normale, farà  $AT = \frac{mby^{m+1}}{a^{m+1}}$ ,  $AC =$

$$\frac{a^{m+1}}{mby^{m-1}}, \text{ e però } TC = \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mba^{m+1}y^{m-1}}, \text{ quindi la}$$

quarta proporzionale di  $TA + m + 1 \times AC$ , di  $TC$ , e di  $AB$  farà  $y \times \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mmbby^{2m+1} + m \times a^{2m+2}} = BE$ , e però

$$\frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mmbby^{2m+1} + m \times a^{2m+2}}$$

condotta  $EQ$  parallela alla  $TC$ , incontrerà la normale  $BC$  nel punto  $Q$ , che farà all'evoluta.

## ESEMPIO VII.

131. Sia la curva  $ABD$  (Fig. 95.) la metà della cicloide ordinaria, la di cui equazione  $dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$ , essendo  $AC = 2a$ ,  $AP = x$ ,  $PB = y$ .

Differenziando, presa  $dx$  costante, farà  $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax-xx}}$ , e posti questi valori nella formola

del raggio osculatore  $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{3}{2}}$ , farà  $BQ =$

$2\sqrt{4aa-2ax}$ ; ma la normale  $BG = \sqrt{4aa-2ax} =$  alla corda  $EC$ , dunque il raggio osculatore  $BQ = 2BG = 2EC$ .

Fatta  $x = 0$ , per avere il raggio osculatore nel punto  $A$ , farà  $BQ = AN = 4a$ , e però  $CN = CA = 2a$ .

Fatta  $x = 2a$ , il raggio osculatore nel punto  $D$  farà  $= 0$ , e però l'evoluta principia in  $D$ , e termina in  $N$ .

Poichè

Poichè la tangente in  $B$  della cicloide è parallela alla corda  $EA$ , ( num. 47. ) farà la normale  $BQ$  parallela alla corda  $EC$ . Ciò posto, si compisca il rettangolo  $DCNS$ , ed al diametro  $DS = CN = AC$  si descriva il semicircolo  $DIS$ , e si tiri la corda  $DI$  parallela alla  $BQ$ , o sia alla  $EC$ . Saranno gl' angoli  $CDI$ ,  $DCE$  eguali, e per conseguenza gl' archi  $DI$ ,  $CE$ , e le corde; dunque  $DI$ ,  $GQ$  eguali, e parallele, e condotta  $IQ$ , farà essa eguale, e parallela a  $DG$ ; ma per la proprietà della cicloide, la  $DG$  è eguale all'arco  $EC$ , e però all'arco  $DI$ , dunque l'arco  $DI = IQ$ , ed il semicircolo  $DIS = SN$ , quindi l'evoluta  $DQN$  è la stessa cicloide  $DBA$  inversamente posta.

132. Avuta sufficiente notizia; e ritrovate le formole de' raggi osculatori, non è difficile il ritrovare la formola de' regressi della seconda specie di sopra, promessa al num. 98.

Sia la curva  $BAC$  ( Fig. 96. ) con un flesso contrario in  $A$ , e si sviluppi dal filo principiando in un qualunque punto  $D$  diverso dal flesso contrario  $A$ . Lo sviluppo della porzione  $DC$  genera la curva  $DG$ ; quello della porzione  $DA$  la curva  $DE$ ; e quello della porzione  $AB$  la curva  $EF$  di modo, che lo sviluppo di tutta la  $BAC$  formerà la intera curva  $FEDG$ ;



la quale à due regressi, uno in  $D$  della solita forma; poichè i due rami  $DE$ ,  $DG$  si voltano le convessità, l'altro in  $E$  della seconda sorta, per essere i due rami  $ED$ ,  $EF$  concavi verso la stessa parte. Sieno  $NM$ ,  $Nnm$  due qualunque raggi infinitamente prossimi dell'evoluta  $DA$ , ed  $NH$ ,  $nH$  due normali alla stessa, faranno simili i due settori infinitesimi  $NmM$ ,  $HNn$ , quindi  $HN$ ,  $NM :: Nn$ ,  $Mm$ ; ma nel punto del flesso contrario  $A$ , il raggio  $HN$  ( num. 121. ) deve essere o infinito, o eguale al zero, ed il raggio  $NM$ , che diventa  $AE$ , rimane finito, adunque nel caso del flesso contrario  $A$ , cioè nel punto del regresso  $E$  della seconda sorta, la ragione di  $Nn$ ,  $Mm$ , vale a dire la ragione della differenziale del raggio  $MN$  all'elemento della curva, deve essere infinitamente grande, o infinitamente piccola. Ma la formola del raggio  $MN$

$$\text{è } \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$$

$$\text{le è } \frac{-3dxddydy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} + dxddy \times \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$$

ed  $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , dunque

$$\frac{Nn}{Mm} = \frac{dx^2ddy + dy^2ddy - 3dydy^2}{dxddy^2} = \text{al zero, o all'in-}$$

finito, formola per i regressi della seconda sorta.

Questa

Questa formola è la stessa della ritrovata al num. 125., ma in quel luogo essa serve per i regressi della prima sorta delle evolute , e questa per i regressi della seconda sorta delle curve genite dell'evolute , essendo  $x$  , ed  $y$  le coordinate nell'uno , e nell'altro caso delle curve genite .

FINE DEL SECONDO LIBRO .





INSTITUZIONI  
ANALITICHE

LIBRO TERZO

*Del Calcolo Integrale.*



# INSTITUZIONI ANALITICHE LIBRO TERZO

## *Del Calcolo Integrale.*

**I**L Calcolo Integrale, che suole dirsi ancora calcolo sommatorio, è un metodo di ridurre una quantità differenziale a quella quantità, di cui essa è la differenza, onde le operazioni del calcolo integrale sono opposte a quelle del differenziale, e però si chiama ancora metodo inverso delle flussioni, o sia delle differenze. Per cagion d'esempio il differenziale di  $x$  è  $dx$ , e per conseguenza  $x$  è l'integrale di  $dx$ . Quindi sarà segno sicuro, che sia giusto quell'integrale, che differenziato restituirà la quantità proposta da integrarsi. In due diverse maniere si ricercano gl'integrali delle formole differenziali, in una per mezzo di espressioni finite algebriche, o ridotte a quadrature supposte; nell'altra facendo uso delle serie. Delle regole della prima maniera tratterò nel primo Capo; dell'altra nel secondo, a cui aggiungerò il terzo dell'uso di esse regole per le rettificazioni di curve, quadrature di spazj ec., e finalmente il quarto, che tratterà del Calcolo Esponenziale.

*Delle regole dell' integrazioni espresse da formole finite  
algebraiche , o ridotte a quadrature supposte .*

1. **C**ome nelle quantità incomplete elevate a qualunque potenza il differenziale loro è il prodotto dell' esponente della variabile nella variabile stessa elevata alla medesima potenza diminuita dell' unità , e moltiplicata nella sua differenza ; così l' integrale del prodotto d' una variabile elevata a qualunque potenza nella differenza della stessa variabile è la variabile elevata alla potenza , in di cui esponente sia accresciuto dell' unità , divisa per lo stesso esponente così accresciuto , e ciò qualunque siasi l' esponente della potenza della variabile nella formola differenziale , cioè positivo , o negativo , intero , o rotto . Per esempio l' integrale di  $m x^{m-1} dx$

farà  $\frac{m x^{m-1+1}}{m-1+1}$  , cioè  $x^m$  . L' integrale di  $x^{\pm \frac{m}{n}} dx$

farà egli  $\frac{x^{\pm \frac{m}{n}+1}}{\pm \frac{m}{n}+1}$  , cioè  $\frac{n x^{\pm \frac{m}{n}+1}}{\pm m+n}$  .

2. Nè punto alterano la regola le quantità costanti incomplete , o complesse , per le quali sia moltiplicata , o divisa la formola differenziale , rimanendo esse nell'

nell' integrale, quali erano nella formola differenziale, e però l'integrale di  $\frac{aax^n dx}{mb - cc}$  farà  $\frac{aax^{n+1}}{n+1 \times mb - cc}$ .

3. Che se la formola differenziale farà una frazione, il di cui denominatore sia pure una qualunque potestà della variabile moltiplicata ancora, se si vuole, per qualunque costante, come a dire la formola  $\frac{x^m dx}{aax^n - bbx^n}$ ,

cioè  $\frac{x^m dx}{aa - bb \times x^n}$ , come che essa è la medesima di

questa  $\frac{x^{m-n} dx}{aa - bb}$ , farà perciò soggetta alla data regola.

4. Ma quì fa d'uopo avvertire, che acciò gl'integrali sieno compiti, devesi ad essi sempre aggiungere, o da essi sottrarre una quantità costante a piacere, la quale ne' casi particolari si determina poi, come si vedrà a suo luogo.

Quindi l'integrale compito, per esempio, di  $dx$  farà  $x \pm a$ , (intendendo per  $a$  una costante qualunque) di  $xx dx$  farà  $\frac{x^3}{3} \pm a^3$ , e così degl'altri. La ragione di ciò è, che non

avendo le quantità costanti differenziale, la  $dx$  tanto può essere la differenziale di  $x$ , quanto di  $x+a$ , quanto di  $x-b$  ec., e però tanto  $x$ , quanto  $x+a$ , quanto  $x-b$  ec. possono essere gl'integrali di  $dx$ ; lo stesso vale di qualunque altra formola.



5. La stessa regola d'integrare serve per le formole differenziali complesse, cioè composte di molti termini, purchè, se hanno denominatore, sia egli o tutto costante, o se contiene la variabile, sia incompleto, cioè d'un solo termine, o riducibile ad esser tale.

Imperocchè in questi casi la formola differenziale complessa si risolve in altrettante incomplete, quanti sono i termini della complessa, e però ciascheduna è soggetta alla mentovata regola. Sia la formola

$$\frac{bx^m dx + aax^{m-1} dx}{aa - bb};$$
 questa equivale alle due

$$\frac{bx^m dx}{aa - bb} + \frac{aax^{m-1} dx}{aa - bb},$$
 e però gl'integrali di queste

due formole faranno l'integrale della prima, cioè

$$\frac{bx^{m+1}}{m+1 \times aa - bb} + \frac{aax^m}{m \times aa - bb} \pm f.$$

Sia  $\frac{bx^3 dx - a^4 dx}{axx - cxx}$ ; questa equivale alle due

$$\frac{bx^3 dx}{a-c \times xx} - \frac{a^4 dx}{a-c \times xx},$$
 cioè  $\frac{bx dx}{a-c} - \frac{a^4 x^{-2} dx}{a-c},$  e

però l'integrale farà  $\frac{bxx}{2 \times a-c} - \frac{a^4 x^{-1}}{-1 \times a-c} \pm f,$  cioè

$$\frac{bxx}{2a-2c} + \frac{a^4}{a-c \times x} \pm f.$$

Sia  $\frac{bx^m dx - aax^{m-1} dx}{xx}$ ; questa equivale alle due

$$bx^{m-2} dx - aax^{m-3} dx,$$
 e però l'integrale farà  $\frac{bx^{m-1}}{m-1} -$

$$\frac{aax^{m-2}}{m-2} \pm f.$$

6. Se in oltre la formola differenziale complessa, sarà elevata a qualche potestà, il di cui esponente sia positivo, ed intero, ridotta essa attualmente alla data potestà, ciascun termine s'integrerà colla stessa regola.

7. Tutto ciò, che fin' ora è detto, procede quando nella formola differenziale nessun termine vi sia, in cui l'esponente della variabile sia l'unità negativa, come  $\frac{dx}{x}$ , o sia  $ax^{-1} dx$ , imperocchè secondo la regola l'integrale farebbe  $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$ , o sia  $\frac{ax^0}{0}$ , cioè infinito; il che nulla ci fa sapere.

8. In questi casi adunque bisogna ricorrere ad altri metodi. Due sono quelli, che servono: uno per mezzo d'una curva, che si chiama *Logaritmica*, ed anco *Logistica*, l'altro per mezzo di serie infinite. Delle serie infinite, delle quali in moltissimi altri casi si può fare uso, come si vedrà, ne parlerò nel secondo Capo.

9. Per ora, quanto alla Logaritmica, ella è una curva di tale proprietà, che prese nell'asse le assisse in proporzione aritmetica, le corrispondenti ordinate sono in proporzione geometrica. E però l'asse  $AD$  (Fig. 1.) si divida in parti eguali  $AB, BC, CD$  ec., su i punti  $A, B, C, D$  ec. si eriggano le perpendicolari  $AE, BF, CG, DH$  ec. tali, che sieno tra di loro in geometrica proporzione; i punti  $E, F, G, H$  ec. faranno  
nella

nella curva, e di nuovo dividendo in parti eguali le  $AB, BC$  ec., e sopra le divisioni alzando le perpendicolari nella stessa geometrica proporzione, si averanno altri punti intermedi, e finalmente moltiplicando in infinito le divisioni, avremo infiniti punti, cioè la curva stessa.

Diviso adunque l'asse in parti infinitissime, ed eguali, sia una di queste  $CM=dx$ , l'ordinata  $CG=y$ , e ad essa infinitamente prossima  $MO$ , farà adunque  $NO=dy$ . Sia un'altra ordinata  $DH=z$ , ed altre, quante si vuole, corrispondenti ad asse aritmeticamente proporzionali. Averanno adunque esse ordinate tra loro la medesima proporzione, ma per conseguenza faranno pure nella stessa proporzione le loro differenziali, adunque farà  $dy, dz :: y, z$ , o sia  $dy, y :: dz, z$ ; onde farà costante la ragione di  $dy$  alla  $y$ , e però assumendosi costante la  $dx$ , farà  $dy, y :: dx, a$ , cioè  $\frac{ady}{y} = dx$ , equazione della curva.

E' facile il vedere, che la sottangente di questa curva sarà sempre costante, imperocchè nella formola generale della sottangente  $(\frac{ydx}{dy})$  sostituito in luogo di  $y$  il valore dato dall'equazione della curva, avrassi  $\frac{ydx}{dy} = \frac{adydx}{dx dy} = a$ . Ma comechè la progressione geometrica crescente delle ordinate si può produrre in infiniti

to

10. , crescendo pure in infinito aritmeticamente le assisse , andrà in infinito la curva , e sempre allontanandosi dall'asse . E perchè la stessa progressione si può produrre ancora in infinito , ma decrescente , crescendo sempre le assisse , andrà da quest'altra parte in infinito la curva , ma sempre accostandosi all'asse senza toccarlo mai , e però sarà egli asintoto di essa curva .

10. In quest'altra maniera ancora , fra le molte , si può intendere descritta la Logaritmica .

Sia la retta indefinita  $MH$  ( *Fig. 2.* ) divisa in parti eguali  $MN$ ,  $NB$ ,  $BK$  ec. , e presa  $NI$  a piacere , sul punto  $I$  si alzi la normale  $IO$  di quella grandezza , che si vuole , indi si conduca  $NO$  , e sul punto  $A$  si alzi la normale  $AC$  fin che incontri  $NO$  prodotta in  $C$  ; dal punto  $B$  si tiri  $BC$  , e sul punto  $E$  si alzi la normale  $ED$  , che incontri  $BC$  prodotta in  $D$  ; dal punto  $K$  si tiri  $KD$  , e sul punto  $F$  si alzi la normale  $FP$  , che incontri  $KD$  prodotta nel punto  $P$  ; e nello stesso modo si continovi in infinito l'operazione , ed i punti  $O$  ,  $C$  ,  $D$  ,  $P$  ec. faranno nella curva logaritmica . Per avere i punti intermedj fra  $O$  ,  $C$  ,  $D$  ,  $P$  ec. si dividano per metà le porzioni  $MN$  ,  $NB$  , e ripetuta la stessa operazione , si avranno altri punti , e finalmente col moltiplicare in infinito le divisioni eguali nella retta  $MH$  , cioè col supporre infinitefime , ed eguali le porzioni  $MN$  ,  $NB$  ec. avremo infiniti punti , i quali ci segneranno la  
curva

curva logaritmica, la di cui sottangente, come apparisce dalla costruzione, farà sempre costante. Chiamata adunque  $NI = a$ , e poste  $\pm dx$  le infinitesime costanti porzioni dell'asse, sia l'ordinata  $GR = y$ ,  $GH = dx$ ,  $TS = dy$ ; per la similitudine de' triangoli  $STR, RGA$ , farà  $dy, dx :: y, a$ , cioè  $\frac{ady}{y} = dx$ , equazione della curva.

Da questa costruzione si deduce pure quello, che la prima suppone, vale a dire la primaria proprietà della logaritmica, che sieno in geometrica proporzione le ordinate, che corrispondono alle assisse in proporzione aritmetica. Imperocchè, supposte infinitesime le eguali porzioni dell'asse, l'archetto  $OC$  farà la tangente  $NO$  prodotta, l'archetto  $CD$  farà la tangente  $BC$  prodotta, l'archetto  $PD$  la tangente  $KD$  prodotta, e così di tutti gl'altri; saranno adunque simili i triangoli  $OIN, CAN$ , e però farà  $OI, CA :: NI, NA$ ; così pure per la similitudine de' triangoli  $CAB, DEB$  farà  $CA, DE :: BA, BE$ ; ma  $NI = BA, NA = BE$ , adunque farà  $OI, CA :: CA, DE$ , e così successivamente; e però le ordinate faranno in continua proporzione geometrica. Quindi anche considerando l'asse non diviso in parti infinitesime, ma finite, ed eguali, perchè le intermedie ordinate proporzionali fra  $IO$ , per esempio, e  $CA$  sono nè più, nè meno di numero delle intermedie fra  $CA$ , e  $DE$ , e così dell'altre; saranno pure le  $IO,$   
 $CA,$

*CA, DE* in proporzione geometrica corrispondenti ad asse in proporzione aritmetica. Anzi prese due ordinate a piacere, e prese due altre, dovunque si vuole, purchè la distanza fra la prima, e la seconda sia la stessa della distanza fra la terza, e la quarta, come farebbero *IO, CA, RG, SH*; sarà la prima alla seconda, come la terza alla quarta.

La curva logaritmica non si può geometricamente descrivere, bensì organicamente, e però è una curva meccanica, e l'impossibilità di essere geometricamente descritta è la stessa dell'impossibilità della quadratura dello spazio iperbolico, come si vedrà a suo luogo; quindi gl'integrali di quelle formole differenziali, che portano alla logaritmica, si dicono ancora dipendere dalla quadratura dell'iperbola.

Nella logaritmica adunque le porzioni dell'asse, o sia le asse prese da un punto fisso corrispondono alle ordinate in quella guisa appunto, che nelle tavole trigonometriche corrispondono i logaritmi alla serie naturale de' numeri.

11. Ciò posto sia (*Fig. 3.*) la logaritmica *DC*, la di cui sottotangente eguale all'unità, o pure, se si vuole, eguale alla costante *a*, e sia l'ordinata *AD* eguale alla sottotangente, cioè eguale all'unità, o sia alla costante *a*, che fa figura d'unità. Presa una qualunque asse *AB = x*, sia *BC = y*, ma l'equazione della  
b
curva

curva è  $\frac{ady}{y} = dx$ , adunque l'integrale di  $\frac{ady}{y}$  farà  $x$ ,  
 ma  $x = AB$ , ed  $AB$  è il logaritmo di  $BC$ , cioè di  $y$ ,  
 adunque servendosi del segno  $\int$  per significare integra-  
 le o somma, che vuol dire lo stesso, e del segno  $l$ ,  
 che vuol dire logaritmo, farà  $\int \frac{ady}{y} = ly$  nella logaritmi-  
 ca, la di cui sottangente sia  $= a$ . Isteffamente farà  
 $\int \frac{dy}{y} = ly$  nella logaritmica della sottangente  $= 1$ ;  
 $\int \frac{bdy}{y} = ly$  nella logaritmica della sottangente  $= b$ ;  
 $\int \frac{ady}{b+y} = l\overline{b+y}$  nella logaritmica della sottangente  $= a$ ,  
 cioè presa nella logaritmica la ordinata  $BC = AH = y$ ,  
 se ad essa si aggiungerà  $HK = b$ , e si condurrà  $KG$   
 parallela all'asintoto, e si abbasserà  $GE$  parallela ad  
 $AD$ , farà  $GE = y + b$ , e però  $AE = l\overline{b+y}$ .

12. Dalla natura della logaritmica chiaramente si  
 vede, che qualunque volta la quantità, di cui si vuole  
 il logaritmo, è quantità infinita, facendo essa figura di  
 ordinata infinita nella logaritmica, farà pure infinita  
 l'intercetta nell'asse fra essa, ed il punto  $A$ , e però in-  
 finito il logaritmo; e se essa farà eguale alla prima  $AD$ ,  
 cioè alla sottangente, il logaritmo farà eguale al zero;

e se sarà minore di  $AD$ , come sarebbe  $BA$ , il logaritmo sarà  $\Omega A$ , e negativo; e finalmente se sarà  $= \alpha$ , il logaritmo sarà infinito. Se la formola differenziale fosse  $\frac{dy}{y}$ , l'integrale sarebbe  $\int y$ , e se fosse  $\frac{dy}{a+y}$ , l'integrale sarebbe  $\int \sqrt{a+y}$ , ma se sarà  $\frac{dy}{a-y}$ , l'integrale sarà  $\int \sqrt{a-y}$ , e se sarà  $\frac{dy}{a-y}$ , l'integrale sarà  $-\int \sqrt{a-y}$ ,

intendendo questi logaritmi nella logaritmica della sottangente eguale all'unità. La ragione di ciò si è, che siccome l'integrale di  $\frac{dy}{y}$  è  $\int y$ , così il differenziale di

$\int y$  è  $\frac{dy}{y}$ , e generalmente parlando, il differenziale di

una quantità logaritmica è la frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della sottangente nel differenziale della quantità, ed il denominatore la quantità stessa,

adunque il differenziale di  $\int \sqrt{a+y}$  sarà  $\frac{dy}{\sqrt{a+y}}$ ; il differenziale di  $\int \sqrt{a-y}$  sarà  $\frac{dy}{\sqrt{a-y}}$ ; il differenziale di  $-\int \sqrt{a-y}$

sarà  $\frac{dy}{\sqrt{a-y}}$ , supposta la sottangente della logaritmica  $= \alpha$ ,

e quando non sia tale, si moltiplicheranno i numeratori dei differenziali nella data sottangente.

13. Ma poichè la logaritmica non è ordinate nega-

b 2

tive,



tive, pare, che non si saprebbe ritrovare la quantità, che corrisponda all'espressione  $\overline{l a - y}$ , cioè quale sia il logaritmo di  $a - y$ , qualora  $a - y$  sia quantità negativa, cioè  $y$  maggiore di  $a$ ; ma in questo caso avvertasi, che è la stessa cosa  $\overline{l a - y}$ , e  $\overline{l y - a}$ , e che in tale supposto essendo  $y - a$  positiva essa può essere ordinata nella logaritmica, ed in fatti differenziando il primo logaritmo si  $\hat{a} \frac{-dy}{a-y}$ , differenziando il secondo si  $\hat{a} \frac{dy}{y-a}$ , e mutando i segni al numeratore, e denominatore, si  $\hat{a} \frac{-dy}{a-y}$ , che è lo stesso del primo:

14. Dalla proprietà della logaritmica altre se ne deducono intorno alle quantità logaritmiche, ed in primo luogo, che il multiplo, o submultiplo di un logaritmo farà il logaritmo della quantità elevata alla potestà del dato numero, così  $2 \overline{l x} = \overline{l x x}$ ;  $3 \overline{l x} = \overline{l x^3}$ ;  $\frac{1}{2} \overline{l x} = \overline{l \sqrt{x}}$ ;  $\frac{1}{3} \overline{l x} = \overline{l \sqrt[3]{x}}$ ;  $n \overline{l x} = \overline{l x^n}$ ;  $\frac{1}{n} \overline{l x} = \overline{l x^{\frac{1}{n}}}$ , e la ragione si è, perchè, presa nella logaritmica una qualunque ordinata  $OP = y$ , il di cui logaritmo è  $AO$  (Fig. 3.), se si faranno  $AO, OS, SV$  ec. eguali tra loro, faranno  $AO, AS, AV$  aritmeticamente proporzionali, e le ordinate  $AD, OP, ST, VI$  ec. faranno geometricamente proporzionali, onde posta  $AD$  eguale all'unità,  $OP = y$ , farà  $ST = yy, VI = y^3$  ec., ma  $AS$  doppia di  $AO$  è logaritmo

garitmo di  $yy$ , cioè  $lyy$ , ed  $AV$  tripla di  $AO$  è  $ly^3$ ; adunque  $2ly = lyy$ ,  $3ly = ly^3$ . Così pure, posta  $AO = ly$ , e divisa per metà in  $M$ , farà  $MN = \sqrt{y}$ , e però  $AM = \frac{1}{2}AO$ , cioè  $\frac{1}{2}ly$ , farà  $ly^{\frac{1}{2}}$ . Itteffamente posta  $QR = y$ , e divisa  $AQ$  in tre parti eguali in  $M$ , ed  $O$ , farà  $MN = \sqrt[3]{y}$ , cioè  $y^{\frac{1}{3}}$ , ma  $AM = \frac{1}{3}ly$ , adunque  $\frac{1}{3}ly = ly^{\frac{1}{3}}$ , e così degl'altri.

Nè devesi ommettere di avvertire, che l'integrale di  $\frac{-dy}{y}$  non è solo  $-ly$ , come si è veduto al num.

12., ma che può esprimersi anco per  $l\frac{1}{y}$ , o sia  $ly^{-1}$ ; conciosiacchè presa nella logaritmica una qualunque ordinata  $OP = y$ , e fatta  $A\Omega = AO$ , farà per la natura della curva  $OP$ ,  $AD :: AD, \Omega\Lambda$ , cioè  $y, 1 :: 1, \Omega\Lambda = 1$ ; ma  $A\Omega$  è il logaritmo negativo di  $OP$ , cioè di  $y$ , ed è assieme il logaritmo di  $\Omega\Lambda$ , dunque farà  $-ly = l\frac{1}{y} = ly^{-1}$ , vale a dire, che il logaritmo negativo di una qualunque quantità farà lo stesso del logaritmo positivo della frazione, di cui essa quantità formi il denominatore, o sia della quantità stessa con l'esponente negativo; così farà  $-mly = l\frac{1}{y^m} = ly^{-m}$ .

15. In oltre la somma di due, di tre ec. logaritmi farà

farà eguale al logaritmo del prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi, e la differenza di due, di tre ec. logaritmi farà eguale al logaritmo della frazione, il di cui numeratore sia il prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi positivi, ed il denominatore sia il prodotto delle quantità, delle quali sono i logaritmi negativi. Imperocchè sia  $OP = y$ ,  $QR = z$ , farà  $AO = ly$ ,  $AQ = lz$ ; si prenda  $QB = AO$ , farà  $AB = ly + lz$ ; ma  $AB$  è pure il logaritmo di  $BC$ , e per la proprietà della logaritmica,  $BC$  è la quarta proporzionale di  $AD$ ,  $OP$ ,  $QR$ , cioè  $= yz$ , adunque farà  $AB = ly + lz = lzy$ . Sia un'altra ordinata  $MN = p$ , si prenda  $BV = AM$ , farà  $AV = AM + AB = lp + lzy$ ; ma  $AV$  è il logaritmo di  $VI$ , ed  $VI = pyz$ , adunque  $lp + ly + lz = lpyz$ .

Sia di nuovo  $QR = z$ ,  $OP = y$ , e si prenda  $QM = AO$ , farà  $AM = AQ - AO = lz - ly$ ; ma  $AM$  è il logaritmo di  $MN$ , e per la stessa proprietà della logaritmica,  $MN = \frac{z}{y}$ , adunque  $AM = lz - ly = l\frac{z}{y}$ . Sia un'altra ordinata  $BC = p$ , e si prenda  $\Sigma A = BM$ , farà  $\Sigma A = -AB + AM = -lp + l\frac{z}{y}$ ; ma  $\Sigma A$  è il logaritmo di  $\Sigma \Pi$ , ed  $\Sigma \Pi$  è  $= \frac{z}{py}$  ( per essere la quarta pro-

por-

porzionale di  $BC, MN, AD$ ), adunque  $lz - ly - lp = \int \frac{z}{py}$  ec.

16. Siccome negl' altri casi, così ancora in questi delle integrazioni per via di logaritmi, si deve sempre aggiungere la costante, cioè il logaritmo di quantità costante arbitraria, da determinarsi poi ne' casi particolari.

17. Ma quando le formole differenziali proposte da integrarsi sieno frazioni col denominatore complesso, si possono dare alcuni casi, ne' quali è facile avere il loro integrale col mezzo della logaritmica, e farà ogni qual volta il numeratore della frazione sia il differenziale preciso del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo di esso differenziale, anzi ogni qual volta gli sia proporzionale, ed in questi casi l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo, o proporzionale di esso logaritmo.

Così l'integrale di  $\frac{2x dx}{aa + xx}$  farà  $\int \frac{2x dx}{aa + xx}$ ; l'integrale di  $-\frac{2x dx}{aa - xx}$  farà  $\int \frac{2x dx}{aa - xx}$ ; l'integrale di  $\frac{3xx dx}{a^3 + x^3}$  farà  $\int \frac{3xx dx}{a^3 + x^3}$ ; l'integrale di  $\frac{4x dx}{aa + xx}$  farà  $2 \int \frac{4x dx}{aa + xx}$ , cioè  $\int \frac{4x dx}{aa + xx}^2$ ; l'integrale di  $\frac{x dx}{aa + xx}$  farà  $\frac{1}{2} \int \frac{x dx}{aa + xx}$ ,  
cioè

cioè  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}^{\frac{1}{2}}$ ; l'integrale di  $\frac{xx dx}{a^2 + x^2}$  farà  $\frac{1}{2} \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ ,

cioè  $\int \sqrt{a^2 + x^2}$ ; e generalmente l'integrale di  $\frac{mx^{n-1} dx}{a^n \pm x^n}$  farà  $\pm \frac{m}{n} \int \frac{dx}{a^n \pm x^n}$ , cioè  $\pm m \int \frac{dx}{a^n \pm x^n}^{\frac{1}{n}}$ ,

o sia  $\pm \int \frac{dx}{a^n \pm x^n}^{\frac{m}{n}}$ . Così l'integrale di  $\frac{adx - xdx}{ax - x^2}$

farà  $\int \frac{dx}{ax - x^2}$ ; l'integrale di  $\frac{\frac{1}{2} adx - xdx}{ax - x^2}$  farà

$\int \sqrt{ax - x^2}$ , e così degli altri a piacere, presi questi logaritmi nella logaritmica della sottangente = 1.

18. Ma se il numeratore della frazione non è della forma, che abbiamo considerata, quando però il denominatore sia tale, che nessuno de' suoi componenti lineari sia immaginario, cioè quando tutte le radici, dal prodotto delle quali egli è nato, sieno reali, allora si proceda nella seguente maniera.

19. Ed in primo luogo le radici del denominatore, o saranno tutte eguali tra loro, o no; se sono tutte eguali, come le avrebbe la formola  $\frac{x^m dx}{x \pm a^n}$ , si pon-

ga  $x \pm a = z$ , e però  $dx = dz$ ,  $x^m = z \mp a$ ,  $x \pm a = z^n$ ;

e

e sostituendo nella formola questi valori, farà  $\frac{z \mp a^m dz}{z^n}$ .

Fatta pertanto attualmente la potestà  $m$ , ciascun termine si saprà integrare, o algebricamente, o trascendentemente per mezzo della logaritmica; quindi restituito in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , avremo l'integrale della proposta formola  $\frac{x^m dx}{x \pm a^n}$ .

Sia per esempio  $\frac{x^3 dx}{x-a^3}$ . Pongo  $x-a=z$ , e però

$$dx = dz, \quad x^3 = z^3 + 3azz + 3aaz + a^3, \quad \frac{1}{x-a} = \frac{1}{z},$$

fatte le sostituzioni, farà  $\frac{z^3 dz + 3azz dz + 3aaz dz + a^3 dz}{z^3}$ ,

ed integrando,  $z + 3/z - \frac{3aa}{z} - \frac{a^3}{2z^2}$ , e restituendo in

luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , avremo finalmente

$$\int \frac{x^3 dx}{x-a} = x-a + \sqrt{x-a} - \frac{3aa}{x-a} - \frac{a^3}{2 \times \frac{x-a}{2}}$$

tegrale differenziato restituirà la formola proposta da integrarsi.

20. Che se le radici del denominatore non faranno tutte eguali, ma o tutte disuguali, o miste d'uguali, e d'inequali, allora conviene prima preparare la formola col rendere positivo il termine della massima  
c potestà

potestà della variabile nel denominatore, se fosse negativo, indi liberarlo da' coefficienti, se ne à, di poi se la variabile nel numeratore, quando vi sia, fosse elevata a potestà maggiore, o eguale alla massima, che à nel denominatore, debbesi dividere il numeratore per lo denominatore fin' a tanto, che l'esponente della variabile in quello sia minore, che in questo; in fine si trovino algebraicamente le radici del denominatore. Sia per cagion d'esempio la formola  $\frac{aadx}{aa - 4xx}$ . Mutan-

do i segni, e dividendo per 4, farà  $\frac{\frac{1}{4}aadx}{xx - \frac{1}{4}aa}$ , cioè

$\frac{\frac{1}{4}aadx}{x - \frac{1}{2}a \times x + \frac{1}{2}a}$  : Sia  $\frac{aadx}{2xx + 4ax + 2bx + 2ab}$ , dividendo per 2, farà  $\frac{\frac{1}{2}aadx}{xx + 2ax + bx + 2ab}$ , cioè  $\frac{\frac{1}{2}aadx}{x + 2a \times x + b}$ .

Se nel numeratore vi fosse stata la variabile, ed elevata a maggiore potestà, che nel denominatore, si avrebbe fatta l'attual divisione, per cui avremmo avuti degl'intieri, e de' rotti: gl'intieri si tratterebbero nelle maniere fin'ora spiegate; i rotti nella seguente.

21. Sia la frazione  $\frac{\frac{1}{2}aadx}{x + 2a \times x + b}$ , dico: che questa sarà eguale a due frazioni, il numeratore delle quali

quali sia lo stesso di questa, ed i denominatori sieno: della prima il prodotto d'una delle radici nella differenza della quantità costante dell'altra radice, e della quantità costante della radice posta; della seconda sia il prodotto dell'altra radice nella differenza della costante della prima radice, e della costante di questa.

$$\frac{1}{2} a a d x = \frac{1}{2} a a d x + \frac{1}{2} a a d x ;$$

$$\frac{\quad}{x+2a \times x+b} \quad \frac{\quad}{x+2a \times b-2a} \quad \frac{\quad}{x+b \times 2a-b}$$

e se le radici fossero tre, quattro ec. si proceda sempre collo stesso metodo; ed in fatti riducendo al comune denominatore le frazioni in tal guisa ritrovate, restituiranno esse la frazione prima onde sono nate.

Gli integrali adunque di tali frazioni così spezzate, i quali faranno sempre in nostra mano, supposta la logaritmica, faranno gli integrali della proposta formola; e però farà

$$\int \frac{1}{2} a a d x = \frac{1}{2} a \int \frac{1}{x+b} - \frac{1}{2} a \int \frac{1}{x+2a}, \text{ cioè}$$

$$\frac{\quad}{x+2a \times x+b} \quad \frac{\quad}{2a-b} \quad \frac{\quad}{2a-b}$$

$$\frac{1}{2} a \int \frac{1}{x+2a}, \text{ o sia } \frac{a}{2a-b} \int \frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+2a}} \text{ nella logaritmica}$$

della sottangente = a.

Sia  $\frac{1}{4} a a d x$  : essa si spezzerà nelle

$$x + \frac{1}{2} a \times x - \frac{1}{2} a$$



due  $\frac{\frac{1}{4} a^2 dx}{x + \frac{1}{2} a \times -\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a} + \frac{\frac{1}{4} a^2 dx}{x - \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a}$

cioè  $\frac{\frac{1}{4} a^2 dx}{x - \frac{1}{2} a} - \frac{\frac{1}{4} a^2 dx}{x + \frac{1}{2} a}$ , e però farà

$$\int \frac{\frac{1}{4} a^2 dx}{x + \frac{1}{2} a \times x - \frac{1}{2} a} = \frac{1}{4} \int \frac{x - \frac{1}{2} a}{x + \frac{1}{2} a}; \text{ o fia } =$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x - \frac{1}{2} a}}{\sqrt[4]{x + \frac{1}{2} a}}, \text{ nella logaritmica della sottangente } = a.$$

Sia  $\frac{a^3 dx}{x+a \times x-b \times x+c}$ , essa si spezzerà nelle tre

$$\frac{a^3 dx}{x+a \times -b-a \times c-a} + \frac{a^3 dx}{x-b \times a+b \times c+b} + \frac{a^3 dx}{x+c \times a-c \times -b-a}$$

e però farà  $\int \frac{a^3 dx}{x+a \times x-b \times x+c} = \frac{aa}{a+b \times a-c} \int \frac{1}{x+a} +$

$$\frac{aa}{a+b \times c+b} \int \frac{1}{x-b} - \frac{aa}{a-c \times b+a} \int \frac{1}{x+c} \text{ nella logaritmica della sottangente } = a.$$

Sia  $\frac{-a^3 dx}{x^3 - aax}$ , cioè  $\frac{-a^3 dx}{x+a \times x-a \times x+0}$ ; essa

fi

si spezzerà nelle tre

$$\frac{-a^2 dx}{x+a \times -2a \times 0-a} \quad \frac{-a^2 dx}{x-a \times 2a \times 0+a} \quad \frac{-a^2 dx}{x+0 \times a-0 \times -a-0},$$

cioè  $\frac{-a dx}{2 \times x+a} - \frac{a dx}{2 \times x-a} + \frac{a dx}{x}$ ; e però farà

$$\int \frac{-a^2 dx}{x^2 - aa} = \int x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{xx - aa}, \text{ cioè } = \int \frac{x}{\sqrt{xx - aa}}$$

nella logaritmica della sottangente =  $a$ .

22. Se il denominatore della formola farà misto di radici eguali, ed ineguali, come per esempio

$$\frac{a^2 dx}{x-b^2 \times x+c}, \text{ allora si consideri la formola, come}$$

se fosse  $\frac{a^2 dx}{x-b \times x+c}$ , e spezzata questa al solito, farà

$$\frac{a^2 dx}{x-b \times x+c} = \frac{a^2 dx}{x-b \times c+b} + \frac{a^2 dx}{x+c \times -b-c}, \text{ adunque}$$

moltiplicando i denominatori per  $x-b$ , altra radice della proposta formola, farà anco

$$\frac{a^2 dx}{x-b^2 \times x+c} = \frac{a^2 dx}{x-b^2 \times c+b} + \frac{a^2 dx}{x+c \times x-b \times -b-c},$$

ma il primo termine dell'omogeneo di comparazione è il denominatore di radici tutte eguali, ed il secondo di radici tutte disuguali; adunque l'uno, e l'altro maneggiato, come si è detto, potremo avere l'integrale di

$$\frac{a^2 dx}{x-b^2 \times x+c}, \text{ il quale farà in parte algebrico, ed in}$$

in parte logaritmico , cioè  $\frac{aa}{b+c} \int \frac{x+c}{x-b} \frac{-a^2}{x-b \times b+c}$  ,

preso il logaritmo nella logaritmica della sottangente  $\pm a$  .

Se le radici eguali faranno in maggior numero, si dovrà nello stesso modo ripetere l'operazione fin che sia necessario .

23. Rimane ora da considerarsi il caso, in cui le frazioni abbiano in oltre nel numeratore la variabile a qualunque potestà, intendendo però sempre, come è stato avvertito di sopra, che la potestà di essa variabile nel numeratore sia minore della massima, che è nel denominatore, e non lo essendo, si riduca tale con l'attual divisione .

In questi casi si tratti la formola nello stesso modo, come se nel numeratore non vi fosse potestà alcuna della variabile, spezzandola nel modo spiegato in altrettante, quante sono le radici del denominatore, indi, se l'esponente della variabile nel numeratore della data formola è di numero dispari, si mutino i segni a' numeratori delle ritrovate frazioni, e se è di numero pari, si lascino ai numeratori quei segni che hanno; di poi ciascun numeratore si moltiplichi per tanta potestà della costante di quella radice, che è nel denominatore, quanta è la potestà della variabile nel numeratore della proposta formola, prefiggendo ad essa costante

stante elevata a tale potestà quel segno, che porta il segno naturale, che à nel denominatore.

Sia  $\frac{bbx dx}{x+a \times x-a}$ . Considerata questa, come se nel numeratore la variabile non vi fosse, si spezzerà nelle due  $\frac{bbx}{x+a \times -2a} + \frac{bbx}{x-a \times 2a}$ ; ma perchè nel numeratore vi è la variabile elevata alla potestà dell'unità, si mutino i segni a' numeratori, e si moltiplichino relativamente per la costante di quella radice, che è nel suo denominatore, cioè la prima per  $a$ , la seconda per  $-a$ , ed avremo

$$\frac{bbx dx}{x+a \times x-a} = \frac{-bbx \times a}{x+a \times -2a} - \frac{bbx \times -a}{x-a \times 2a},$$

cioè =  $\frac{bbx}{2 \times x+a} + \frac{bbx}{2 \times x-a}$ , e però farà

$$\int \frac{bbx dx}{x+a \times x-a} = b \int \sqrt{x+a} + b \int \sqrt{x-a}, \text{ o fia.}$$

$$= b \int \sqrt{xx-aa}, \text{ nella logaritmica della sottangente } = b;$$

o pure, se si vuole, farà =  $bb \int \sqrt{xx-aa}$  nella logaritmica della sottangente = 1.

Ma era superfluo il ridurre questa formola alle due frazioni, poichè essendo essa  $\frac{bbx dx}{xx-aa}$ , il numeratore è appunto la metà del differenziale del denominatore, e però

però senz' altra operazione l' integrale farà ; come al num. 17. si è detto ,  $bb \int \sqrt{xx - aa}$  nella logaritmica della sottangente = 1 .

Sia  $\frac{x^4 dx}{xx - aa \times x + b}$  , cioè  $\frac{x^4 dx}{x^3 + bxx - aax - aab}$  , e diviso il numeratore per lo denominatore , avremo  $\frac{xdx - bx^3 dx + aaxxdx + aabxdx}{x^3 + bxx - aax - aab}$  , e diviso di nuovo

il termine  $-bx^3 dx$  per lo denominatore , avremo  $\frac{x^4 dx}{xx - aa \times x + b} = \frac{xdx - bdx + aaxxdx + bbxxdx - aabbdx}{xx - aa \times x + b}$  .

Ma i due primi termini sono intieri , e l' ultimo non è la variabile nel numeratore , e però si fa maneggiare ; adunque rimane da ridursi solamente l' altro termine , cioè  $\frac{aa + bb \times xxdx}{xx - aa \times x + b}$  .

Considerato questo , come se non avesse la variabile nel numeratore , farebbe  $\frac{aa + bb \times dx}{xx - aa \times x + b} =$

$$\frac{aa + bb \times dx}{x + b \times -aa + bb} + \frac{aa + bb \times dx}{x + a \times -2ab + 2aa} + \frac{aa + bb \times dx}{x - a \times 2ab + 2aa} ,$$

e per tanto farà  $\frac{aa + bb \times xxdx}{x + b \times xx - aa} = \frac{aa + bb \times bbdx}{x + b \times -aa + bb} +$

$$\frac{aa + bb \times aadx}{x + a \times -2ab + 2aa} + \frac{aa + bb \times aadx}{x - a \times 2ab + 2aa} , \text{ onde finalmen-}$$

te

te poi  $\frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = x dx - b dx + \frac{-aabb dx}{x + b \times xx - aa}$

$$\frac{aa + bb \times b b dx}{x + b \times -aa + bb} + \frac{aa + bb \times a a dx}{x + a \times -2ab + 2aa} + \frac{aa + bb \times a a dx}{x - a \times 2ab + 2aa}$$

e se vogliamo spezzare anche il termine  $\frac{-aabb dx}{x + b \times xx - aa}$ ,

per avere in fine l'integrale della proposta formola,

farà  $\frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = x dx - b dx + \frac{b^2 dx}{x + b \times -aa + bb} + \frac{a^2 dx}{x + a \times 2aa - 2ab} + \frac{a^2 dx}{x - a \times 2ab + 2aa}$ . Adunque in-

tegrando avremo  $\int \frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = \frac{xx - bx - \frac{b^2}{aa - bb} \int \sqrt{x + b} + \frac{a^2}{2aa - 2ab} \int \sqrt{x + a} + \frac{a^2}{2aa + 2ab} \int \sqrt{x - a}$ ,

presi tali logaritmi nella logaritmica della sottangente = 1.

Così in queste, come in tutte l'altre integrazioni, che si faranno, s'intenda doverfi aggiungere la costante, qualora sarà da me per brevità ommessa, il che basterà d'avere qui avvertito.

24. Ma le formole differenziali possono avere, e spesso hanno denominatori tali, de' quali non si possono ritrovare algebricamente le radici, ciò non ostante, però serve egualmente bene la regola delle frazioni an-

d

che

che in questi casi; imperciocchè si tratti il denominatore, come se fosse un' equazione, e col mezzo delle intersecazioni delle curve si trovino geometricamente in linee i valori della variabile in quella guisa appunto, che si costruiscono i problemi solidi, e tali valori o linee si chiamino  $A, B, C$ , ec. coi segni positivi, o negativi secondo, che sono quantità positive, o negative; ciascuno di questi sottratto dalla variabile formerà le radici del denominatore di modo, che la proposta formola differenziale si convertirà in una di questa forma  $\frac{x^n dx}{x - A \times x + B \times x - C}$  ec.

stesso modo si operi, come si è operato nel caso delle radici algebriche.

25. E' facile a vedersi, che l'addotta regola serve solamente nel caso, che le radici del denominatore sieno tutte reali, perchè altrimenti essendo, spezzata la formola in altre frazioni, tante di queste farebbero immaginarie, ed in conseguenza immaginarj gl'integrali, quante sono le radici immaginarie nel denominatore della proposta formola differenziale,

26. Quando adunque il denominatore delle proposte formole differenziali sia composto di radici immaginarie o in tutto, o in parte, fa d'uopo ricorrere ad altre maniere; ed in primo luogo abbiano le date formole

mole il denominatore di due sole dimensioni, cioè di due radici immaginarie, e sia per esempio  $\frac{bbdx}{xx+aa}$ .

L'integrale di questa formola, e di tutte l'altre simili dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo: diffi rettificazione, o quadratura, poichè data l'una, è vicendevolmente data l'altra.

Sia pertanto (Fig. 4.) il quadrante di circolo  $ACG$ , il raggio  $AC=a$ ,  $CD$  tangente  $=x$ , farà  $AB = \frac{aa}{\sqrt{aa+xx}}$ ,

$$CB = a \frac{-aa}{\sqrt{aa+xx}}, \text{ ed } EB = \frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}.$$

Condotta  $AK$  infinitamente prossima ad  $AD$ , farà  $EO$  la flussione, o differenza dell'arco  $CE$ ; e tirata dal punto  $O$  la retta  $OM$  parallela ad  $EB$ , ed  $EH$  parallela ad  $AC$ , farà  $HE$  la differenziale di  $CB$ ,  $HO$  la

differenziale di  $EB$ , e però  $EH = \frac{aaxdx}{aa+xx^{\frac{3}{2}}}$ , ed

$$HO = \frac{a^2 dx}{aa+xx^{\frac{3}{2}}}; \text{ adunque l'archetto } EO = \sqrt{HE^2 + HQ^2}$$

$$\text{farà} = \sqrt{\frac{a^6 dx^2 + a^4 xx dx^2}{aa+xx}} = \frac{aadx}{aa+xx}; \text{ adunque l'integra-}$$

le della formola  $\frac{aadx}{aa+xx}$  farà l'arco  $CE$  della tangente

$CD=x$ , e del raggio  $CA=a$ .



Ripiglio ora la formola  $\frac{bbdx}{aa+xx}$  : moltiplicando il numeratore, e denominatore per  $aa$ , farà essa  $\frac{bb}{aa} \times \frac{aadx}{aa+xx}$  ; ma l'integrale di  $\frac{aadx}{aa+xx}$  è l'arco di circolo, che abbia per tangente la  $x$ , ed il raggio  $= a$ , farà adunque  $\int \frac{bbdx}{aa+xx} =$  al quarto proporzionale di  $aa$ , di  $bb$ , e dell'arco di circolo col raggio  $= a$ , tangente  $= x$ .

Sia la formola  $\frac{aamdxx}{nxx+nab}$  : come che moltiplicando il numeratore, e denominatore per  $b$ , equivale a quest'altra  $\frac{am}{nb} \times \frac{abdx}{nxx+ab}$ , farà  $\int \frac{aamdxx}{nxx+nab} =$  al quarto proporzionale di  $nb$ , di  $am$ , e dell'arco di circolo col raggio  $= \sqrt{ab}$ , e tangente  $= x$ ; e lo stesso si dica di tutte l'altre simili.

27. Per l'oppoſto farà adunque il differenziale di un'arco qualunque di circolo il prodotto del quadrato del raggio nella differenza della tangente diviſo per la ſomma del quadrato dello ſteſſo raggio, e del quadrato della tangente.

E come agl'altri integrali, o ſommatorie deſi aggiungere ſempre la conſtante, così a queſti ancora di rettificazioni di circolo, per avere le ſommatorie compite, deſi aggiungere un'arco conſtante dello ſteſſo circolo,

circolo, imperciocchè la differenza per cui può crescere, o calare l'arco così composto del fluente; e del costante, non farà mai altro che il differenziale dell'arco fluente; adunque ad esso differenziale può competere per integrale la somma dell'arco fluente con qualunque arco costante del medesimo circolo. Supponiamo, che sia  $x$  la tangente d'un'arco del raggio  $= a$ , e sia  $b$  la tangente di un'altro arco costante del medesimo circolo; si sa, che la tangente della somma di questi due archi ( num. 108. Lib. I. ) farà  $= \frac{aab + aax}{aa - bx}$ ,

ma il differenziale di questa moltiplicato nel quadrato del raggio, ed il prodotto diviso per lo quadrato del raggio più il quadrato della stessa tangente si trova essere  $\frac{aax}{aa + xx}$ , che è il differenziale dell'arco fluente; adunque ec.

Se fosse la formola  $\frac{aadx}{aa + xx - 2bx + bb}$ , essendo

$xx - 2bx + bb$  un quadrato, si faccia  $x - b = z$ , e sostituendo avremo  $\frac{aadz}{aa + zz}$ , e però  $\int \frac{aadz}{aa + zz} =$  all' arco

di circolo del raggio  $= a$ , tangente  $= z$ , ma  $z = x - b$ ; adunque  $\int \frac{aadx}{aa + xx - 2bx + bb} =$  all' arco di circolo del rag-

gio  $= a$ , tangente  $= x - b$ , qualora però sia  $x$  maggiore di  $b$ ; ma presa  $x$  minore di  $b$ , l'integrale farà — arco di circolo col medesimo raggio, e tangente;

ed

ed in fatti differenziando, avremo  $\frac{aadx}{aa + bb - 2bx + xx}$ ,

la stessa formola di prima.

Sia proposta la formola  $\frac{4abdx + 3bxdx}{xx - 4ax + 6aa}$ . Si faccia spa-

rire il secondo termine nel denominatore col porre  $x = y + 2a$ . Fatte le sostituzioni, farà  $\frac{4abdy + 3bydy + 6aby}{yy + 2aa}$ , cioè  $\frac{10abdy}{yy + 2aa} + \frac{3bydy}{yy + 2aa}$ .

L'integrale del primo termine farà adunque il terzo proporzionale di  $a$ , di  $5b$ , e dell'arco di circolo col raggio  $= \sqrt{2aa}$ , tangente  $= y$ ; del secondo farà

$\int \frac{\sqrt{yy + 2aa}^{\frac{3}{2}}}{yy + 2aa}$  nella logaritmica della sottangente  $= b$ . Adunque restituendo in luogo della  $y$  il suo valore  $x - 2a$ , l'integrale della formola  $\frac{4abdx + 3bxdx}{xx - 4ax + 6aa}$  farà il

quarto proporzionale di  $a$ ,  $5b$ , e dell'arco di circolo col raggio  $= \sqrt{2aa}$ , tangente  $= x - 2a$ , con di più  $\int \frac{\sqrt{xx - 4ax + 6aa}^{\frac{3}{2}}}{xx - 4ax + 6aa}$  nella logaritmica della sottangente  $= b$ .

28. Passando ora a quelle formole differenziali, che contengono segni radicali, cioè quantità elevate a potestà di esponente rotto, se la formola farà, o si potrà

ridurre

ridurre ad esser tale, che l'incognita sotto il segno non ecceda la prima dimensione, e fuori del segno sia potestà positiva, allora faranno esse sempre algebraicamente integrabili, e si avranno le integrazioni col servirsi d'una semplicissima sostituzione, cioè col porre la quantità sotto il segno eguale ad una nuova variabile.

Sia per tanto  $adx \sqrt{ax - aa}$ . Si ponga  $\sqrt{ax - aa} = z$ , e però  $x = \frac{zz + aa}{a}$ ,  $dx = \frac{zdz}{a}$ , e fatte le sostituzioni, avremo  $zdz$ , ed integrando  $\frac{z^3}{3}$ , e restituendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , farà  $\frac{z}{3} \times \frac{ax - aa}{z^2}$  l'integrale della proposta formola.

Se la formola fosse stata  $\frac{adx}{\sqrt{ax - aa}}$ , procedendo

nello stesso modo averemmo per integrale  $z \times \frac{1}{ax - aa}^{\frac{1}{2}}$ . Sia  $x dx \sqrt[4]{a - x}$ ; posta  $\sqrt[4]{a - x} = z$ , e però  $x = a - z^4$ ,  $dx = -4z^3 dz$ , e fatte le sostituzioni, avrassi  $-4az^3 dz + 4z^3 dz$ , ed integrando  $-\frac{4az^5}{5} + \frac{4z^9}{9}$ , e restituendo in

luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , farà  $-\frac{4a}{5} \times \frac{a - x}{a - x^4}^{\frac{5}{4}} + \frac{4}{9} \times \frac{2}{a - x^4}$ .

Se

Se la formola fosse stata  $\frac{xxdx}{\sqrt{a-x}}$ , procedendo

$$\sqrt{a-x}$$

nello stesso modo avrebbesi per integrale

$$-\frac{4a}{3} \times \frac{\sqrt{a-x}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7} \times \frac{\sqrt{a-x}^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}.$$

Sia  $xxdx \sqrt{a+x}$ ; posta  $\sqrt{a+x} = z$ , e però  $x = zz - a$ ,  $dx = 2zdz$ ,  $xx = \overline{zz - a}^2$ , e fatte le sostituzioni, avremo  $\overline{zz - a}^2 \times 2zdz$ , cioè  $2z^6 dz - 4az^4 dz + 2aazzdz$ , ed integrando,  $\frac{2z^7}{7} - \frac{4az^5}{5} + \frac{2aaz^3}{3}$ , e restituendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , farà finalmente  $\frac{2}{7} \times \frac{\sqrt{a+x}^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{4a}{5} \times \frac{\sqrt{a+x}^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{2aa}{3} \times \frac{\sqrt{a+x}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$  l'integrale cercato.

Se la formola fosse  $\frac{xxdx}{\sqrt{a+x}}$ , farebbe l'integrale

$$\sqrt{a+x}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{a+x}^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{4a}{3} \times \frac{\sqrt{a+x}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2aa \times \frac{\sqrt{a+x}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}.$$

Sia  $xxdx \sqrt{a+x^3}$ , cioè  $xxdx \times \frac{\sqrt{a+x^3}}{x^2}$ : posta al solito  $\frac{\sqrt{a+x^3}}{x^2} = z$ , e però  $x = z^{\frac{2}{3}} - a$ ,  $dx = \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}-1} dz$ ,

e fatte

e fatte le sostituzioni, sarà  $z^{\frac{2}{3}} - a \times \frac{2z^{\frac{2}{3}} dz}{3}$ , cioè

$$\frac{2z^{\frac{4}{3}}}{3} dz - \frac{2az^{\frac{2}{3}}}{3} dz, \text{ ed integrando, } \frac{2z^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{2az^{\frac{5}{3}}}{5},$$

e restituendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , sarà

$$\frac{2}{7} \times \frac{a+x^2}{a+x^2}^{\frac{7}{3}} - \frac{2a}{5} \times \frac{a+x^2}{a+x^2}^{\frac{5}{3}}.$$

Se la formola fosse  $\frac{x dx}{a+x^2}$ , avremmo per inte-

$$\text{grale } 2\sqrt{a+x} + \frac{2a}{\sqrt{a+x}}.$$

29. Generalmente: sia  $ax^t dx \times \frac{1}{a+x^{\frac{m}{n}}}$ , e sieno gli esponenti  $t, m, n$  numeri interi positivi; posta al solito  $\frac{a+x^{\frac{m}{n}}}{a+x^{\frac{m}{n}}} = z$ , e però  $a+x = z^{\frac{n}{m}}$ ,  $dx = \frac{n}{m} z^{\frac{n}{m}-1} dz$ ,

$x^t = z^{\frac{n}{m}t} - a$ , e fatte le sostituzioni, la formola sarà

$$z^{\frac{n}{m}t} - a \times \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m}} dz^t, \text{ e fatta attualmente la potestà } t,$$

ciascun termine, come è chiaro, sarà algebricamente integrabile, ne' quali termini integrati restituito in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , avremo l'integrale algebrico della proposta formola. e 30.

30. Se l'esponente  $m$  fosse negativo di modo, che la quantità sotto il segno passasse nel denominatore, nel qual caso l'esponente  $m$  viene ad essere positivo; cioè la formola fosse  $\frac{ax^t dx}{a+x^{\frac{m}{n}}}$ , fatte le stesse sostituzioni,

avremmo  $z^{\frac{n}{m}-a} \times \frac{an}{m} z^{\frac{n-2}{m}} dz$ , e fatta attualmente la potenza  $t$ , sarebbe pure ogni termine algebricamente integrabile, salvi que' casi, ne' quali s'infinita la potenza  $z^{-1} dz$ , che obbliga a' logaritmi.

Ma se l'esponente  $t$  sarà negativo, non saranno algebricamente integrabili le due suddette formole, saranno bensì libere da' radicali, e ridotte alle quadrature del circolo, e dell'iperbola, come si vedrà a suo luogo.

31. Ma quand'anche la variabile sotto il segno sia elevata a qualunque potenza maggiore dell'unità, purchè la quantità fuori del segno sia la precisa differenziale, o una proporzionale qualunque alla differenziale della quantità sotto il segno, per mezzo della stessa semplicissima sostituzione si avranno gl'integrali delle formole differenziali, i quali integrali saranno sempre algebrici, e però

Sia  $2x dx \sqrt{xx+aa}$ . Pongo  $\sqrt{xx+aa} = z$ , onde  $xx+aa = zz$ ,  $2x dx = 2z dz$ , e fatte le sostituzioni, avremo

avremo  $zdz$ , ed integrando  $\frac{2z^3}{3}$ , e restituendo il va-

lore di  $z$  dato per  $x$ , farà  $\frac{2}{3} \times \frac{z^3}{xx+aa}$ .

Se la formola fosse  $\frac{2xdx}{\sqrt{xx+aa}}$ , averemmo per inte-

grale  $2\sqrt{xx+aa}$ .

Sia  $\frac{2adx - 4xdx}{\sqrt{ax - xx + bb}}$ , cioè

$\frac{2 \times adx - 2xdx}{\sqrt{ax - xx + bb}}$ . Pongo  $\sqrt{ax - xx + bb} = z$ ,  
e però  $ax - xx + bb = z^2$ , ed  $adx - 2xdx = zdz$ , e  
fatte le sostituzioni, avremo  $4zdz$ , ed integrando  
 $\frac{4z^3}{3}$ , e restituendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ ,

farà  $\frac{4}{3} \times \frac{z^3}{ax - xx + bb}$ .

Se la formola fosse  $\frac{2adx - 4xdx}{\sqrt{ax - xx + bb}}$ , averemmo

per integrale  $4 \times \frac{z^3}{ax - xx + bb}$ :

Sia  $\frac{3xxdx - 2axdx}{\sqrt[4]{x^3 - axx}}$ , cioè

$\frac{3xxdx - 2axdx}{\sqrt[4]{x^3 - axx}}$ . Pongo  $\sqrt[4]{x^3 - axx} = z$ ,

e però  $z^4 = x^3 - axx$ , e  $3xxdx - 2axdx = 4z^3 dz$ , e

e 2

fatte



fatte le sostituzioni, avremo  $\frac{4z^3 dz}{3}$ , ed integrando,  $\frac{4z^3}{15}$ , e restituendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ ,

$$\text{sarà } \frac{4}{15} \times \frac{x^3 - axx^4}{3}$$

Se la formola fosse stata  $\frac{3xxdx - 2axdx}{3 \sqrt[3]{x^3 - axx}}$ , avrem-

$$\frac{3 \sqrt[3]{x^3 - axx}}$$

mo per integrale  $\frac{4}{9} \times \frac{x^3 - axx^4}{3}$ .

Sia  $2xxdx \sqrt[3]{\frac{xx+aa}{xx+aa}^2}$ , cioè  $2xxdx \times \frac{xx+aa}{3}$ ;

pongo  $\frac{xx+aa}{3} = z$ , e però  $xx+aa = z^2$ , e

$2xxdx = \frac{3}{2} z^{\frac{3}{2}-1} dz$ , e fatte le sostituzioni, avremo

$\frac{3}{2} z^{\frac{3}{2}} dz$ , ed integrando  $\frac{3}{5} z^{\frac{5}{2}}$ , e restituendo in luogo

di  $z$  il valore dato per  $x$ ,  $\frac{3}{5} \times \frac{xx+aa}{3} \sqrt[3]{\frac{xx+aa}{xx+aa}^2}$ .

Se la formola fosse  $\frac{2xxdx}{\sqrt[3]{xx+aa}}$ , avremmo per in-

tegrale  $3 \sqrt[3]{xx+aa}$ .

Sia

Sia generalmente la formola  $px^{m-1} dx \times \frac{u}{x^m + a^m}$ ,  
 in cui  $p$ , ed  $m$  possono anche essere numeri rotti :

pongo  $\frac{u}{x^m + a^m} = z$ , e però  $z^{\frac{u}{n}} = x^m + a^m$ , ed

$mx^{m-1} dx = \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} dz$ , e fatte le sostituzioni, avremo

$\frac{pu}{mn} z^{\frac{u}{n}} dz$ , ed integrando,  $\frac{pu}{mu + mn} \times z^{\frac{u+n}{n}}$ , e resti-

tuendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , avremo

per integrale  $\frac{pu}{mu + mn} \times \frac{u}{x^m + a^m} \times \frac{n}{x^m + a^m}$ .

Se  $n$  fosse negativo, cioè se la formola fosse

$\frac{px^{m-1} dx}{x^m + a^m}$ , in cui  $n$  è positivo, avremmo per inte-

grale  $\frac{pu}{mu - mn} \times \frac{u-n}{x^m + a^m}$ .

Quindi formeremo la regola generale, che l'integrale di tali formole farà la quantità sotto al segno, accrescendo dell'unità l'esponente, e dividendola per esso esponente così accresciuto, o pure l'integrale farà un proporzionale di questo, secondo la proporzione, che averà la quantità differenziale fuori del segno al differenziale preciso.

32. Ma più generalmente ancora: sia la formola

$p x^{rm-1} dx \times \frac{1}{x^m + a^m} \frac{1}{u}^n$ , supposto però  $r$  numero intero, e positivo. Essa equivale a quest'altra

$p x^{rm-m} \times x^{m-1} dx \times \frac{1}{x^m + a^m} \frac{1}{u}^n$ ; pongo al solito

$z = \frac{x^m + a^m}{u}^{\frac{1}{n}}$ , e però  $x^m + a^m = z^{\frac{u}{n}}$ , ed

$m x^{m-1} dx = \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} dz$ ; e perchè  $x^m = z^{\frac{u}{n}} - a^m$ , fa-

rà pure  $x^{rm-m} = z^{\frac{u}{n}(r-1)} - a^m$ . Fatte adunque le so-

stituzioni, avremo  $p \times z^{\frac{u}{n}(r-1)} - a^m \times \frac{u}{mn} z^{\frac{u}{n}} dz$ . Ma

posto  $r$  numero intero, e positivo, farà pure  $r-1$  intero, e positivo, adunque fatta attualmente la potenza  $r-1$ , ciascun termine farà algebricamente integrabile, nel qual integrale restituito in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , avremo l'integrale della proposta formola.

Se  $n$  fosse negativo, cioè se la formola fosse  $\frac{p x^{rm-1} dx}{x^m + a^m} \frac{1}{u}^n$ , in cui  $n$  è positivo, fatte le sostituzioni,

farebbe

farebbe  $p \times z^{\frac{u}{n}} - a^m \times \frac{u}{mn} z^{\frac{u-2}{n}} dz$  parimente integrabile, e però ec.

Se in tutti questi casi la quantità sotto il vincolo in luogo di essere  $x^m + a^m$  fosse  $x^m - a^m$ , o pure  $a^m - x^m$ , si proceda nello stesso modo, che ciò nulla turba l'operazione.

Con questo metodo troveremo per tanto, che sarà

$$\int ax^{m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = \frac{2a}{3mf} \times \frac{e+fx^m}{2}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = \frac{2a}{mf} \times \frac{e+fx^m}{2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{2m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = -\frac{4e+6fx^m}{15mf} \times a \times \frac{e+fx^m}{2}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{2m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = -\frac{4e+2fx^m}{3mf} \times a \times \frac{e+fx^m}{2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{3m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = a \times \frac{16ee-24efx^m+3offx^{2m}}{105f^3m} \times \frac{e+fx^m}{2}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{3m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = \frac{16ee-8efx^m+6ffx^{2m}}{15mf^3} \times a \times \frac{e+fx^m}{2}^{\frac{1}{2}},$$

e così

e così di mano in mano quanti altri si vuole :

33. Ancora nel caso, che la variabile fuori del segno sia nel denominatore, la formola farà algebricamente integrabile col mezzo di due sostituzioni, purchè l'esponente di essa variabile fuori del segno abbia una condi-

zione, cioè la formola sia  $\frac{dx \times \frac{a^{2m} + a^m y^m}{y^u}}{x^m + a^m y^m}$ . Si faccia

$x = \frac{ay}{y}$ ,  $dx = -\frac{aady}{yy}$ ,  $x^m = \frac{a^{2m}}{y^m}$ ,  $\frac{a^{2m} + a^m y^m}{y^u} = \frac{a^{2m} + a^m y^m}{y^{\frac{mn}{u}}}$ . Fatte le sostituzioni, farà la formola

$$-\frac{aady \times \frac{a^{2m} + a^m y^m}{y^{\frac{mn}{u}}}}{yy \times y^{\frac{mn}{u}} \times a^{\frac{2m + \frac{2mn}{u} + 2}{u}}}$$

cioè  $\frac{a^{2m} + a^m y^m}{a^{\frac{2m + \frac{2mn}{u}}{u}}} \times -y^{m-1} dy$ ,

formola, che à le condizioni quì sopra ricercate, e che per mezzo della sostituzione notata ( num. 32. ) s'integrerà algebricamente.

Se

Se fosse proposta la formola  $\frac{a^x dx}{x^2 \sqrt{ax + x^2}}$ ; cioè

$$\frac{a^x dx}{x^2 \sqrt{ax + x^2}},$$

avendo questa le condizioni ricercate,

farà algebricamente integrabile, e ciò si offervi d'altre ancora.

34. Ma qui avvertasi, che nella formola generale la  $u$  può anche essere eguale all'unità, nel qual caso la potestà di  $x^m + u^m$  farà razionale, cioè intera.

Anche in questo caso, supposta la  $n$  quantità negativa, (giacchè quando è positiva non involve difficoltà alcuna) si può fare uso della stessa sostituzione, e del medesimo metodo, con cui troveransi gl'integrali delle formole, i quali integrali però non saranno sempre algebratici, anzi per lo più dipenderanno in parte dalla quadratura dell'iperbola, cioè dalla logaritmica.

Col noto metodo adunque troveremo, che

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{x^m + a^m} = -\frac{1}{m} \times \frac{1}{x^m + a^m}$$

$$\int \frac{x^{2m-1} dx}{x^m + a^m} = \frac{1}{m} \log \frac{a^m + x^m + \sqrt{a^{2m} + 2a^m x^m + x^{2m}}}{m \times (a^m + x^m)}$$

$$\int \frac{x^{3m-1} dx}{x^m + a^m} = \frac{a^m + x^m}{m} - \frac{2a^m}{m} \log \frac{a^m + x^m + \sqrt{a^{2m} + 2a^m x^m + x^{2m}}}{m \times (a^m + x^m)}$$

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{-1}{2m \times a^m + x^m}$$

$$\int \frac{x^{2m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{-1}{m \times a^m + x^m} + \frac{a^m}{2m \times a^m + x^m}$$

$$\int \frac{x^{3m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{1}{m} \sqrt{a^m + x^m} + \frac{2a^m}{m \times a^m + x^m} - \frac{a^{2m}}{2m \times a^m + x^m}$$

e quant' altri si vuole .

35. Ma è bene molto diversa la faccenda allora quando le proposte formole differenziali, che contengono radicali, non sono tali, che la quantità fuori del segno abbia quelle condizioni da me qui sopra accennate. Queste formole potranno sempre liberarsi dai radicali, purchè un solo ne contengano, il quale sia di radice quadrata, e la incognita sotto di esso non ecceda la seconda dimensione; ma per queste fa d'uopo di qualche riflessione nella scelta delle sostituzioni da farsi, acciò si liberino da' segni radicali; il che fatto, si passa alle integrazioni, o algebriche, o dipendenti dalle quadrature del circolo, e dell'iperbola nelle maniere spiegate, se alle date regole saranno sottoposte; se no, si rapportheranno ad altri canoni, che sono per dare in breve.

Se adunque la radicale della proposta formola fosse  $\sqrt{ax \pm xx}$ , o pure  $\sqrt{xx \pm ax}$ , essa radicale si pon-

ga =  $\frac{xz}{b}$ , intendendo per  $z$  una nuova variabile, e per

$b$  una costante qualunque.

Se la radicale fosse  $\sqrt{xx \pm aa}$ , si ponga la radicale =  $x + z$ , ovvero, se si vuole, =  $x - z$ .

Se la radicale fosse  $\sqrt{aa - xx}$ , o sia  $\sqrt{fp - xx}$  si ponga la radicale =  $\sqrt{fp + \frac{xz}{b}}$ , o pure =  $\sqrt{fp - \frac{xz}{b}}$ .

Da queste così fatte equazioni si ricavi il valore di  $x$ , e di  $dx$ , che si averanno dati per  $z$ , e le costanti; questi valori si sostituiscano nelle date formole, e si averanno libere dai segni radicali altre formole date per  $z$ , nelle sommatorie delle quali, se si potranno avere, restituito il valore di  $z$  dato per  $x$ , si averanno le sommatorie delle formole proposte.

36. Se la quantità avesse tre termini, cioè il quadrato della variabile col rettangolo di essa nella costante, e di più il termine tutto costante, allora o si levi il secondo termine nella solita maniera dell'algebra cartesiana, o pure, se il termine costante è positivo, come se fosse  $\sqrt{xx + ax + aa}$ , comunque sieno positivi, o negativi gl'altri, purchè non sia immaginaria la quantità, si faccia  $\sqrt{xx + ax + aa} = a + \frac{xz}{b}$ ; e se il ter-



mine costante è negativo, come a dire  $\sqrt{xx + ax - aa}$ ,  
 si faccia  $\sqrt{xx + ax - aa} = x + z$ .

Da ciò si vede, che tutto l'artificio consiste in  
 paragonare la quantità radicale ad una tale quantità  
 composta della data variabile, e di una nuova colle co-  
 stanti, sicchè ne risulti un' equazione, da cui si possa  
 avere il valore di  $x$ , e di  $dx$  libero da' segni radicali.

Sia proposta da sommarli la formola differenziale

$x^3 dx \sqrt{ax - xx}$ . Pongo  $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b}$ , e però

$a - x = \frac{xzz}{bb}$ , cioè  $x = \frac{abb}{zz + bb}$ , e  $dx = -\frac{2abbzdz}{(zz + bb)^2}$ ,

$x^3 = \frac{a^3 b^6}{(zz + bb)^3}$ , e  $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b} = \frac{abz}{zz + bb}$ . Fatte le so-

stituzioni nella proposta formola, farà essa  $-\frac{2a^3 b^2 z z dz}{(zz + bb)^6}$ ,

formola bensì libera da' segni radicali, ma che però,  
 ciò non ostante, non si fa coi dati metodi maneggiare  
 rispetto alle sommazioni.

Sia  $\frac{aadx}{x \sqrt{ax + xx}}$ . Pongo  $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b}$ , e però fa-

rà  $x = \frac{abb}{zz - bb}$ ,  $dx = -\frac{2abbzdz}{(zz - bb)^2}$ ,  $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b} = \frac{abz}{zz - bb}$ .

Fatte

Fatte le sostituzioni nella proposta formola, farà essa  $-\frac{zadz}{b}$ , ed integrando  $-\frac{2az}{b}$ , e restituendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , farà  $\int \frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}} = -\frac{2a\sqrt{ax+xx}}{x}$ .

Sia  $\frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}}$ . Pongo  $\sqrt{ax+xx} = \frac{xz}{b}$ , e fatte le necessarie sostituzioni, come quì sopra, la formola farà  $-\frac{2ab^3 dz}{zz-bb^2}$ , cioè  $-\frac{2ab^3 dz}{z+b^2} \times \frac{z-b^2}{z-b^2}$ , ma questa già si fa maneggiare con la regola delle frazioni, ed avrà per sommatoria  $\frac{abz}{zz-bb^2} + \frac{1}{2}a \int \frac{z-b}{z+b}$  nella logaritmica della sottangente eguale all'unità; e restituendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , farà  $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}} = \sqrt{ax+xx} +$

$\frac{a}{2} \int \frac{\sqrt{ax+xx}-x}{\sqrt{ax+xx+x}}$  nella logaritmica della stessa sottangente = 1.

Sia  $\frac{xdx}{\sqrt{xx+ax-aa}}$ . Pongo  $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z$ , e però farà  $x = \frac{zz+aa}{a-z}$ ,  $dx = \frac{2azdz - z^2dz + 2aadz}{a-z^2}$ , e  $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z = \frac{aa+az-zz}{a-z}$ . Fatte le sostitu-

stituzioni, farà la proposta formola  $\frac{zx + aa \times 2dz}{a - zz}$ , cioè

$\frac{2zdz + 2aadz}{a - zz}$ , ed integrando, il che per le date re-

gole si può fare,  $\frac{5aa}{4 \times a - zz} - \frac{a + 2z}{4} + \frac{a}{2} \log a - zz$  nel-

la logaritmica della sottangente  $= 1$ , e restituendo in luogo di  $z$  il valore dato per  $x$ , farà finalmente

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{xx + ax - aa}} = \frac{5aa}{4 \times a + 2x - 2\sqrt{xx + ax - aa}}$$

$$\frac{a - 2x + 2\sqrt{xx + ax - aa}}{4} + \frac{2a}{4} \log a + 2x - 2\sqrt{xx + ax - aa}$$

nella logaritmica della stessa sottangente eguale all'unità.

37. Affatto superflua intorno ad alcune formole differenziali radicali farà la fatica di trasmutarle per mezzo dell'accennate sostituzioni in altre libere da' segni radicali, e così prepararle per le integrazioni, e ciò per tutte quelle, che di natura sua involgono quadratura, o rettificazione di circolo; perchè sebbene si convertiranno in altre esenti da' radicali, queste però ci porteranno allo stesso circolo. E però sia (Fig. 5.) il semicircolo  $GMD$ ,  $AD$  raggio  $= a$ ,  $AB = x$ , onde  $BF = \sqrt{aa - xx}$ , e fatta  $CH$  infinitamente prossima a

$BF$ ,

$BF$ , farà  $BC = dx$ ,  $EF = \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}}$ . Adunque l'espres-

sione del rettangolo infinitesimo  $BCHE$  farà  $dx\sqrt{aa - xx}$ ,  
e però  $\int dx\sqrt{aa - xx} =$  allo spazio  $ABFM$ . Sarà pu-

re  $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$  l'espressione dell'archetto infinitesimo  $FH$ ,

e però  $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} =$  all' arco  $MF$ . E se l'archetto

$FH$  si moltiplicherà per la metà del raggio, farà  
 $\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}}$  espressione del settore infinitesimo  $AFH$ , e

però  $\int \frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}} =$  al settore  $AFM$ .

Sia ora, nel medesimo circolo,  $DC = x$ , e  $CB = dx$ ,  
farà  $CH = \sqrt{2ax - xx}$ ,  $EF = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ . Pertanto

$\int dx\sqrt{2ax - xx}$  farà = allo spazio  $HCD$ . Così  $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} =$

all' arco  $HD$ , e  $\int \frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}} =$  al settore  $AHD$ . In

queste adunque farà superflua la fatica; imperciocchè  
nel primo caso pongo  $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xx}{b}$ , e pe-

rò

$$\text{rò } x = \frac{2abz}{zz+bb}, \quad dx = \frac{2ab^2 dz - 2abz dz}{zz+bb^2}; \quad \sqrt{aa-xx} =$$

$$\frac{a-xz}{b} = \frac{abb-azz}{zz+bb}. \quad \text{Fatte le sostituzioni, farà } \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}} =$$

$$\frac{2abd z}{zz+bb}, \quad \text{formola di rettificazione di circolo, la di cui}$$

tangente =  $z$ , come già si è veduto al num. 26.

$$\text{Sarà pure } \frac{aadx}{2\sqrt{aa-xx}} = \frac{aabd z}{zz+bb}, \quad \text{formola, che invol-}$$

ve la stessa rettificazione.

$$\text{Istessamente farà } dx\sqrt{aa-xx} = \frac{2aabd z \times \sqrt{bb-zz}}{zz+bb^3},$$

formola, che sebbene non si fa per ora maneggiare, si vedrà però in appresso dipendere dallo stesso circolo.

Nel secondo caso pongo  $\sqrt{2ax-xx} = \frac{xz}{b}$ , e però

$$x = \frac{2abb}{zz+bb}, \quad dx = -\frac{4abbz dz}{zz+bb^2}, \quad \text{e } \sqrt{2ax-xx} = \frac{xz}{b} = \frac{2abz}{zz+bb}.$$

$$\text{Fatte le sostituzioni, farà } \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}} = -\frac{2abd x}{zz+bb}, \quad \text{rettifi-}$$

cazione di circolo.

$$\text{Sarà pure } \frac{aadx}{2\sqrt{2ax-xx}} = -\frac{aabd z}{zz+bb^2}, \quad \text{rettificazione}$$

di circolo come sopra.

Istessa-

Istessamente sarà  $dx \sqrt{2ax - xx} \doteq - \frac{8aab'zdz}{zz + bb^3}$ ,

che involve lo stesso circolo .

38. Se le nostre formole differenziali saranno composte di due quantità radicali , l'operazione sarà in questo caso raddoppiata , ma succederà egualmente bene , purchè nelle quantità radicali manchi , o sia tolto il secondo termine , e la formola sia moltiplicata per una potestà dispari dell'incognita ; e ciò col porre una delle quantità radicali eguale ad una nuova variabile , e così la proposta formola farà ridotta ad un'altra , che conterrà una sola radicale , e che per conseguenza si maneggerà nella solita maniera ..

Sia per esempio  $x' dx \sqrt{aa + xx}$ . Pongo  $\sqrt{aa + xx} = y$ ,

e però  $xx = yy - aa$  ,  $x dx = y dy$  . Fatte le sostituzioni , farà  $yy dy \times \frac{y^4 dy}{\sqrt{yy - aa + bb}}$  , cioè  $\frac{y^4 dy}{\sqrt{yy - aa + bb}} - \frac{aayy dy}{\sqrt{yy - aa + bb}}$  ,

ciascheduna delle quali si fa maneggiare .

39. Per poco , che si rifletta a questa maniera di operare , è facile a conoscere , che in queste formole radicali non succederà di poterle generalmente liberare dal vincolo radicale , se non quando sia radice quadrata , e la incognita sotto il vincolo non ecceda la seconda dimensione . Dissi generalmente , perchè

perchè in parecchj casi succede la faccenda , qualunque siasi il segno radicale , e qualunque la potestà dell'incongnita sotto il segno , e certamente in tutti i casi compresi dalle due seguenti formole , la prima delle quali

sarà  $\frac{dy \times \sqrt{y^m + b^m}}{y^{tm+1}} \pm \frac{1}{n}$  , in cui  $m, n, t$  sono numeri in-

tieri , e positivi , e possono anche essere zero , e ciò

s'ottiene facendo  $\sqrt{y^m + b^m}^{\frac{1}{n}} = z$  , e però  $y^m = z^n - b^m$  ,  
 $dy = \frac{nz^{n-1} dz}{my^{m-1}}$  , onde fatte le sostituzioni , sarà

$\frac{nz^{n-1} dz \times z^{\pm 1}}{my^{tm+m}}$  , cioè  $\frac{nz^{n-1} dz \times z^{\pm 1}}{my^{\frac{t+1}{n} \times m}}$  , ma

$y^{\frac{t+1}{n} \times m} = z^n - b^m$  , e quando  $t$  sia numero intero , sarà intiera la potestà  $t+1$  ; adunque la proposta formola sarà libera da' radicali .

Se  $t$  fosse negativo , la formola farebbe il caso di sopra considerato al numero 32. , che à integrale algebrico .

Negl' altri casi l'integrale dipenderà dalle quadrature del circolo , e dell' iperbola , come si vedrà a suo luogo .

La seconda formola è  $y^n dy \times \sqrt{y^m + b^m}^{\pm \frac{t}{p}}$  , la quale,

quale, quando sia  $\frac{n+1}{m}$  numero intero, si potrà sempre liberare da' segni radicali, o in tutto, o almeno da' radicali di quantità complesse, il che basta. Si faccia

per tanto  $\sqrt[m]{y^m + b^m} = z$ , e però sarà  $y^m = z^m - b^m$ ,

$$y = z^{\frac{p}{m}} - b^m, \quad dy = \frac{p}{m} z^{\frac{p}{m}-1} dz \times \sqrt[m]{z^{\frac{p}{m}} - b^m}^{-1}, \text{ ed}$$

$y^n = z^{\frac{p}{m}n} - b^m$ , e fatte le sostituzioni, avremo la

$$\text{formola } \frac{p}{m} z^{\frac{p}{m}-1} dz \times z^{\frac{n}{m}} \times \sqrt[m]{z^{\frac{p}{m}} - b^m}^{\frac{1}{m} + \frac{n}{m} - 1}, \text{ ma}$$

quando sia  $\frac{n+1}{m}$  numero intero, sarà sempre intera la potenza  $\frac{1+n}{m} - 1$ , adunque la formola non avrà mai

segni radicali di quantità complesse. E però quando sia  $\frac{1+n}{m} - 1$  numero intero, e positivo, l'integrale al più dipenderà

dalla quadratura dell'iperbola, o sia dalla logaritmica, e si potrà avere per le regole date; e quando sia  $\frac{1+n}{m} - 1$  numero intero negativo, l'integrale dipen-

derà dalle quadrature del circolo, e dell'iperbola, e si avrà per le regole da darsi a suo luogo.

40. Passando ora a quelle formole, che essendo



frazioni libere da' radicali , nel denominatore di esse ( che suppongo composto di radici immaginarie , poichè in queste sole stà la difficoltà ) la incognita sia elevata a qualunque potestà , dico : che ogni qual volta il denominatore sia riducibile in componenti reali , ne' quali la incognita non ecceda la seconda dimensione , si potrà sempre spezzare la formola in tante frazioni , quanti sono i suddetti componenti reali , ciascuna delle quali farà integrabile , supposte le quadrature del circolo , e dell' iperbola , ed in conseguenza la proposta formola farà sempre riducibile alle stesse quadrature . Per lo che fare : sia proposta la formola

$\frac{aadx}{xx + ax + bb \times xx + cx + cb}$  , si finga un' equazione ,  
cioè , che sia

$$\frac{aadx}{xx + ax + bb \times xx + cx + cb} = \frac{Axdx + Bdx + Cxdx + Ddx}{xx + ax + bb}$$

, nella quale formola le majuscole  $A, B,$

$C, D$  sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso .

Così se fosse la formola

$$\frac{abdx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c}$$
 , si faccia

$abdx$

$$\frac{abdx}{xx+ax+bb \times xx \pm aa \times x \pm c} = \frac{Axdx + Bdx + Cxdx + Ddx + Hdx}{xx+ax+bb \times xx \pm aa \times x \pm c};$$

e coll'istesso ordine si proceda,

se i componenti del denominatore fossero in maggior numero. Il che fatto, si riducano allo stesso denominatore i termini di queste equazioni, e finalmente con la trasposizione si riduca l'equazione al zero, indi col paragone de' primi termini al zero si ritroverà il valore dalla assunta *A*; col paragone de' secondi, terzi, quarti ec. si troveranno i valori delle assunte *B, C, D*, ec. dati per le costanti della proposta formola, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole *A, B, C, D* ec. nella equazione, ci somministreranno tante frazioni, le quali equivagliano alla proposta, ed in fatti, ridotte al comune denominatore, appunto restituiranno la formola da prima proposta.

Prendiamone un' esempio. Sia proposta da integrarsi la formola

$$\frac{aadx}{xx+2ax-aa \times xx+aa}$$

Fingo adunque, che sia

$$\frac{aadx}{xx+2ax-aa \times xx+aa} = \frac{Axdx + Bdx + Cxdx + Ddx}{xx+2ax-aa \times xx+aa}$$

Riduco adunque al comune denominatore l'equazione, indi col trasportare il termine *aadx*, la riduco

. . . al

al zero, e si trova essere

$$\begin{aligned} Ax^3 dx + Bxx dx + Aaax dx + Baadx \\ Cx^3 dx + Dxx dx + 2Dax dx - Daadx = 0. \\ + 2Cax dx - Caax dx - aadx \end{aligned}$$

Per tanto dal paragone de' primi termini al zero si averà  $A + C = 0$ , cioè  $A = -C$ ; de' secondi  $B + D + 2Ca = 0$ , cioè ponendo  $-A$  in luogo di  $C$ ,  $B = 2Aa - D$ ; de' terzi  $Aaa + 2Da - Caa = 0$ , cioè  $C = A + \frac{2D}{a}$ ; degl' ultimi  $Baa - Daa - aa = 0$ ,

cioè ponendo in luogo di  $B$  il valore dato per  $D$ , e per  $A$ , farà  $D = Aa - \frac{1}{4}$ ; adunque farà  $C = \frac{3Aa - 1}{4}$ ,

ma  $C = -A$ , e però  $A = \frac{1}{4a}$ ,  $D = -\frac{1}{4}$ ,  $B = \frac{3}{4}$ ,

$C = -\frac{1}{4a}$ , onde avremo finalmente

$$\frac{aadx}{xx + 2ax - aa} = \frac{xdx + 3adx}{4a \times xx + 2ax - aa} - \frac{xdx - adx}{4a \times xx + aa}$$

Ma l'omogeneo di comparazione, facendo sparire ove fa d'uopo il secondo termine dal denominatore, è integrabile con le quadrature del circolo, e dell'iperbola, il di cui integrale con le date regole si troverà

$$\text{essere } \frac{1}{4a} \int \sqrt{xx + 2ax - aa} + \frac{1}{2\sqrt{2aa}} \int \sqrt{x+a} - \sqrt{2aa} -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2aa}} \int \sqrt{x+a + \sqrt{2aa}} - \frac{1}{4a} \int \sqrt{xx + aa}, \text{ sottraendo}$$

ia

in oltre da questi logaritmi il quarto proporzionale di  $4aa$ , dell'unità, e dell'arco di circolo, che abbia il raggio  $= a$ , e la tangente  $= x$ . Adunque l'integrale di questa formola non dipende da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola.

41. Se in oltre la frazione sarà moltiplicata in una qualunque potestà dell'incognita, la quale potestà sia positiva, come se fosse l'equazione.

$$\frac{aax^n dx}{xx + 2ax - aa} \times \frac{xx + aa}{xx + 2ax - aa}, \text{ si faccia}$$

$$\frac{aax^n dx}{xx + 2ax - aa} = \frac{Ax^{n+1} dx + Bx^n dx}{xx + 2ax - aa} + \frac{Cx^{n+1} dx + Dx^n dx}{xx + aa},$$

e si trovino nello stesso modo,

come sopra, i valori delle majuscole  $A, B, C$  ec., o pure si operi, come se la detta potestà non vi fosse, e le risultanti frazioni si moltiplichino per la stessa potestà, ed avremo parimenti altrettante frazioni, che non esiggeranno quadrature superiori a quelle del circolo, e dell'iperbola, e che si sapranno maneggiare colle date regole.

42. E se la potestà della variabile sarà negativa; cioè, se sarà positiva nel denominatore, per questa potestà si moltiplichino tutti i denominatori delle frazioni risultanti, e faranno della seguente forma.

Sia

Sia per esempio

$$x^{-n} dx$$

risolta questa, come se non vi fosse la  $x^{-n}$ , ed indi moltiplicando ogni termine per  $x^{-n}$ , farà

$$\frac{x^{-n} dx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c} = \frac{A dx + B dx}{xx + ax + bb \times x^n} + \frac{C dx + D dx}{xx \pm aa \times x^n} + \frac{H dx}{x \pm c \times x^n}$$

intendendo già per le majuscole que' tali valori ritrovati con la data maniera, che rendano la somma di queste frazioni eguale alla proposta.

L'ultima frazione non avrà bisogno d'altro artificio, perchè si saprà integrare colle date regole.

Quanto alla prima: sia per chiarezza d'esempio  $A = aa$ ,  $B = abb$ , onde si esprima così

$$\frac{aa dx + ab dx}{xx + ax + bb \times x^n} = \frac{M dx + N dx}{xx + ax + bb} + \frac{P x^{n-1} dx + H x^{n-2} dx + E x^{n-3} dx \text{ ec.}}{x^n}$$

così proseguendo fino, che l'ultimo termine sia costante, cioè zero la potestà dell'incognita  $x$ . Ridotte queste frazioni al comune denominatore, e ridotta al zero l'equazione,

zione , averemo , come s'è fatto di sopra , i valori delle majuscole . Lo stesso si faccia rispetto all'altra frazione  $\frac{Cx dx + D dx}{xx \pm aa \times x^n}$  , e troverassi finalmente l'integrale della proposta formola .

E però generalmente , supposte le sole quadrature del circolo , e dell' iperbola , si potrà sempre avere l'integrale della formola  $\frac{x^{\pm n} dx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c}$  ec.

comunque sieno i componenti reali del denominatore , purchè in essi la incognita non ecceda la seconda dimensione .

43. Ma se il denominatore della proposta formola , o frazione non sarà risoluto ne' suoi componenti reali , ne' quali l'incognita non ecceda la seconda dimensione , nè tale si potrà ridurre colle regole ordinarie dell'algebra , si potrà sempre però con un poco d'artificio ridurlo tale , ogni qual volta egli sia una formola convertibile , o pure il prodotto di più formole convertibili . Formole convertibili chiamerò quelle , nelle quali la variabile abbia il massimo numero delle sue dimensioni pari affermativo , quale sia per esempio  $x^n$  , l'ultimo termine sia  $a^n$  , indi i termini equidistanti da quello di mezzo abbiano il medesimo coefficiente , ed affetto dal medesimo segno , supplite le dimensioni colla costante ,

h da

da cui è formato l'ultimo termine; tale sarebbe la formola  $x^6 + a^6$ , o pure l'altra  $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4$ , o l'altra  $x^6 - bx^5 + b^2x^4 - a^4bx + a^6$ . Che se fosse  $x^5 + bx^4 + a^4x + a^4b$ , si scriva essa nell'equivalente formola  $\overline{x^4 + a^4} \times \overline{x + b}$ , in cui  $x^4 + a^4$  è formola convertibile, ed  $x + b$  è lineare, che non apporta difficoltà alcuna. Lo stesso s'intenda d'infinite altre.

44. Abbiassi ora adunque  $x^m - a^m$  da risolvere in componenti reali, ne' quali  $x$  non ecceda la seconda dimensione, e che non abbia esponenti rotti, e sia in primo luogo  $m$  numero intero affermativo pari. In tal

caso farà egli divisibile in  $x^{\frac{1}{2}m} + a^{\frac{1}{2}m}$ , ed  $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$  senza frazione negl'esponenti; per essere  $m$  numero intero pari. Il primo divisore si risolverà per le regole, che si daranno fra poco per il binomio  $x^m + a^m$ . Il

secondo  $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$ , se  $\frac{1}{2}m$  farà numero pari, si risol-

verà nuovamente in  $x^{\frac{1}{4}m} + a^{\frac{1}{4}m}$ , ed  $x^{\frac{1}{4}m} - a^{\frac{1}{4}m}$

senza frazione negl'esponenti. Ma se  $\frac{1}{2}m$  farà numero dispari, si risolverà per le regole da prescriversi per il binomio  $x^m - a^m$  quando  $m$  è numero dispari.

Sia in secondo luogo  $x^m + a^m$ , e sia  $m$  numero intero affermativo pari, nel qual caso la formola è

con-

convertibile. Si supponga  $x^m + a^m = 0$ , indi si formi una formola convertibile, in cui il massimo esponente di  $x$  sia  $m-2$ , e che abbia tutti i termini, e l'ultimo termine sia  $a^{m-2}$ , ed il coefficiente del secondo termine sia per esempio  $b$ , quello del terzo sia  $cc$ , quello del quarto  $d^3$  ec., e questa si paragoni al zero, onde ne risulti un'equazione. Tale equazione si moltiplichi per  $xx + fx + aa$ ; il prodotto farà un'altra equazione convertibile, in cui l'esponente massimo di  $x$  farà  $= m$ . Questa equazione si paragoni termine per termine coll'equazione fittizia  $x^m + a^m = 0$ , in cui i coefficienti de' termini intermedj sono  $= 0$ , e cavando dal paragone de' secondi termini il valore dell'assunta  $b$ , dal paragone de' terzi il valore dell'assunta  $cc$ , da quello de' quarti il valore dell'assunta  $d^3$ , e così fino al termine di mezzo, compreso anche questo (giacchè di là dal medio l'altre equazioni tornerebbero le medesime, per essere le equazioni, che si paragonano, convertibili) da quest'ultimo si caverà il valore di  $f$  espresso con una equazione, che avrà numero  $\frac{m}{2}$  dimensioni,

di cui tutte le radici faranno reali, e ci daranno i valori di  $f$ , che sostituiti nel trinomio  $xx + fx + aa$  daranno altrettanti trinomj, il prodotto de' quali restituirà il proposto binomio  $x^m + a^m$ .

Sia  $x^4 + a^4$ . Prendo un'equazione convertibile del

h 2

fe-



secondo grado  $xx + bx + aa = 0$ , la moltiplico per  $xx + fx + aa = 0$ , e ne ricavo un'altra equazione convertibile  $x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 = 0$ . Paragono  
 $+ fx^3 + bfxx + aabx$   
 questa con la fittizia  $x^4 + a^4 = 0$ , e dal paragone de' secondi termini trovo  $b + f = 0$ , cioè  $b = -f$ ; dal paragone de' termini di mezzo trovo  $2aa + bf = 0$ , e sostituito in luogo di  $b$  il suo valore  $-f$ , trovo  $ff - 2aa = 0$ , onde  $f = \pm \sqrt{2aa}$ .

Sia  $x^6 + a^6$ . Prendo l'equazione convertibile  $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$ , la moltiplico per  $xx + fx + aa = 0$ , e ne risulta l'equazione

$$\begin{aligned} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2aabx^3 + a^4xx + a^4fx + a^6 \\ + fx^5 + bfx^4 + fccx^3 + aabfxx + a^4bx \\ + aax^4 + aaccxx \end{aligned} = 0.$$

Paragono questa con la fittizia  $x^6 + a^6 = 0$ , e dal paragone de' secondi termini trovo  $b + f = 0$ ; dal paragone de' terzi trovo  $cc + bf + aa = 0$ , cioè sostituendo il valore di  $b$ ,  $cc - ff + aa = 0$ ; dal paragone de' medj trovo  $2aab + fcc = 0$ , cioè sostituendo in luogo di  $b$ , e di  $cc$  i suoi valori,  $f^3 - 3aaf = 0$ .

Facendo attualmente queste operazioni si troverà adunque, che

$$\text{Se } m = 4, \text{ sarà } ff - 2aa = 0.$$

$$\text{Se } m = 6, \text{ sarà } f^3 - 3aaf = 0.$$

$$\text{Se } m = 8, \text{ sarà } f^4 - 4aaff + 2a^4 = 0.$$

Se

Se  $m = 10$ , farà  $f^5 - 5aaf^3 + 5a^4f = 0$ .

Se  $m = 12$ , farà  $f^6 - 6aaf^4 + 9a^4ff - 21^6 = 0$ .

Se  $m = 14$ , farà  $f^7 - 7aaf^5 + 14a^4f^3 - 7a^6f = 0$ ,

e così si può procedere per gli altri valori pari di  $m$ .

In luogo di  $x^4 + a^4$ , sia  $x^4 + 2bx^3 + 2aabbx + a^4$ , formola pure convertibile. Moltiplico l'equazione convertibile  $xx + bx + aa = 0$  per  $xx + fx + aa = 0$ , ed averò, come sopra,  $x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 + fx^3 + bfxx + aabx = 0$ .

Paragono questa con l'equazione fittizia  $x^4 + 2bx^3 + 2aabbx + a^4 = 0$ , e dal paragone de' secondi termini trovo  $b + f = 2b$ , cioè  $b = 2b - f$ ; dal paragone de' medj trovo  $2aa + bf = 0$ , e sostituendo in luogo di  $b$  il suo valore, si à  $2aa + 2bf - ff = 0$ , cioè  $ff - 2bf - 2aa = 0$ .

Sia  $x^6 + a^3x^3 + a^6$ . Prendo l'equazione convertibile  $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$ ; la moltiplico per  $xx + fx + aa$ , ed avrò

$$\begin{aligned} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2aabbx^3 + a^4xx + a^4fx + a^6 \\ + fx^5 + bfx^4 + ccfx^3 + aabfxx + a^4bx \\ + aax^4 + aaccxx \end{aligned} = 0.$$

Paragonata questa con l'equazione  $x^6 + a^3x^3 + a^6 = 0$ , trovo dal paragone de' secondi termini  $b + f = 0$ ; dal paragone de' terzi trovo  $cc + bf + aa = 0$ , e posto in luogo di  $b$  il suo valore, farà  $cc - ff + aa = 0$ ; dal paragone de' medj trovo  $2aab + ccf = a^3$ , e posti in luogo

luogo di  $b$ , e di  $cc$  i suoi valori, farà  $f^3 - 3aaf - a^3 = 0$ , e così di quant' altri si vuole.

Abbiassi adunque  $x^4 + 2bx^3 + 2aabbx + a^4$  da risolvere in componenti reali, ne' quali  $x$  non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di  $f$ , è adunque  $ff - 2bf = 2aa$ , dalla quale si ricavano i valori di  $f$  tutti reali, cioè  $f = b + \sqrt{2aa + bb}$ ,  $f = b - \sqrt{2aa + bb}$ . Sostituito pertanto ciascuno di questi valori in luogo di  $f$  nel trinomio  $xx + fx + aa$ , troveremo, che  $x^4 + 2bx^3 + 2aabbx + a^4$  è il prodotto de' due componenti reali  $xx + bx + x\sqrt{2aa + bb} + aa$ ;  $xx + bx - x\sqrt{2aa + bb} + aa$ . Così se sia  $x^6 + aax^4 + a^4xx + a^6 = 0$ . Essendo l'equazione, che dà i valori di  $f$ ,  $f^3 - 2aaf = 0$ , dalla quale si hanno i valori di  $f$  tutti reali, cioè  $f = 0$ ,  $f = \sqrt{2aa}$ ,  $f = -\sqrt{2aa}$ , farà  $x^6 + aax^4 + a^4xx + a^6$  il prodotto de' tre efficienti reali  $xx + aa$ ,  $xx + x\sqrt{2aa} + aa$ ,  $xx - x\sqrt{2aa} + aa$ .

Abbiassi  $x^{10} + a^{10}$ . L'equazione, che deve dare i valori di  $f$ , è  $f^5 - 5aaf^3 + 5a^4f = 0$ , dalla quale si ricavano i valori di  $f$  tutti reali, cioè  $f = 0$ ,  $f = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$ ,  $f = -a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$ ,  $f = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ ,  $f = -a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ .

Softi-

Sostituito per tanto ogn'uno di questi valori in luogo di  $f$  nel trinomio  $xx + fx + aa$ , si troverà, che  $x^{10} + a^{10}$  è il prodotto de' cinque efficienti reali  $xx + aa$ ,

$$xx + ax \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5} + aa}{2}}, \quad xx - ax \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5} + aa}{2}},$$

$$xx + ax \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5} + aa}{2}}, \quad xx - ax \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5} + aa}{2}};$$

onde si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia  $dx$  moltiplicato in qualunque costante, ed il denominatore di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola, e potrási avere con le date regole.

45. Sia poi  $x^m \pm a^m$  da risolvere, come sopra, e sia  $m$  numero intiero affermativo, ma dispari.

La formola si divida per  $x \pm a$ , ed il quoziente, ( che nel primo caso farà  $x^{m-1} - ax^{m-2} + aax^{m-3} - a^3x^{m-4}$  ec. fino all'ultimo termine, che farà  $+a^{m-1}$ ; e nel secondo caso farà  $x^{m-1} + ax^{m-2} + aax^{m-3} + a^3x^{m-4}$  ec. fino all'ultimo termine, che farà  $+a^{m-1}$  ) si supponga  $= 0$ , e questa finta equazione, che è convertibile, si paragoni termine per termine col prodotto di una equazione convertibile, in cui il numero delle dimensioni dell'incognita  $x$  sia  $m-3$ , nel trinomio  $xx + fx + aa$ , e dal paragone de' secondi termini si caverà

verà il valore dell'affunta, per esempio  $b$ , da quello de' terzi il valore di  $cc$ , da quello de' quarti il valore di  $d'$ ; e finalmente dal paragone de' termini di mezzo si caveranno i valori di  $f$  espressi con una equazione di numero  $\frac{m-1}{2}$  dimensioni, della quale tutte le radici

faranno reali, e determineranno i valori di  $f$  tutti reali, che sostituiti nel trinomio  $xx + fx + aa$ , verranno a somministrarci altrettanti trinomi, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per  $x \pm a$  restituiranno la proposta formola  $x^m \pm a^m$ .

Con questo metodo si trovano le infrascritte equazioni, che servono per la risoluzione del binomio  $x^m + a^m$  quando  $m$  è numero intero affirmativo dispari.

Se  $m = 3$ , farà  $f + a = 0$ .

Se  $m = 5$ , farà  $ff + af - aa = 0$ .

Se  $m = 7$ , farà  $f^3 + aff - 2a^2f - a^3 = 0$ .

Se  $m = 9$ , farà  $f^4 + af^3 - 3a^2ff - 2a^3f + a^4 = 0$ .

Se  $m = 11$ , farà  $f^5 + af^4 - 4a^2f^3 - 3a^3ff + 3a^4f + a^5 = 0$ .

Se  $m = 13$ , farà  $f^6 + af^5 - 5a^2f^4 - 4a^3f^3 + 6a^4ff + 3a^5f - a^6 = 0$ .

E così si può procedere per gli altri valori dispari di  $m$ .

Se la formola proposta fosse stata  $x^m - a^m$ , essendo  $m$  numero intero affirmativo dispari, fatta, come si è detto, la divisione per  $x - a$ , le medesime equazioni

ni

ni avrebbero luogo, mutati i segni nel secondo, quarto, sesto termine, ed in tutti gl'altri posti ne' luoghi pari.

46. Se in luogo di  $x^m \pm a^m$ , posto  $m$  numero intero affermativo dispari, la formola fosse qualunque, altra, ma tale, che divisa per  $x \pm$  una costante, cioè che ne risulta fosse una formola convertibile, come sarebbe  $x^3 + bx^2 - aax^2 - aabxx + a^2x + a^2b$ , la quale divisa per  $x + b$  dà  $x^2 - aaxx + a^2$ , trattata quest'ultima al solito, e trovati i valori di  $f$ , e sostituiti nel trinomio  $xx + fx + aa$ , avremo altrettanti trinomj, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per  $x + b$ , restituiranno la proposta formola.

Debba, per esempio, risolversi  $x^3 + a^3$  in efficienti reali, ne' quali  $x$  non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di  $f$  (secondo le cose dette) farà  $ff + af - aa = 0$ , dalla quale cavati essi valori di  $f$ , che sono  $f = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$ , e sostituiti in luogo di  $f$  nel

trinomio  $xx + fx + aa$ , avremo due trinomj reali  $xx - \frac{ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa$ , ed  $xx - \frac{ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa$ , il

prodotto de' quali con  $x + a$  restituisce la formola proposta  $x^3 + a^3$ .

Debba dividersi in efficienti reali la formola

i

la

la  $x^3 + bx^2 - aax^2 - aabxx + a^4x + a^4b$ , che divisa per  $x + b$  ci dà  $x^2 - aaxx + a^4$ .

L'equazione di  $f$  per questa farà  $ff = 3aa$ , ed i valori di  $f$  saranno  $f = \pm \sqrt{3aa}$ . Sostituiti questi in luogo di  $f$  nel trinomio  $xx + fx + aa$ , avremo due trinomi reali  $xx + x\sqrt{3aa} + aa$ ,  $xx - x\sqrt{3aa} + aa$ , il prodotto de' quali con  $x + b$  restituisce la proposta formola.

47. Da ciò si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia  $dx$  in qualunque costante, ed il denominatore sia di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola, e potrássi avere con le date regole.

48. Ma perchè nelle dimensioni più alte il valore di  $f$  dalle equazioni di sopra riferite non può coll'attuale separazione ricavarfi, in questi casi basterà rivolgersi alla costruzione geometrica delle medesime equazioni. Così per ritrovare i componenti di  $x^7 + a^7$ , ed indi l'integrale della formola  $\frac{dx}{x^7 + a^7}$ , diviso il deno-

minatore per  $x + a$ , il quoziente sarà  $x^6 - ax^5 + aax^4 - a^2x^3 + a^4xx - a^3x + a^6$ . I valori di  $f$  per risolvete questa formola sono somministrati dall'equazione  $f^3 + aff - 3aaf - a^3 = 0$ . Ritrovati per tanto coi metodi

todi soliti dell'algebra, per mezzo dell'intersecazione di due curve, o in altro modo i valori veri, e falsi di  $f$ , che faranno tutti reali, per esempio, uno  $A$ , l'altro  $-B$ , l'altro  $-C$ , la quantità  $x^7 + a^7$  farà il prodotto di  $x + a$  in  $xx + Ax + aa$  in  $xx - Bx + aa$  in  $xx - Cx + aa$ , e le quantità  $A, B, C$  faranno reali, e date; onde si potrà procedere alla integrazione della formola  $\frac{dx}{x^7 + a^7}$  per le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola.

49. Col medesimo artificio, con cui si trovano le equazioni per risolvere il binomio  $x^m \pm a^m$ , si possono ritrovare per risolvere il trinomio  $x^{2m} \pm 2aax^m + aa$ , essendo  $2m$  numero intero affermativo pari; anzi generalmente ogni qual volta si proponga da risolvere una formola, che sia convertibile, o il prodotto di convertibili in lineari; e che non abbia frazioni negl' esponenti, sempre potrà ridursi col metodo di sopra esposto.

Il caso del prodotto di formola convertibile in una lineare l'abbiamo quando  $m$  è dispari, ed altrove. Esempio dell' altre sia  $x^3 + b^3x^2 - a^3x^2 - a^3b^3$ , cioè  $\frac{x^3 + b^3}{x^2 - a^2} \times \frac{x^2 - a^2}{x^2 - a^2} \times \frac{x^2 - a^2}{x^2 - a^2}$ , o sia  $\frac{x^3 + b^3}{x^2 - a^2} \times \frac{x^2 + ax + aa}{x^2 - a^2} \times \frac{x^2 - a^2}{x^2 - a^2}$ . Risolto per tanto ne' suoi efficienti reali di due dimensioni il divisore  $x^2 + b^3$ , che sieno per esem-



più  $xx + Ax + bb$ ,  $xx + Bx + bb$ , farà

$$x^+ + b^+ \times x^+ - a^+ = \frac{xx + Ax + bb}{x^+ + b^+} \times \frac{xx + Bx + bb}{x^+ - a^+} \times \frac{xx + aa}{x^+ + b^+} \times \frac{xx - aa}{x^+ - a^+} :$$

E se fosse stato  $x^+ + b^+ \times x^+ + a^+$ , risoluto in oltre  $x^+ + a^+$

in  $xx + Cx + aa$ , ed  $xx + Dx + aa$ , farebbe  $x^+ + b^+ \times x^+ + a^+ =$

$$\frac{xx + Ax + bb}{x^+ + b^+} \times \frac{xx + Bx + bb}{x^+ + a^+} \times \frac{xx + Cx + aa}{x^+ + b^+} \times \frac{xx + Dx + aa}{x^+ + a^+} .$$

50. Per avere l'integrale della formola  $\frac{ma^m dx}{x^m \pm a^m}$ ,

in cui  $m$  esprime un qualunque numero intero affermativo, si chiamino  $A, B, C$ , ec. i valori di  $f$  coi loro segni, che servono per la risoluzione del denominatore  $x^m \pm a^m$ , e si avverta, che di questi valori uno può alle volte essere  $= 0$ , il che seguirà qualunque volta, essendovi  $x^m + a^m$  nella detta formola, sia  $m$  un numero della serie 2, 6, 10, 14, 18 ec., e qualunque volta, essendovi  $x^m - a^m$  nella data formola, sia  $m$  un numero della serie 4, 8, 12, 16 ec.; ciò posto, l'integrale cercato farà  $\pm \frac{A}{a} \int \sqrt{xx + Ax + aa} \pm$

$$\frac{B}{a} \int \sqrt{xx + Bx + aa} \pm \frac{C}{a} \int \sqrt{xx + Cx + aa} \text{ ec.},$$

presi tali logaritmi nella logaritmica, di cui la sottangente sia  $= a$ , aggiungendo, o sottraendo da questo complesso di termini logaritmici (secondo che il segno del termine  $a^m$  nel denominatore farà quello del più, o quello del meno) il doppio della somma di tanti archi di circolo,

colo, quanti sono i valori  $A, B, C$  ec., de' quali archi i raggi sieno per ordine  $\sqrt{aa - \frac{1}{4}AA}, \sqrt{aa - \frac{1}{4}BB}, \sqrt{aa - \frac{1}{4}CC}$  ec., le tangenti sieno col medesimo ordine  $x + \frac{1}{2}A, x + \frac{1}{2}B, x + \frac{1}{2}C$  ec. Tale farà l'integrale della formola  $\frac{ma^m dx}{x^m + a^m}$ , se  $m$  farà numero pari affermativo;

ma se nella medesima formola  $m$  farà numero dispari affermativo, converrà aggiungere al tutto il logaritmo di  $x+a$ , perchè il denominatore à anche la radice reale  $x+a$ . E se la formola farà  $\frac{ma^m dx}{x^m - a^m}$ , essendo

$m$  numero dispari affermativo, converrà in luogo del logaritmo di  $x+a$ , aggiungere quello di  $x-a$ . E se finalmente, essendo la formola  $\frac{ma^m dx}{x^m - a^m}$ , farà  $m$  numero

pari affermativo, converrà aggiungere il logaritmo di  $x-a$ , e sottrarre quello di  $x+a$ , prendendo sempre anche questi logaritmi nella logaritmica della sottangente  $= a$ .

51. Ma se nella proposta formola  $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$  il

numero  $m$  fosse intero negativo, cioè se fosse  $\frac{dx}{x^{-m} \pm a^{-m}}$ ,

essa

essa si esprima così  $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ , la quale ridotta al co-

$$\frac{\frac{1}{x^m} \pm \frac{1}{a^m}}{x^m \pm a^m}$$

mune denominatore equivale a questa  $\frac{a^m x^m dx}{a^m \pm x^m}$ , e di-

videndo il numeratore per lo denominatore, acciò la massima potestà dell'incognita sia minore in quello, che in questo, si averà finalmente  $\pm a^m dx \pm \frac{a^{2m} dx}{x^m \pm a^m}$ ,

in cui  $m$  sarà numero positivo, ed averanno luogo le cose dette di sopra anche quando nella formola  $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$

sia  $m$  numero negativo intiero.

52. Se in oltre la frazione  $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$  s'intenderà

moltiplicata per  $x^n$ , essendo  $n$  intiero affermativo, o negativo, risoluto il denominatore ne' suoi efficienti reali, ne' quali  $x$  non ecceda la seconda dimensione, sarà essa il caso da me sopra considerato ai num. 41., e 42., e però riducibile alle quadrature del circolo, e dell' iperbola.

53. Ma quando  $n$  sia negativo, si potrà più spedatamente ridurre così. Sia in primo luogo  $n$  minore di  $m$ : la formola  $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$  si esprima coll'equi-

$$\frac{dx}{x^m \pm a^m} \times x^n$$

valen-

valente  $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{x^{m-n} dx}{a^m \times x^m + a^m}$  ; e  $\frac{dx}{x^m - a^m \times x^n}$  con

la  $\frac{-dx}{a^m x^n} + \frac{x^{m-n} dx}{a^m \times x^m - a^m}$  . Sia in secondo luogo

$n$  maggiore di  $m$  , la formola  $\frac{dx}{x^m + a^m \times x^n}$  si esprima

con l'equivalente  $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{dx}{a^{2m} x^{n-m}} + \frac{dx}{a^{3m} x^{n-2m}} -$

$\frac{dx}{a^{4m} x^{n-3m}}$  ec. fino a quel termine , in cui l'esponen-

te di  $x$  sia prossimamente maggiore di  $m$  ,  $\pm$  ( secondo , che porterà l'alternativa de' segni )  $\frac{dx}{x^m + a^m \times a^r x^t}$  ,

dove  $r$  è lo stesso esponente della quantità  $a$  nel termine antecedente , e la  $t$  è il residuo della divisione fatta del numero  $n$  per lo numero  $m$  quante volte si può .

E se fosse  $\frac{dx}{x^m - a^m \times x^n}$  , supposto pure  $n$  maggio-

re di  $m$  , tutti i termini della serie dovranno essere affetti dal segno negativo , ed il termine fuori della serie , cioè il termine  $\frac{dx}{x^m - a^m \times a^r x^t}$  dovrà avere sempre

prefisso il segno affermativo . Data adunque la formo-

la  $\frac{dx}{x^3 + a^3 \times x^3}$ , farà essa =  $\frac{dx}{a^3 x^3} - \frac{dx}{x^3 + a^3 \times a^3 xx}$ ;

ma sappiamo, che  $\frac{-dx}{x^3 + a^3 \times a^3 xx} = \frac{-dx}{a^6 xx} + \frac{xdx}{a^6 \times x^3 + a^3}$ ,

adunque farà  $\frac{dx}{x^3 + a^3 \times x^3} = \frac{dx}{a^3 x^3} - \frac{dx}{a^6 xx} + \frac{xdx}{a^6 \times x^3 + a^3}$ ,

quantità tutte, che si fanno maneggiare con le date regole.

54. Ma se  $m$  farà numero rotto affermativo, o negativo, chiamisi  $r$  il numeratore della frazione, che è eguale ad  $m$ , ridotta che questa sia ai termini semplicissimi, e  $p$  il denominatore della medesima; talchè la formola data sia espressa per  $\frac{dx}{x^{\frac{r}{p}} \pm a^{\frac{r}{p}}}$ ;

$$\frac{dx}{x^{\frac{r}{p}} \pm a^{\frac{r}{p}}}$$

ponga  $x = y^p$ , ed  $a = b^p$ , e la formola si convertirà in  $\frac{py^{p-1} dy}{y^{\frac{r}{p}} \pm b^{\frac{r}{p}}}$ , che non à esponenti rotti, onde si può risolvere per le date regole.

Sia adunque, per esempio, la formola  $\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \pm a^{\frac{3}{2}}}$ ;

$$\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \pm a^{\frac{3}{2}}}$$

pongo  $x = yy$ ,  $a = bb$ , farà  $dx = 2ydy$ , e fatte le sostituzioni, la formola farà mutata in  $\frac{2ydy}{y^3 \pm b^3}$ , che non

à esponenti rotti.

55. Se poi fosse data la formola  $\frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$ , in

cui  $m$ , ed  $n$  fossero numeri rotti, chiamando  $r$  il numeratore della frazione  $n$ , e  $p$  il denominatore di quella, e così chiamando  $t$  il numeratore della frazione  $m$ , e  $q$  il denominatore della medesima (intendendo, che tali frazioni sieno ridotte a' termini semplicissimi) la

formola farà  $\frac{x^{\frac{r}{p}} dx}{x^{\frac{t}{q}} \pm a^{\frac{t}{q}}}$ , in cui  $r, p, q, t$  faranno nu-

meri interi positivi, o negativi.

Pongasi ora  $x = y^{pq}$ , ed  $a = b^{pq}$ , la formola si convertirà in  $\frac{pqy^{r-1} dy}{y^{pt} \pm b^{pt}}$ , che non à frazioni negli es-

ponenti. Sia per esempio la formola  $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{x^{\frac{4}{5}} \pm a^{\frac{4}{5}}}$ ; pon-

go  $x = y^{10}$ ,  $a = b^{10}$ , farà  $dx = 10y^9 dy$ ,  $x^{\frac{3}{2}} = y^{15}$ ,  $x^{\frac{4}{5}} = y^8$ , e fatte le sostituzioni, farà mutata la formola in  $\frac{10y^{24} dy}{y^8 \pm b^8}$ , che non à esponenti rotti.

56. Finalmente se farà  $\frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$ , essendo  $n, m,$   
k ed

ed  $u$  numeri interi positivi, si potrà sempre averne l'integrale, supposte le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e l'integrale sarà composto di quantità algebriche, e di una quantità sommatoria, il che si farà nel seguente modo.

Si supponga la formola 
$$\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m} =$$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.}}{x^m \pm a^m}^{u-1}$$

fino al termine costante, cioè fino a quello in cui l'esponente di  $x$  sia zero, e sia questo  $K$ , indi si aggiunga

$$A \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}, \text{ cioè si faccia } \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m} =$$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.} + K}{x^m \pm a^m}^{u-1} +$$

$$A \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$$

Si differenzj l'equazione, e si riduca al zero, e si ordinino i termini; dal paragone de' primi al zero troverassi il valore dell'assunta  $B$ ; dal paragone de' secondi al zero troverassi il valore dell'assunta  $C$ ; e così di mano in mano il valore dell'altre, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole, comechè la sommatoria

toria  $\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$  dipende dalle sole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e gl'altri termini nell'omogeneo di comparazione sono algebratici, così la proposta formola non esigerà quadrature superiori.

57. Alle volte potrà occorrere, che alcuno de' coefficienti  $B, C, D$  ec. si trovi arbitrario, ma solo allora quando sia  $n$  maggiore di  $m - 1$ . E si noti pure, che ogni qual volta sia  $m = n + 1$ , il coefficiente  $A$  si troverà eguale al zero, ed in conseguenza algebratico l'integrale della proposta formola.

58. Ma se nella proposta formola differenziale l'esponente  $n$  fosse intiero negativo, di modo, che essa fosse  $\frac{dx}{x^n \times x^m \pm a^m}$ , in cui ora è positivo, l'integrale sarebbe

$$\frac{Bx^{um-2m} + Cx^{um-2m-1} + Dx^{um-2m-2} \text{ ec.} + K + \dots}{x^{n-1} \times x^m \pm a^m}$$

$A \int \frac{dx}{x^n \times x^m \pm a^m}$  i quali coefficienti  $B, C, D$  ec. si

determineranno nello stesso modo, come sopra.

Sia adunque per esempio  $\frac{x dx}{x^3 + a^3}$ ; in questo ca-

k 2

fo



so si è  $n=1$ ,  $m=3$ ,  $u=2$ . Sarà pertanto

$$\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{Bxx + Cx + K}{x^3 + a^3} + A \int \frac{x dx}{x^3 + a^3}, \text{ e differenziando,}$$

$$\frac{x dx}{x^3 + a^3} =$$

$$\frac{2Bxx + Cdx \times x^3 + a^3 - 3xx dx \times Bxx + Cx + K + Axx}{x^3 + a^3} =$$

e riducendo al comun denominatore, ordinando l'equazione, e paragonandola al zero, farà

$$\begin{aligned} & 2Bx^4 dx + Cx^3 dx - 3Kxx dx + 2Ba^3 x dx + Ca^3 dx \\ & - 3Bx^4 dx - 3Cx^3 dx + Aa^3 x dx = 0, \\ & + Ax^4 dx - x dx \end{aligned}$$

e però dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini, troveremo  $A - B = 0$ , cioè  $B = A$ ,  $C = 0$ ,  $K = 0$ ,  $2Ba^3 + Aa^3 - 1 = 0$ , cioè  $Aa^3 = 1 - 2Ba^3$ , e ponendo  $A$  in luogo di  $B$ , farà  $A = \frac{1}{3a^3} = B$ , onde

finalmente

$$\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{xx}{3a^3 \times x^3 + a^3} + \frac{1}{3a^3} \int \frac{x dx}{x^3 + a^3}$$

$$\text{Ma } \int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{1}{3aa} \times \int \sqrt{xx - ax + aa} - \int \frac{1}{x+a}$$

con di più  $\frac{2}{3aa}$  moltiplicato nell'arco di circolo del rag-

gio

gio  $\sqrt{\frac{3aa}{4}}$ , tangente  $= x - \frac{a}{2}$ ; adunque farà

$$\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{xx}{3a^3 \times x^3 + a^3} + \frac{1}{9a^3} \int \sqrt{xx - ax + aa} -$$

$$\frac{1}{9a^3} \int \sqrt{x+a} + \frac{2}{9a^3} \times \text{arco di circolo del raggio} =$$

$\sqrt{\frac{3aa}{4}}$ , tangente  $= x - \frac{a}{2}$ , presi i logaritmi nella logaritmica della sottangente  $= a$ .

59. Ma se l'esponente  $m$  fosse negativo, si tramuti la formola in altra equivalente, in cui l'esponente sia positivo nel modo indicato al num. 51.

60. E se ambi  $m$ , ed  $n$  fossero rotti, si facciano le sostituzioni del numero 55.

61. Se poi l'esponente  $u$  non fosse numero intero, ma rotto affermativo o negativo, basterà, che la formola sia uno de' casi considerati al numero 39. acciocchè si tramuti in un'altra capace d'essere maneggiata colle date regole.

Anzi la formola  $\frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$ , essendò gl'esponenti

$n$ ,  $m$ ,  $u$  numeri interi positivi, o negativi, ed anco in qualunque modo rotti razionali, co' segni del più, o del meno a piacere, farà integrabile, o almeno riduci-

ducibile alle note quadrature, ogni qualvolta i detti esponenti abbiano tra loro tal proporzione, che una delle due quantità da essi composte, cioè  $u - \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$ ,

o pure  $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$  sia eguale ad un numero qualun-

que intero. Se questo numero intero sarà positivo, la formola s'integrerà algebricamente, salvi que' casi, ne' quali s'insinui la potestà  $x^{-1} dx$ , che obbliga a' logaritmi. Se questo numero intero sarà negativo, la formola si ridurrà alle quadrature del circolo, o dell'iperbola.

Per conseguire l'intento rispetto al primo caso di  $u - \frac{1}{m} - \frac{n}{m} - 1$  eguale a numero intero, si faccia

$$x^m + a^m = zx^m; \text{ dunque } x^m = \frac{a^m}{z-1}, \quad x = \frac{a}{z-1^{\frac{1}{m}}}$$

$$x^n = \frac{a^n}{z-1^{\frac{n}{m}}}, \quad x^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{z-1^{\frac{1+n}{m}}}, \quad \text{e però}$$

$$x^n dx = -\frac{a^{n+1} dz}{m(z-1)^{\frac{n+1}{m}}}; \text{ ma } x^m + a^m =$$

$$zx^m = a^m z, \text{ ed } x^m + a^m = \frac{a^{mu} z^u}{z-1}, \text{ dunque fatte le}$$

dovute

dovute sostituzioni nella proposta formola, farà essa

$$\frac{a^{n+1} - m^u z^{-u} dz}{m} \times \frac{z^{-n-1} - 1 + u}{z - 1 - \frac{m}{m}}$$

manifestamente si vede, essere integrabile algebricamente (salva l'eccezione fatta) quando sia  $\frac{-n-1-1+u}{m}$

$1+u$  eguale a numero positivo intero. Che se sia  $\frac{-n-1-1+u}{m}$  numero intero, ma negativo, per le

cose dette ne' superiori paragrafi, la sommatoria della formola non dipenderà da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell' iperbola.

Vengo al secondo caso, cioè di  $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$  eguale a numero intero; si faccia  $x^m + a^m = z$ , farà dunque

$$x^m = z - a^m, x = z - a^m \frac{1}{m}, x^n = z - a^m \frac{n}{m}, x^{n+1} = z - a^m \frac{n+1}{m}, x^n dx = \frac{dz}{m} \times \frac{z^{-n-1} - 1 + u}{z - a^m \frac{n+1}{m}}; \text{ ma}$$

$x^m + a^m = z$ , ed  $x^m + a^m = z^u$ , dunque fatte le sostituzioni nella proposta formola, farà essa

$$\frac{dz}{m} \times \frac{z^{-n-1} - 1 + u}{z - a^m \frac{n+1}{m}}, \text{ o sia } \frac{z^{-u} dz}{m} \times \frac{z^{-n-1} - 1 + u}{z - a^m \frac{n+1}{m}},$$

la quale è integrabile algebricamente (salva la suddet-

ta

ta eccezione ) quando sia  $\frac{n+1}{m} - 1$  eguale a numero

positivo intiero , e quando sia eguale a numero negativo intiero , la fommatoria dipenderà dalle note quadrature del circolo , e dell' iperbola , per i superiori paragrafi .

62. Che se il denominatore della proposta frazione elevato a qualunque potestà intiera non fosse un binomio , come si è fin' ora considerato , ma fosse un qualunque altro , purchè egli sia riducibile ne' suoi componenti reali , ne' quali la incognita non ecceda la seconda dimensione , o per mezzo delle equazioni convertibili , o in altro modo , si potrà sempre ridurre la formola alle note quadrature .

Imperciocchè sia per esemplo  $\frac{dx}{\frac{xx + bx + aa}{x + c}}$  ;

fatta attualmente la potestà del denominatore , si finga un' equazione così ,  $\frac{dx}{\frac{xx + bx + aa}{x + c}}$  +

$$\frac{Ax^3 dx + Bxxdx + Cxdx + Ddx}{x^4 + 2bx^3 + 2aaxx + bxxx + 2aabx + a^4}$$

$$\frac{Fxxdx + Gxdx + Hdx}{x^3 + 3cxx + 3ccx + c^3}$$

termini , quanti sono i componenti del denominatore , ed in essi termini tante majuscole , quanta è la massima potestà

potestà dell'incognita nel denominatore rispettivo, moltiplicando in oltre in ogni termine la prima majuscola per la massima potestà meno uno della incognita del suo denominatore, la seconda majuscola per essa potestà meno due, e così di mano in mano fino all'ultima costante. Con la solita maniera si devono determinare esse costanti assunte, ed il primo termine somministrerà

tante frazioni divise per  $\frac{\quad}{xx + bx + aa}$ <sup>2</sup>, nel qual denominatore fatto sparire il termine di mezzo, le frazioni faranno un caso particolare del Canone generale  $\frac{x^m dx}{x^n \pm a^n}$ <sup>u</sup>

divise per  $\frac{\quad}{x+c}$ <sup>3</sup>, che si riducono alla regola ordinaria dei denominatori composti di radici eguali.

63. Se in oltre il numeratore della proposta formola sarà moltiplicato per una potestà positiva, o negativa dell'incognita, ritrovati i valori delle majuscole, operando come se la frazione non fosse moltiplicata per essa potestà, i termini risultanti si moltiplichino per la stessa potestà, ed il rimanente si faccia al solito ec.

64. Finisco questo primo Capo con soddisfare alla promessa fatta al Lettore intorno al *Metodo de' Polinomj* del Sig. Conte Jacopo Riccati, che è il seguente.

Col nome di Polinomj differenziali appello le frazioni, che hanno per numeratore la flussione  $dx$ , e per

denominatore un aggregato di potestà, gl' esponenti delle quali costituiscano una progressione aritmetica, che va a terminarsi nel nulla. E mentre questa condizione non si adempia, bisognerà supplire qualche termine affetto dal coefficiente = 0. Abbiassi la espressione

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + a}$$

sembra a prima vista un trinomio, ma realmente è un quadrinomio, e va esposta così

$$\frac{dx}{x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{2}{6}} + 0x^{\frac{1}{6}} + a}$$

In qualunque Polinomio esposto per una frazione, il di cui denominatore sia alzato alla potestà  $p$ , numero intero e positivo, àssi un metodo, che sarebbe generale, se non venisse frequentemente reso inutile dalle quantità immaginarie, ed oltre ciò alcuni artifizj particolari, che tal volta opportunamente ci soccorrono.

Do principio dal trinomio 
$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = dy,$$

conciosiaccchè a cotale espressione ogni trinomio facilmente si riduce. Facciasi  $x^m = z + A$ . (E'  $z$  una nuova variabile assunta, ed  $A$  una costante da determinarsi) Istituiti i necessarj computi per giungere alla sostituzione, abbiamo come segue

$$\begin{aligned} x^{2m} &= zz + 2Az + AA \\ ax^m &= az + aA \\ b &= b \end{aligned},$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{dx}{zz + 2Az + a \times z + AA + aA + b}$$

Dec

Dee farsi in maniera, che spariscano le quantità  $AA + aA + b$ , ponendole  $= 0$ , e ne' casi, in cui  $A$  non è quantità immaginaria, succede ottimamente la riduzione. E giacchè  $x^m = z + A$ , e prese le differenze,  $mx^{m-1} dx = dz$ ,

$$\text{ed } x = z + A^{\frac{1}{m}}, \text{ dunque } dx = \frac{dz}{mx^{m-1}} = \frac{dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}}}$$

In passando alle necessarie sostituzioni, onde nella nostra formola principale in cambio di  $x$ , e delle sue funzioni resti surrogata la variabile assunta  $z$  colle sue funzioni, troveremo

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}} \times z + zA + a \times z}$$

e liberando la quantità  $z$ , che moltiplica il binomio  $z + zA + a$  sotto il segno, farà

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{z^{-p} dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}} \times z + zA + a}$$

Il caso più semplice vuole l'esponente  $p$  eguale all'unità, essendo l'altro  $m$  qualsivoglia numero intero, o rotto, affermativo, o negativo; e fatto per brevità  $zA + a = g$ , l'espressione generale passa nella particolare

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + z \times z + A^{\frac{m-1}{m}}} = mdy$$

Istituisco una prima divisione, partendo cioè il numeratore della frazione per lo suo denominatore, ed il primo

è 2 qua-



quoziente farà  $\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^{\frac{m-1}{m}}}$ , e fatta la moltiplicazione,

e la sottrazione, conforme la pratica ordinaria, il residuo farà  $-\frac{dz}{g}$ , da esser partito per lo denominatore, e perciò

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + z \times z + A^{\frac{m-1}{m}} dz} = \frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$gg \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + gz \times z + A^{\frac{m-1}{m}}$$

Il primo termine del secondo membro è già ridotto alle quadrature note, e l'altro termine facilmente vi si riduce, ponendo  $z + A = u$ , e fatte le debite sostituzioni,

avremo  $\frac{-dz}{gg \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + gz \times z + A^{\frac{m-1}{m}}} = u^{-\frac{m+1}{m}} \frac{du}{gg - gA + g^2}$

Seguitando la nostra ricerca, sia l'esponente  $p$  eguale a qualsivoglia numero positivo, ed intero: per ottenere l'intento basterà prolungare alquanto l'operazione. Ripigliata per mano la formola generale

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{z^{-p} dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}} \times z + g} = dy,$$

e posto, per esempio,  $p =$  al binario, si ridurrà alla seguente

$$\frac{z^{-2} dz}{gg \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + 2gz \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + zz \times z + A^{\frac{m-1}{m}}} = mdy.$$

Di-

Divido, come sopra, il numeratore di queste frazioni per lo suo denominatore, ed il primo quoziente sarà

$$\frac{z^{-2} dz}{\frac{m-1}{gg \times z + A^m}}$$

il residuo  $-\frac{2z^{-1} dz}{g} - \frac{dz}{gg}$  da essere nuovamente per

l'intero denominatore diviso. Istituisco una seconda divisione nella frazione

$$\frac{-2z^{-1} dz}{\frac{m-1}{gg \times z + A^m} + \frac{2ggz \times z + A^m}{gg} + \frac{gzz \times z + A^m}{gg}}$$

e dopo le debite operazioni si averà il residuo  $\frac{4dz}{g} + \frac{2zdz}{gg}$  da partirsi per l'intero denominatore. Nascerà pertanto la seguente equazione

$$\frac{z^{-2} dz}{\frac{m-1}{gg \times z + A^m}} = \frac{z^{-2} dz}{\frac{m-1}{z + A^m} \times z + g^2} + \frac{z^{-1} dz}{\frac{m-1}{gg \times z + A^m}} + \frac{4g - 1 \times dz}{\frac{m-1}{gg \times z + A^m} \times z + g^2} + \frac{2zdz}{\frac{m-1}{gg \times z + A^m} \times z + g^2}$$

I primi due termini nell'omogeneo di comparazione sono due binomj, e gli altri due possono facilmente ridursi alla forma del binomio, facendo  $z + A = u$ , ovvero  $z + g = u$ . Ne' casi più composti, in cui si mette  $p=3, 4, 5$  ec.

5 ec. cresce il tedio del calcolo, ma il metodo non ci abbandona.

Esso metodo si estende a tutti i polinomj in infinito, mentre  $p$  sia numero intero, e positivo, perchè se fosse negativo, ed intero, la cosa riesce talmente facile, che non occorre favellarne. Per applicare il metodo altro non si richiede, che replicare la sostituzione  $x = z + A$ ,  $z = u + B$ , facendo sempre svanire que' termini, ne' quali le sole quantità costanti si ritrovano; laonde, per cagion d'esempio, si riduca il quadrimomio al trinomio, e questo al binomio. In oltre è d'uopo di valersi di tempo in tempo d'una dimezzata divisione, perchè non abbiano a turbarci gli esponenti negativi, che bene spesso ci si presentano nel numeratore della frazione. Fra tanto il modo d'operare si mostra più spedatamente cogli esempj, che coi precetti.

Sia il quadrimomio  $\frac{dx}{x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c} = dy$ . Le

costanti  $a, b$  possono essere  $= 0$ . Pongo  $x^m = z + A$ , ed avrassi

$$x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c = z^3 + 3Az^2 + 3AAz + A^3 + azz + 2aAz + aAA + bz + Ab + c.$$

Faccio  $A^3 + aAA + Ab + c = 0$ , e così determino il valore della costante assunta  $A$ . Quindi ripetute le operazioni, come nel trinomio, trovo  $z^{-p} dz$ .

$$\frac{z^{-p} dz}{z + A} \times \frac{z^{-p} dz}{z^2 + gz + b}$$

Le spezie  $g, b$  sono costanti surrogate in luogo d'altre più composte; e stante, che  $p$  è un numero positivo, ed intero, alzo il trinomio  $zz + gz + b$  alla potestà  $p$ . Dopo

Dopo ciò intraprendo tante divisioni, quante sieno bastanti, per fare, che laddove nel numeratore ci sia l'esponente negativo, nel denominatore non si rinvenga altra

quantità, che il binomio  $z + A \frac{m-1}{m}$ , e mette da parte sì fatte frazioni, che, trascurati i coefficienti, saranno analoghe alla seguente  $\frac{z^{-n} dz}{z + A \frac{m-1}{m}}$ , posto  $n$  qualsivoglia numero po-

sitivo, ed intero. Gli altri termini sono rappresentati dalla formola generale

$$\frac{z^n dz}{z + A \frac{m-1}{m} \times \frac{z^2 + gz + b^p}{z}}$$

Ripeto dunque l'operazione, facendo  $z = u + B$ , indi fatto sparire l'ultimo termine, conforme il solito, ed alzato il binomio  $u + B$  alla potestà qualunque  $n + 1$ , e surrogati in cambio di  $z$ , e delle sue funzioni, i valori esposti per la nuova indeterminata  $u$ , tutti i membri compariranno sotto l'aspetto espresso dalla seguente formola

$$\frac{u^{n-p} du}{u + A + B \frac{m-1}{m} \times \frac{u + k^p}{u}}$$

Quando sia  $p$  maggiore di  $n$ , onde l'esponente  $n - p$  sia negativo, si mettano in pratica le divisioni, e la formola indi nascente farà  $\frac{u^{-n} du}{u + A + B \frac{m-1}{m}}$ ; essendo poi  $n - p$

positivo, avremo  $\frac{u^n du}{u + A + B \frac{m-1}{m}}$ ; e finalmente

$$\frac{u^n du}{u + A + B \frac{m-1}{m} \times \frac{u + k^p}{u}} \quad \text{po-}$$

ponendo  $u + k = \omega$ , ed essendo tanto  $n$ , quanto  $p$  numeri interi, faranno sempre riducibili alle quadrature più semplici i binomj, che nasceranno dalle accennate operazioni.

Egli è vero, che a cagione delle immaginarie il metodo riesce limitato; ma oltrechè bene spesso le radici, o tutte, o in parte sono reali; oltrechè in molti casi particolari possono scansarsi le quantità immaginarie, non bisogna trascurare quel molto, che si può avere, perchè il tutto non può conseguirsi.

Abbiassi per esempio il trinomio  $\frac{dx}{x + 2 \sqrt{x + 2}}$ .

Faccio  $x^{\frac{1}{2}} = z + A$ , dunque  $x + 2 \sqrt{x + 2} = zz + 2Az + 2z + AA + 2A + 2$ . Mettendo  $AA + 2A + 2 = 0$ , trovo  $A = \sqrt{-1 - 1}$ ; ed ecco in campo una grandezza mista di reale, ed immaginario, e procedendo a norma del metodo avremo  $\frac{z^{-p} dz}{z + A \sqrt{z + 2A + 2}} = \frac{z^{-p} dz}{z + 2\sqrt{-1}} + \frac{Az^{-p} dz}{z + 2\sqrt{-1}}$ .

Perchè si tolgano di mezzo le immaginarie, mutiamo maniera; e nella grandezza  $zz + 2A + 2 \times z + AA + 2A + 2$  facciamo, che si dilegui il termine di mezzo  $2Az + 2z$ , ponendolo = 0, onde sia  $A = -1$ , e di più  $AA + 2A + 2 = 1$ , e la formola farà, come segue

$$\frac{dz}{z - 1 \sqrt{z + 1}} = \frac{z dz}{z + 1} - \frac{dz}{z + 1}; \text{ e ne' due}$$

binomj dell'omogeneo di comparazione, che sono equivalenti agli altri due già considerati, non s'incontra difficoltà.

CAPO

## C A P O I I.

*Delle Regole dell'Integrazioni facendo uso delle Serie.*

65. **F**Acendo ora passaggio all'altra maniera d'integrare nel principio indicata, cioè col mezzo delle serie, è necessario di premettere le seguenti Regole.

*Regola I.* Ridurre una frazione a serie infinita.

Si divida il numeratore per lo denominatore con la regola ordinaria della divisione, ed il rimanente di nuovo si divida, e così di mano in mano in infinito, e si avrà una serie d'infiniti termini eguale alla proposta frazione. Si avverta però di porre tanto nel numeratore, quanto nel denominatore della frazione proposta per primo termine quello, che sarà il maggiore. Con questo modo operando averemo per tanto

$$\frac{f}{m+n} = \frac{f}{m} - \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} - \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m-n} = \frac{f}{m} + \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{af}{mm \pm nn} = \frac{af}{mm} \mp \frac{afnn}{m^4} + \frac{afn^4}{m^6} \mp \frac{afn^6}{m^8} + \frac{afn^8}{m^{10}} \text{ ec.}$$

cioè coi segni alternativi, quando il secondo termine

m

del

del denominatore sia positivo; e tutti positivi, quando sia col segno negativo.

Similmente farà

$$\frac{f}{mm \pm mn} = \frac{f}{mm} \mp \frac{fn}{m^3} + \frac{fnn}{m^4} \mp \frac{fn^3}{m^5} + \frac{fn^4}{m^6} \text{ ec.}$$

$$\frac{1}{1 \pm xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 \text{ ec.}$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2 - 3x^4} = 2x^2 - x^4 = 2x^2 - 2x + 7x^2 - 13xx + 34x^2 \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m \mp n} = \frac{f}{mm} \pm \frac{2fn}{m^3} + \frac{3fnn}{m^4} \pm \frac{4fn^3}{m^5} + \frac{5fn^4}{m^6} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m \mp n} = \frac{f}{m^3} \pm \frac{3fn}{m^4} + \frac{6fnn}{m^5} \pm \frac{10fn^3}{m^6} + \frac{15fn^4}{m^7} \text{ ec.}$$

Sia una frazione, il di cui numeratore, e denominatore sieno due serie infinite, e sia per esempio

$$1 + \frac{1}{2} axx - \frac{1}{8} aax^4 + \frac{1}{16} a^3 x^6 - \frac{5}{128} a^4 x^8 \text{ ec.}$$

$$1 - \frac{1}{2} bxx - \frac{1}{8} bbx^4 - \frac{1}{16} b^3 x^6 - \frac{5}{128} b^4 x^8 \text{ ec.}$$

$$\text{farà essa} = 1 + \frac{1}{2} bxx + \frac{3}{8} bbx^4 + \frac{5}{16} b^3 x^6 + \frac{35}{128} b^4 x^8 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{2} axx + \frac{1}{4} abx^4 + \frac{3}{16} abbx^6 + \frac{5}{32} ab^3 x^8 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{8} aax^4 - \frac{1}{16} aabx^6 - \frac{3}{64} aabbx^8 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{16} a^3 x^6 + \frac{1}{32} a^3 bx^8 \text{ ec.}$$

$$- \frac{5}{128} a^4 x^8 \text{ ec.}$$

66. *Regola II.* Ridurre una quantità complessa radicale in serie infinita .

Sia per esempio  $\sqrt{aa \pm xx}$  . Si estrarra la radice quadrata dal primo termine, indi si proseguisca in infinito l'operazione nella solita maniera dell'estrazione delle radici , e si avrà

$$\sqrt{aa \pm xx} = a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

$$\sqrt{ax \pm xx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128a^{\frac{7}{2}}} \text{ ec.}$$

Si noti , che nell' una , e nell' altra di queste due serie , se si moltiplicherà per 3 il numeratore , e denominatore di ciascun termine , principiando dal quarto , i coefficienti numerici faranno nel numeratore per ordine , principiando dal quarto , 3 , 3 × 5 , 3 × 5 × 7 ec. nati dalla vicendevole moltiplicazione de' numeri dispari .

Nel denominatore poi , principiando dal secondo , faranno 2 , 2 × 4 , 2 × 4 × 6 , 2 × 4 × 6 × 8 ec. nati dalla vicendevole moltiplicazione de' numeri pari .

67. *Regola III.* . Tutto ciò si può fare più generalmente per mezzo del seguente Canone

$$P + PQ^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ^2 + \frac{m-2n}{3n} CQ^3 + \frac{m-3n}{4n} DQ^4 \text{ ec.}$$



in cui  $P + PQ$  è la quantità data,  $\frac{m}{n}$  è l'esponente nu-

merico,  $P$  rappresenta il primo termine,  $Q$  il rimanente di tutti gl'altri termini divisi per il primo, e ciascuna delle lettere  $A, B, C, D$  ec. significano rispettivamente il termine anteriore di modo, che per  $A$

s'intenda  $P \frac{m}{n}$ , per  $B$  s'intenda  $\frac{m}{n} AQ$ , per  $C$  s'intenda

$\frac{m-n}{2n} BQ$  ec.

Sia da ridursi in serie la formola  $\sqrt{aa + xx}$ , adunque farà  $P = aa$ ,  $Q = \frac{xx}{aa}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ , e però

$$\sqrt{aa + xx} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

Sia  $\sqrt[5]{a^5 + a^4x - x^5}$ , cioè  $\frac{a^5 + a^4x - x^5}{5}$ , farà  $P = a^5$ ,  $Q = \frac{a^4x - x^5}{a^5}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 5$ , e però

$$\frac{a^5 + a^4x - x^5}{5} = a + \frac{a^4x - x^5}{5a^4} - \frac{2a^2xx + 4a^4x^6 - 2x^{10}}{25a^2} \text{ ec.}$$

Sia  $\frac{b}{\sqrt[3]{y^3 - aay}}$ , cioè  $b \times \frac{y^3 - aay}{3}$ , farà

$P = y^3$ ,  $Q = -\frac{aa}{yy}$ ,  $m = -1$ ,  $n = 3$ , e però

rò



# LIBRO III. F

Abbiasi da elevare u  
da elevarsi alla potestà m

$$y + ayy + by^3 + cy^4 + fy^5$$

$$y^m + \frac{may^{m+1}}{1} + \frac{m \times m}{1 \times 2}$$

$$+ \frac{m \times by^m}{1}$$



10)  $b \times \sqrt[3]{y^3 - aay}^{-\frac{1}{3}} = \frac{b}{y} + \frac{aab}{3y^3} + \frac{2a^2b}{9y^5} + \frac{14a^6b}{81y^7}$  ec.

Se fosse  $\frac{b}{\sqrt[3]{a+x}}$ , si esprimerebbe così  $b \times \sqrt[3]{a+x}^{-\frac{1}{3}}$ ,  
 $\sqrt[3]{a+x}$

ed il rimanente si farebbe, come sopra.

Sia  $\frac{b}{\sqrt[3]{a+x}}$ , cioè  $b \times \sqrt[3]{a+x}^{-\frac{1}{3}}$ , farà  $P=a$ ,  $Q=\frac{x}{a}$ ,

$m=-\frac{1}{3}$ ,  $n=1$ , e però  $b \times \sqrt[3]{a+x}^{-\frac{1}{3}} = \frac{b}{a^3} - \frac{3bx}{a^4} +$

$\frac{6bxx}{a^5} - \frac{10bxx^3}{a^6}$  ec.

68. Abbiafi, da elevare una quantità complessa, ad una data potestà, e sia per esempio  $a+x$  da elevarfi alla potestà  $m$ , cioè  $\sqrt[m]{a+x}$ . Sarà  $P=a$ ,  $Q=\frac{x}{a}$ ,

$m=m$ ,  $n=1$ , onde  $\sqrt[m]{a+x} = a^m + \frac{ma^{m-1}x}{1} +$

$\frac{m \times m-1 \times a^{m-2}xx}{1 \times 2} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times a^{m-3}x^3}{1 \times 2 \times 3}$  ec.

Abbiafi ec.

69. Ciò posto: Sia da integrarsi la formola differenziale  $\frac{b dx}{a+x}$ . Ridotta in serie la frazione  $\frac{b}{a+x}$ , e

moltiplicato ciascun numeratore per  $dx$ , avremo

$$\frac{b dx}{a+x} = \frac{b dx}{a} - \frac{b x dx}{a a} + \frac{b x x dx}{a^2} - \frac{b x^3 dx}{a^3} + \frac{b x^4 dx}{a^4} \text{ ec. ,}$$

ed integrando

$$\int \frac{b dx}{a+x} = \frac{b x}{a} - \frac{b x x}{2 a a} + \frac{b x^3}{3 a^2} - \frac{b x^4}{4 a^3} + \frac{b x^5}{5 a^4} \text{ ec.}$$

70. Sia la formola  $\frac{adx}{x}$ . Fatta  $x = b + z$ , intenden-

do per la  $b$  una qualunque costante a piacere, e per  $z$  una nuova incognita, farà  $\frac{adx}{x} = \frac{adz}{b+z}$ .

Ridotta in serie la frazione  $\frac{a}{b+z}$ , e moltiplicato

ciascun numeratore per  $dz$ , farà

$$\frac{adz}{b+z} = \frac{adz}{b} - \frac{az dz}{bb} + \frac{az z dz}{b^2} - \frac{az^3 dz}{b^3} + \frac{az^4 dz}{b^4} \text{ ec. ,}$$

ed integrando  $\int \frac{adz}{b+z} = \frac{az}{b} - \frac{az z}{2bb} + \frac{az^3}{3b^2} - \frac{az^4}{4b^3} +$

$$\frac{az^5}{5b^4} \text{ ec. , cioè } \int \frac{adx}{x} = a \times \frac{x-b}{b} - \frac{a \times x-b^2}{2bb} +$$

$$\frac{a \times x-b^3}{3b^2} - \frac{a \times x-b^4}{4b^3} \text{ ec.}$$

71. Sia la formola  $\frac{bdx}{\sqrt[5]{x+a}}$  ; ridotta in serie,

$$\frac{bdx}{\sqrt[5]{x+a}}$$

$$\text{farà } \frac{bdx}{\sqrt[5]{x+a}} = bdx - \frac{3bxdx}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bxxdx}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^3dx}{125a^{\frac{18}{5}}} \text{ ec.,}$$

e però integrando farà

$$\int \frac{bdx}{\sqrt[5]{x+a}} = \frac{bx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bxx}{10a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bx^3}{75a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^4}{500a^{\frac{18}{5}}} \text{ ec.}$$

E così si faccia di qualunque altra proposta formola.

72. Se le serie così ritrovate, che esprimono l'integrale delle proposte formole differenziali, e comprendono un numero infinito di termini, faranno di valore infinito, farà infinito l'integrale delle proposte formole differenziali. E se esse serie faranno di valore finito, e di più sommabili, cioè a dire, che si sappia ritrovare il valore di esse serie, quantunque composte di termini infiniti di numero, il che molte volte succede, si avrà in quantità finite, e però algebriche l'integrale delle proposte formole differenziali. Ma se le serie essendo di valore finito non faranno sommabili, quanti più termini nella serie si prenderanno, tanto più si accollerà al giusto l'integrale della proposta formola differenziale, ma l'esatto però verrà espresso da tutta la serie.

73. Per riconoscere, quali sieno le serie di valore infinito, quali di valore finito, e quali sommabili, si  
veda

veda il trattato *De Seriebus Infinitis* del Sig. Giacomo Bernulli, ed altri Autori, che di esse trattano.

74. Ma qualunque volta la formola differenziale sia composta di due soli termini, si può generalmente, e più speditamente far uso del seguente Canone, in cui gl'esponenti  $m$ ,  $n$ ,  $t$  possono essere intieri, rotti, positivi, e negativi, ed il quale si può produrre a quanti termini si vuole, giacchè da' quattro posti, abbastanza si manifesta la legge, con cui si forma.



CAPO

$$\frac{-mn + 2n}{t + 2n} \times \frac{t + mn + 3n}{t + 3n} \times y^t + 3^n \text{ ec.} \times \frac{b + cy^n}{b + cy^n}^{m+1}$$

C, D, E ec. sono costanti arbitrarie da determinarsi.

$$\frac{1}{n} \frac{m+1}{m+1} \times ncy^{n-1} dy \times \frac{b + cy^n}{b + cy^n}^m \times \frac{Ay^t + By^{t+2n} + Cy^{t+2n} \text{ ec.}}{Ay^t + By^{t+2n} + Cy^{t+2n} \text{ ec.}}$$

, allora i termini tutti del canone farebbero positivi.  
 zero la quantità  $t + mn + 3n$ , ed in conseguenza farà

$$\frac{+ 24a^3 bx - 16a^3 xx}{105b^3 x^2} \times \frac{b + x^{\frac{3}{2}}}{b + x^{\frac{3}{2}}}$$







indi

## C A P O I I I.

*Dell' uso delle accennate Regole nelle Rettificazioni delle Curve , Quadrature de' Spazj , Appianazioni delle Superficie , e Cubature de' Solidi .*

75. **P**ER fare uso delle sopraccennate regole di calcolo integrale , applicandole alle quadrature de' spazj , rettificazioni di curve , appianazioni , o sia quadrature di superficie , e cubature de' solidi , sia una qualunque curva  $ADH$  ( *Fig. 6.* ) riferita all' asse  $AB$  con le ordinate parallele fra loro , ed in angolo retto sopra l' asse stesso . Alla ordinata  $BD$  condotta  $CH$  parallela , ed infinitamente prossima , e tirata  $DE$  parallela a  $BC$  , il mistilineo  $BDHC$  farà la flussione , o il differenziale , o sia l' elemento dello spazio  $ABD$  , e perchè lo spazio  $DEH$  è nullo rispetto al rettangolo  $BDEC$  , si potrà prendere esso rettangolo per l' elemento del suddetto spazio  $ABD$  . Adunque la somma di tutti questi rettangoli infinitesimi  $BDEC$  farà lo spazio compreso dalla curva  $AD$  , e dalle coordinate  $AB$  ,  $BD$  . Quindi chiamata  $AB=x$  ,  $BD=y$  , farà  $BC=dx$  ,  $EH=dy$  , ed il rettangolo  $BDEC=ydx$  farà la formola per gli spazj . Se adunque in questa formola sostituiremo in luogo di  $y$  il valore dato per  $x$  , e per le co-

n

stanti

stanti dell'equazione della curva , o in luogo di  $dx$  , il valore dato per  $y$  ,  $dy$  , e le costanti , ed indi integreremo , farà l'integrale il ricercato spazio  $ABD$  .

Altre espressioni , o formole possono averfi degl'elementi de' spazj per mezzo di Settori , o di Trapezj , le quali in certi incontri sogliono essere più comode della riferita ; se ne vedrà la maniera , e l'uso in alcuni esempj .

76. Che se la curva farà riferita al fuoco , o sia ad un punto fisso , per esemplo  $M$  , da cui partano tutte le ordinate ; condotta all'ordinata  $MD$  la infinitamente prossima  $MH$  , lo spazio infinitesimo  $MHD$  farà l'elemento dello spazio  $AMD$  ; onde , perchè descritto col centro  $M$  , raggio  $MD$  , l'archetto infinitesimo  $DK$  , lo spazietto  $DKH$  è nullo rispetto allo spazio  $MDK$  , e perchè altresì l'archetto  $DK$  si può assumere per la tangente in  $D$  , o in  $K$  , ne viene , che lo spazio  $MDK$  farà l'elemento dello spazio  $AMD$  .

Chiamata per tanto  $MD=y$  ,  $KD=dz$  , farà  $\frac{ydz}{2}$

la formola generale degli spazj per le curve riferite al fuoco . E se in questa formola si sostituirà in luogo di  $y$  , o di  $dz$  il rispettivo valore dato dall'equazione della curva , l'integrale farà lo spazio ricercato , cioè lo spazio  $AMD$  .

77. Ma se la curva sarà riferita ad un diametro, cioè se le coordinate non faranno tra loro in angolo retto, condotta (Fig. 7.)  $HG$  perpendicolare ad  $AG$ , il prodotto di  $HG$ , o sia di  $FG$  in  $BC$  farà il piccolo parallelogrammo  $BCE D$ , ed in conseguenza l'elemento dell'area  $ABD$ . E perchè essendo dato l'angolo  $DBG$ , è data la ragione del seno tutto al seno retto, che sia per esempio quella di  $m$  ad  $n$ , fatta al solito  $AB = x$ ,  $BD = y$ , farà  $HG$ , o sia  $FG = \frac{ny}{m}$ , ed il parallelogrammo  $BCE D$  farà  $\frac{nydx}{m}$ , formola generale dello spazio.

78. Egli è chiaro, che la somma di tutte le porzioni infinitesime  $DH$  della curva formano la curva stessa, e però, che  $DH$  ne farà l'elemento, adunque chiamata (Fig. 6.)  $AB = x$ ,  $BD = y$ , e però  $BC = dx$ ,  $EH = dy$ , nelle curve riferite all'asse, cioè con le coordinate in angolo retto, farà  $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , formola generale per la rettificazione di esse curve.

79. Rispetto alle curve riferite al fuoco, fatta pure  $MD = y$ ,  $KD = dz$ , farà istessamente la formola generale  $\sqrt{dy^2 + dz^2}$ .

80. Ma intorno alle curve con le coordinate in angolo obliqua, (Fig. 7.) essendo dato l'angolo  $HCG$ , è data la ragione del seno tutto al seno del comple-

mento , che sia quella di  $m$  , ad  $e$  , onde sarà  $CG = \frac{cy}{m}$  ,  
 ed  $EF = \frac{edy}{m}$  , e però  $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$  .

81. Sostituito in ciascuna di queste formole , in luogo di  $dy$  , o di  $dx$  , o di  $dz$  , il rispettivo valore dato per l'altra variabile , e suoi differenziali dalla equazione della curva , ed indi fatte le integrazioni , avremo la ricercata lunghezza della curva  $AD$  .

82. S'intenda moverfi il piano  $AHC$  ( Fig.<sup>a</sup> 6. ) attorno alla retta  $AC$  , la curva  $AH$  descriverà una superficie nel mentre , che il piano  $AHC$  descriverà un solido ; ma la porzione infinitesima  $DH$  descriverà una zona infinitesima , che farà l'elemento della superficie descritta dalla curva  $AH$  , ed il piano infinitesimo  $DBCH$  descriverà un solido pure infinitesimo , che farà l'elemento del solido descritto dal piano  $AHC$  . Ora intorno alle curve riferite all'asse colle coordinate in angolo retto ; sia la ragione del raggio alla circonferenza del circolo quella di  $r$  alla  $c$  , la circonferenza descritta col raggio  $BD = y$  farà  $\frac{cy}{r}$  , e però  $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$  l'espressione della zona infinitesima , ed in conseguenza la formola generale per le superficie.

83. Sarà pure  $\frac{cyy}{2r}$  l'area del circolo col rag-

gio

gio  $BD = y$ , e però  $\frac{cyydx}{2r}$  farà l'espressione del cilindretto infinitesimo descritto dal rettangolo  $BCED$ , ma esso non differisce, se non per quantità infinitesima del secondo ordine, dal solido generato dal piano  $BCHD$ ; adunque farà  $\frac{cyydx}{2r}$  la formola generale per i solidi.

84. Ma rispetto al caso della *Fig. 7.*, cioè quando le coordinate sono tra loro nel dato angolo obliquo, il raggio del circolo, sopra cui insiste la piccola zona, ed il piccol cilindro, non è  $CH = y$ , ma bensì  $GH = \frac{ny}{m}$ , siccome l'elemento  $DH$ , che forma la zona, non è  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , ma  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$ , e l'altezza del piccol cilindro non è  $BC = dx$ , ma  $FD = dx + \frac{edy}{m}$ ; adunque la formola della superficie in questo caso farà  $\frac{cny}{rm} \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$ .

85. Il prodotto del circolo col raggio  $GH$  nell'altezza  $FD$ , cioè  $\frac{cnmyy}{2rmm} \times \frac{dx + edy}{m}$ , è l'elemento del solido generato dal piano  $AGH$ ; adunque da questo sottraendo l'elemento del solido generato dal triangolo  $HCG$ , cioè  $\frac{cnmyy}{2rmm} \times \frac{edy}{m}$ , il rimanente farà l'elemento

del

del solido generato dal piano  $ABD$ , e però farà  $\frac{cnyydx}{2rmm}$  la formola generale per essi solidi.

86. Per le curve riferite al fuoco, come che è variabile l'angolo  $DMB$  (*Fig. 6.*), e per conseguenza non si può avere il valore della  $BD$ , o  $CH$ , raggio del circolo, che necessariamente entra nella formola delle quadrature della superficie, e cubature del solido, fa d'uopo dall'equazione riferita al fuoco cavare l'equazione della stessa curva riferita all'asse, ed indi procedere colla solita maniera già spiegata; avvertendo, che nelle cubature bisognerà dagli integrali sottrarre il cono generato dal triangolo  $MHC$ , per avere il solido generato dal piano  $AMD$ .

87. La maniera di cavare dall'equazione differenziale di una curva al fuoco l'equazione della stessa curva all'asse è la seguente.

La curva  $ADH$  (*Fig. 6.*) si consideri nel tempo stesso relativamente al fuoco  $M$ , ed all'asse  $AMB$ , egli è certo, che il quadrato  $HD$  dell'elemento della curva è eguale tanto ai due quadrati  $DK$ ,  $KH$ , quanto agli altri due  $DE$ ,  $EH$ , e che di più il quadrato di  $MD$  è eguale ai due quadrati  $MB$ ,  $BD$ . Chiamando  $MB=x$ ,  $BD=y$ ,  $MD=z$ , e l'arco minimo  $DK=du$ , avremo  $dz^2 + du^2 = dx^2 + dy^2$ , ed  $xx + yy = zz$ .

Ora l'equazione della curva al fuoco venga espressa  
general-

generalmente dalla formola  $pdz = dx$ , in cui  $p$  è una data funzione di  $z$ , e farà  $dz^2 + p^2 dz^2 = dx^2 + dy^2$ , e collocando in vece di  $dy$  il suo valore nascente dall'equazione  $xx + yy = zz$ , vale a dire  $\frac{zdz - xdx}{\sqrt{zz - xx}}$ , troveremo

mo  $dz^2 + ppdz^2 = dx^2 + \frac{zdz - xdx}{zz - xx}^2$ , la quale si riduce alla

seguinte  $ppdz^2 \times \sqrt{zz - xx} = zdx^2 - 2xzdx dz + xxdz^2$ , ed estrarra la radice quadrata,  $pdz = \frac{zdx - xdz}{\sqrt{zz - xx}}$ .

E' d'uopo espurgare nuovamente la premessa equazione liberandola dalla mistura delle incognite, col porre  $x = \frac{zq}{b}$ , e però  $dx = zdq + qdz$ . Fatta svanire, col mezzo dell'equazione sussidiaria assunta, la  $x$ , e le sue funzioni, avremo  $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$ .

Nell'equazione  $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$  se tale farà il valore di  $p$  dato per  $z$ , che la quantità  $\frac{pdz}{z}$  con le debite so-

stituzioni possa ridursi alla differenziale d'un'arco di circolo, e che fatte le necessarie sommatorie, i due archi circolari si rispondano, come numero a numero, allora la curva sarà algebrica, e troveremo la sua equazione

all'



all'asse con una formola alla Cartesiana. In ogni altro caso la curva sarà trascendente.

## ESEMPIO.

Sia l'equazione di una curva al fuoco  $\frac{zdz}{\sqrt{cc-2bz-zz}} = du$ .

Avremo in tal caso  $p = \frac{z}{\sqrt{cc-2bz-zz}}$ , e nell'equazione

$\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$ , sostituito il valore di  $p$ ; sarà essa

$\frac{dz}{\sqrt{cc-2bz-zz}} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$ . Pongo  $b+z=t$ , dunque

$bb+2bz+zz=tt$ , e  $bb-tt=-2bz-zz$ , onde fatta la sostituzione, sarà  $\frac{dt}{\sqrt{cc+bb-tt}} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$ .

Sia per un caso  $cc+bb=bb$ , in tale supposto sarà  $t=q$ , cioè  $b+z=q=\frac{bx}{z}$ , dunque  $bz+zz=bx$ , e ponendo in luogo di  $z$  il suo valore, sarà l'equazione della curva  $b\sqrt{xx+yy}+xx+yy=bx$ , il che ec.

88. Il Canone assegnato c'insegna la maniera ancora di passare dall'equazione differenziale di una curva all'asse a quella del fuoco nel modo, che segue.

ESEM-

## ESEMPIO I.

Si cerchi l'equazione al fuoco in un circolo, preso il fuoco in un punto della sua circonferenza  $A$ .

Sia (Fig. 8.)  $AH = b$ ,  $AG = x$ ,  $AC = z = \sqrt{bx}$ .  
Richiamisi a memoria la formola  $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$ ,

ove si è preso  $q = \frac{bx}{z}$ ; poichè per l'equazione locale

del circolo è  $bx = zz$ , farà  $q = z$ , sicchè fatta svanire la  $q$ , sostituendo il suo valore  $z$ , farà  $\frac{pdz}{z} = \frac{dz}{\sqrt{bb - zz}}$ .

o sia  $p = \frac{z}{\sqrt{bb - zz}}$ ; nella formola adunque  $pdz = du$  se

in cambio di  $p$  sostituirassi il valore ritrovato, farà  $\frac{zdz}{\sqrt{bb - zz}} = du$ , equazione del circolo al fuoco preso nel punto  $A$ .

## ESEMPIO II.

89. Si cerchi l'equazione delle sezioni coniche riferite al loro umbilico  $M$ . (Fig. 6.)

Chiamata  $MB = x$ ,  $BD = y$ , l'equazione generale,

le, che abbraccia tutte le sezioni del cono; sarà

$$a \pm \frac{cx}{b} = \sqrt{xx + yy}, \text{ cioè: alla parabola col paramet-}$$

tro  $za$ , quando  $c = b$ ; all'ellissi coll'asse trasverso  $= \frac{zabb}{bb - cc}$ , col conjugato  $= \frac{zab}{\sqrt{bb - cc}}$ , distanza del fuoco dal vertice  $= \frac{ab}{b + c}$ , se  $b$  sia maggiore di  $c$ ; all'

iperbola coll'asse trasverso  $= \frac{zabb}{cc - bb}$ , col conjugato

$$= \frac{zab}{\sqrt{cc - bb}}, \text{ distanza del vertice dall'ombelico} = \frac{ab}{b + c},$$

se  $b$  sia minore di  $c$ ; se  $c = 0$ , sarà al circolo col diametro  $= za$ . Ma  $\sqrt{xx + yy} = z$ , dunque  $a \pm \frac{cx}{b} = z$ ,

ed in oltre  $bx = zq$ , dunque  $a \pm \frac{czq}{bb} = z$ , ovvero

$$\pm \frac{bb}{c} \mp \frac{abb}{cz} = q, \text{ e differenziando } \pm \frac{abcbdz}{ccz} = dq, \text{ e}$$

$$qq = \frac{bbbb}{cc} - \frac{2abbb}{ccz} + \frac{aabb}{ccz^2}, \text{ ed } bb - qq = bb -$$

$$\frac{bbbb}{cc} + \frac{2abbb}{ccz} - \frac{aabb}{ccz^2}, \text{ avremo dunque}$$

$$\frac{dq}{\sqrt{bb - qq}} = \frac{\pm cbabd z}{cz \sqrt{bbccz - bbb^2 z^2 + 2abbb^2 z - a^2 bbb^2}} = pdz,$$

$$\text{dunque } p = \frac{\pm abb}{\sqrt{bbccz - bbb^2 z^2 + 2abbb^2 z - aabb}}, \text{ ed}$$

essendo

essendo  $pdz = du$ , avremo l'equazione cercata

$$\pm \frac{abbdz}{\sqrt{bbcczz - bbbhzz + 2abbbhz - aabbbb}} = du. \text{ Il segno}$$

$$\sqrt{bbcczz - bbbhzz + 2abbbhz - aabbbb}$$

negativo serve, quando le affisse si prendono dal fuoco verso il vertice, il positivo al contrario ec.

90. Dissi doverfi ridurre l'equazione della curva al fuoco ad un'altra riferita all'asse, non perchè ciò sia necessario assolutamente per le compianazioni delle superficie, e per le cubature de' solidi, mentre tutto questo si può ottenere per mezzo del noto Teorema, cioè, che *La periferia della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa periferia è eguale alla superficie del solido, che dalla rotazione viene generato; e l'area della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa area è eguale al solido accennato; ma qui non si suppone il Lettore informato di essi centri di gravità.*

Ora per avere una sufficiente idea delle curve riferite al fuoco, mi faccio ad indagare la loro costituzione. Sia una di queste  $BCD$ , (*Fig. 9.*) le coordinate infinitamente prossime  $AC$ ,  $AE$ , che partono dal punto  $A$ , si chiamino  $z$ , la loro differenza  $FE = dz$ , e l'archetto minimo  $CF$  descritto col centro  $A$  sia  $= du$ . La natura della curva venga generalmente espressa dall'equazione differenziale  $pdz = du$ , in cui la  $p$  è data in qualsivoglia modo per  $z$ . Si noti pertanto, che il

primo membro  $pdz$ , avendo le variabili  $z$ , che tutte prendono origine dal polo  $A$ , è integrabile o algebricamente, o trascendentemente; ma l'altro membro  $du$ , senza incorrere in paralogismo, non può sommarfi, non essendo egli già la flussione dell' arco  $u$ , perchè esso elemento  $du$  cresce, o cala in doppio senso, cioè ed in se stesso, e coll' aumentarsi o diminuirsi dell' ordinate  $AC$ ,  $AE$ . Per procedere adunque aggiustatamente, col raggio arbitrario  $AI = r$  si descriva il circolo  $IGH$ , e sia nella periferia determinato un punto qualunque  $I$ , da cui si prendano come da punto fisso gl' archi crescenti  $IG$ ,  $IH$ ; e prorogate, se occorre, le variabili  $AC$ ,  $AE$  fino in  $G$ , ed  $H$ , faranno simili i settori  $ACF$ ,  $AGH$ , e però  $z$ ,  $du :: r$ ,  $GH$ ; che si chiami  $dq$ , dunque  $\underline{z dq} = du$ ; ma per l'equazio-

ne generale della curva è  $pdz = du$ , dunque  $\underline{z dq} = pdz$ ,

e però  $\underline{r pdz} = dq$ ; quindi sommando, sarà  $\int \underline{r pdz} = q = IG$ .

Le costanti aggiunte, o levate nell' integrare altro non farebbero, che diversificare il sito del punto  $I$ .

ESEM-

## ESEMPIO I.

Sia da costruirsi la spirale logaritmica, la di cui equazione è  $\frac{adz}{b} = du$ ; ma  $du = \frac{z dq}{r}$ , dunque  $\frac{adz}{b} = \frac{z dq}{r}$ ; o pure, perchè il raggio  $AI$  è assunto ad arbitrio, fatta  $b = r$ , e presa  $a$  come unità,  $\frac{dz}{z} = dq$ , ed integrando,  $\ln z = q$ , la di cui effezione geometrica è trascendente, ma semplicissima.

## ESEMPIO II.

Sia la spirale iperbolica della sottangente costante  $= a$ , e però l'equazione  $\frac{adz}{z} = du$ ; ma  $du = \frac{z dq}{r}$ , dunque  $\frac{ardz}{zz} = dq$ , e sommando farà  $b - \frac{ar}{z} = q$  ec.

In tali costruzioni si à sempre l'arco  $IG$  di circolo, che forma l'omogeneo di comparazione, l'altro membro  $\int \frac{rpdz}{z}$  può essere integrabile analiticamente, come nel secondo esempio, o trascendentemente per via della quadratura dell'iperbola, come nel primo, o per qualunque altra più composta. Quindi in un solo caso le nostre curve possono esser algebriche, cioè quan-

do la quantità  $\int \frac{rpdz}{z}$  possa ridursi alla rettificazione

d'un arco di cerchio, che al corrispondente  $IG$  stia, come numero a numero. Se la proporzione fosse per avventura forda, allora la curva  $BCEd$  farà bensì meccanica, ma non già dipendente dal tetragonismo del cerchio, riducendosi ad un problema diverso consistente nel dividere gl'archi circolari in qualunque data ragione, il che può ottenersi per mezzo dell' Elice o sia Spirale d'Archimede, o della Quadratrice di Dinostrato.

Le soprascritte cose ci somministrano un' altro modo di far passaggio dalle espressioni delle curve al fuoco a quelle, che si riferiscono all'asse, o al contrario. Giacchè  $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$ , chiamata la tangente  $IK = t$

(num. 26.), farà essa tangente  $t$  data analiticamente, o trascendentemente per  $z$ , ma  $AI = r$ ,  $AK = \sqrt{rr+tt}$ ,  $AM = x$ ,  $MC = y$ , dunque  $\frac{rz}{x} = \sqrt{rr+tt}$ , e dopo

le debite riduzioni,  $\frac{r\sqrt{zz-xx}}{x} = t = \frac{ry}{x}$ , ma  $t$  è dato

per  $z$ , e  $z = \sqrt{xx+yy}$ , dunque siamo arrivati alla curva locale all'asse, che tosto si riduce alle solite coordinate  $x, y$ . Tornando indietro per la stessa strada si passa dalle equazioni all'asse a quelle al fuoco.

Ripi-

Ripiglio l'esempio del num. 87., cioè la curva

$$\frac{zdz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = du \text{ riferita. al fuoco, per riferirla all'}$$

asse. Poichè si è presa  $pdz = du$  per equazione generale delle curve riferite al fuoco, sarà in questo caso particolare  $p = \frac{z}{\sqrt{cc - 2bz - zz}}$ , onde surrogato questo

$$\frac{z}{\sqrt{cc - 2bz - zz}}$$

valore in luogo di  $p$  nell'equazione  $rpdz = dq = \frac{rrdt}{rr + tt}$ ,

$$\text{farà } \frac{rdz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = \frac{rrdt}{rr + tt} \text{ Faccio } b + z = s, dz = ds,$$

$bb + 2bz + zz = ss$ , onde  $-2bz - zz = bb - ss$ , e sostituiti quelli valori, sarà  $\frac{rds}{\sqrt{cc + bb - ss}} = \frac{rrdt}{rr + tt}$ , cioè

$$\text{fatta } cc + bb = bb, \frac{rds}{\sqrt{bb - ss}}, \text{ o sia } \frac{rbds}{b\sqrt{bb - ss}} = \frac{rrdt}{rr + tt};$$

ma l'integrale del primo membro è un'arco di cerchio, di cui sia  $b$  il raggio, ed  $s$  il seno del complemento, ( num. 37. ) moltiplicato nella frazione costante  $r$ , e l'integrale del secondo è un'arco di cerchio del

raggio  $r$ , tangente  $t$ ; dunque il primo arco sarà al secondo, come  $b$  ad  $r$ , cioè saranno tra loro, come i raggi, dunque sono simili, dunque nella stessa ragione de' raggi sono pure le tangenti; e perchè la tangente del



del primo arco è  $\frac{b \sqrt{bb - ss}}{s}$ , farà  $\frac{b \sqrt{bb - ss}}{s}$ ,  $r :: b$ ,  
 $r$ , cioè  $t = \frac{r \sqrt{bb - ss}}{s}$ , quindi restituito il valore di  
 $s$ , e posto  $\frac{ry}{x}$  in luogo di  $t$ , si averà

$$\frac{ry}{x} = \frac{r \sqrt{bb - bb - 2bz - zz}}{b + z}, \text{ equazione ridotta all'asse,}$$

la quale si esprimerà con le sole coordinate  $x, y$ ,  
 ponendo in luogo di  $zz$  il valore  $xx + yy$ , e farà  $by +$

$$y \sqrt{xx + yy} = x \sqrt{bb - bb - 2b \sqrt{xx + yy} - xx - yy},$$

che è la stessa della ritrovata al citato num. 87.

Per passare dall'equazioni all'asse a quelle del fuoco,  
 prendo l'Esempio I. del num. 88. la di cui equazione  
 al circolo è  $z = \sqrt{bx}$  (Fig. 8.).

La tangente data per  $z$  dell'arco  $OQ$  descritto col  
 centro  $A$ , raggio  $r$ , si trova essere  $\frac{r \sqrt{bb - zz}}{z} = t$ ;

dunque nell'equazione canonica  $dq = \frac{r r dt}{r + z}$  sostituiti in

luogo di  $t$ , e di  $dt$  i rispettivi valori, avremo  
 $-dq = -\frac{r dx}{\sqrt{bb - zz}}$ ; pongo  $-dq$ , perchè crescen-

do  $AC$ , ( $z$ ) cala l'arco  $OQ$  ( $q$ ); ma  $dq = \frac{r du}{z}$ , quin-

di

di  $\frac{rd\dot{u}}{z} = \frac{rdz}{\sqrt{bb-zz}}$ , cioè  $\frac{zdz}{\sqrt{bb-zz}} = du$ , che è la stessa

equazione della ritrovata al num. 88.

91. Nè meno sono necessarie le particolari formole, che si sono ritrovate nel caso delle curve con le coordinate in angolo obliquo tra loro, perchè tali equazioni possono sempre mutarsi in altre, che abbiano le coordinate in angolo retto, ed indi poi si potrà servirsi delle solite formole.

Ed in fatti si chiami (Fig. 7.)  $HG = p$ ,  $AG = q$ ; è adunque  $p = \frac{ny}{m}$ ,  $q = x + \frac{ey}{m}$ , denominando, come sopra,

$AB = x$ ,  $BD = y$ , e la ragione del seno tutto al seno retto quella di  $m$  ad  $n$ , al seno del complemento quella di  $m$  ad  $e$ ; adunque sarà  $y = \frac{mp}{n}$ ,  $x = q -$

$\frac{ey}{m} = q - \frac{ep}{n}$ . Sostituiti per tanto nella proposta equazione

in luogo di  $x$ , ed  $y$  questi valori dati per  $p$ , e  $q$ , avrassi l'equazione della curva con le coordinate in angolo retto fra loro. Ma succederà bene spesso, che l'equazione primitiva sia semplice, e trasformandola si faccia assai composta; anzi, che essendo separate le incognite nella proposta, non lo sieno nella trasformata, il che è di maggiore difficoltà, nè possano separarsi con le solite regole di divisioni, estrazioni di radici ec.

Tuttavia però in molti casi particolari non sarà forse mal fatto il mettere a prova, e l'una, e l'altra maniera per appigliarti a quella, che nel dato caso sarà più comoda.

Ma sarà opportuno venire agli Esempj, ne' quali, quando non si avvifi in contrario, intenderassi sempre, che le coordinate siano fra loro in angolo retto.

*Delle Quadrature de' Spazj .*

E S E M P I O I.

92. Sia  $ABC$  (Fig. 10.) una parabola apolloniana dell'equazione  $ax = yy$ , una qualunque affissa  $AD = x$ ,  $DB = y$ , e debbasi quadrare lo spazio  $ADB$ . Sarà dunque  $y = \sqrt{ax}$ , e posto questo valore nella formola generale de' spazj ( $ydx$ ) in luogo di  $y$ , sarà essa  $dx\sqrt{ax}$ , ed integrando  $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$ . La quantità  $b$  è la solita costante, che nelle integrazioni devesi aggiungere, e che ora fa d'uopo di determinare. Nel punto  $A$ , cioè quando  $x = 0$ , lo spazio è zero, adunque l'integrale  $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$ , che esprime questo spazio, deve pure essere zero, fatta  $x = 0$ , e però sarà  $\frac{2}{3}0\sqrt{a0} + b = 0$ , cioè  $b = 0$ ; vale a dire, che in questo caso non devesi all'integrale aggiungere costante alcuna.

Adun-

Adunque sarà lo spazio  $ABD = \frac{2}{3} x\sqrt{ax}$ , ma  $\sqrt{ax} = y$ , onde  $ABD = \frac{2}{3} xy$ , cioè eguale a due terzi del rettangolo dell'assisa nell'ordinata.

Quindi se si volesse lo spazio chiuso da una fissa, e determinata assisa, ed ordinata, per esempio quando sia  $x = 2a$ ; comechè, per l'equazione della curva, è in questo caso  $y = \sqrt{2aa}$ , sarà lo spazio  $= \frac{4}{3} aa\sqrt{2}$ . Se le assise della parabola non principiafferò dal vertice  $A$ , ma da un dato punto  $D$ ; posta, per esempio  $AD = a$ , una qualunque  $DE = x$ , il parametro  $= f$ , sarà l'equazione  $af + fx = yy$ , ed  $y = \sqrt{af + fx}$ . Sostituito questo valore nella formola  $ydx$ , sarà essa  $dx\sqrt{af + fx}$ , ed integrando  $\frac{2}{3} \times \overline{a + x\sqrt{af + fx}} + b$  eguale allo spazio  $DCEB$ . Ma per determinare la costante  $b$  si rifletta, che nel punto  $D$ , cioè quando  $x = 0$ , lo spazio è eguale a zero, adunque nell'integrale fatta  $x = 0$ , dovrà essere  $\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$ , e però la costante  $b = -\frac{2a}{3}\sqrt{af}$ ; adunque per avere l'integrale compito, in luogo di aggiungere la  $b$ , bisognerà sottrarre  $\frac{2}{3} a\sqrt{af}$ , e però lo spazio ricercato  $DCEB$  sarà  $= \frac{2}{3} \times \overline{a + x\sqrt{af + fx}} - \frac{2}{3} a\sqrt{af}$ .

Sia  $AE = a$ , ed in  $E$  principj la  $x$  verso  $A$ , e sia

una qualunque  $ED = x$ , farà l'equazione  $af - fx = yy$ ,  
 ed  $y = \sqrt{af - fx}$ , onde  $ydx = dx\sqrt{af - fx}$ , ed integran-  
 do, farà  $-\frac{2}{3} \overline{a - x} \times \overline{af - fx}^{\frac{1}{2}} + b$ . Ma quando  $x = 0$ ,  
 lo spazio pure è  $= 0$ , adunque fatta nell'integrale  $x = 0$ ,  
 dovrà essere  $-\frac{2}{3} a \sqrt{af} + b = 0$ , e però  $b = \frac{2}{3} a \sqrt{af}$ ;  
 adunque lo spazio  $EDBC = \frac{2}{3} a \sqrt{af} - \frac{2}{3} \overline{a - x} \sqrt{af - fx}$ .

Si è veduto, che generalmente lo spazio  $AEC$   
 nella parabola è  $= \frac{2}{3} AE \times EC$ , così lo spazio  $ADB =$   
 $\frac{2}{3} AD \times DB$ ; adunque lo spazio  $DECB$  farà  $=$   
 $\frac{2}{3} AE \times EC - \frac{2}{3} AD \times DB$ , il che appunto confron-  
 ta col calcolo dell'uno, e dell'altro caso dell'origine  
 della  $x$  dal punto  $D$  verso  $E$ , e dal punto  $E$  verso  $D$ .

Prendo l'equazione generale a tutte le parabole  
 di qualunque grado  $a^m x^n = y^r$ , onde farà  $y = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$ ,  
 e però la formola  $ydx = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}} dx$ , ed integrando, fa-  
 rà lo spazio  $= \frac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r} + b$ , ma presa  $x = 0$ , si tro-  
 va essere  $b = 0$ , adunque non va aggiunta costante  
 alcuna, e l'integrale ritrovato  $\frac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r}$  è compito, e  
 po-

ponendo  $y$  in luogo di  $a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$ , farà  $\frac{rxy}{n+r} =$  allo spazio ricercato.

## ESEMPIO II.

93. Sia la curva  $y = \sqrt[m]{x+a}$ , farà adunque  
 $ydx = dx \sqrt[m]{x+a}$ , ed integrando, farà lo spazio  
 $\frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \times \overline{x+a}^{\frac{1}{m}} + b$ .

Ma posta  $x=0$ , dovrà essere  $b = -\frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$ ,

adunque l'integrale compito, cioè lo spazio ricercato  
 farà  $= \frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \sqrt[m]{x+a} - \frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$ .

## ESEMPIO III.

94. Sia l'iperbola fra gl'asintoti  $FED$ , (Fig. 11.)  
 e sia  $AB = x$ ,  $BE = y$ , e l'equazione  $xy = aa$ ; farà  
 $y = \frac{aa}{x}$ , e però  $ydx = \frac{aadx}{x}$ , ed integrando, farà lo  
 spazio  $= a \int x+b$ , preso il logaritmo nella logaritmi-

ca

ca della sottangente =  $a$ . Ma posta  $x = 0$ , il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, per la natura della logaritmica, adunque la quantità  $b$  da aggiungersi all'integrale deve essere quantità infinita, e positiva, e però infinito lo spazio compreso della curva  $EF$  prodotta in infinito, dall'asintoto, e dalle due coordinate  $AB$ ,  $BE$ .

Sia l'iperboloide dell'equazione  $a^3 = xyy$ , farà  $y = \sqrt{\frac{a^3}{x}}$ , e però  $ydx = dx \sqrt{\frac{a^3}{x}}$ , ed integrando, farà lo spazio =  $2\sqrt{a^3x} + b$ , ma posta  $x = 0$ , è  $b = 0$ , adunque non fa d'uopo aggiungere costante alcuna, e l'integrale compito, cioè lo spazio  $ABEF$  infinitamente prodotto all'insù, farà  $2\sqrt{a^3x}$ , quantità finita, o sia, per l'equazione della curva, =  $2xy$ .

Sia l'iperboloide dell'equazione  $a^3 = xxy$ ; farà  $y = \frac{a^3}{xx}$ , ed  $ydx = \frac{a^3 dx}{xx}$ , ed integrando farà lo spazio =  $-\frac{a^3}{x} + b$ , ma posta  $x = 0$ , farà  $\frac{a^3}{0}$  quantità infinita,

adunque  $b$  è eguale all'infinito, onde per avere l'integrale compito bisognerà aggiungere quantità infinita, e però farà infinito lo spazio.

Sia generalmente l'equazione a tutte le iperboloi-

di

di  $a^{m+n} = x^n y^m$ , farà  $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$ , e però  $\int y dx =$   
 $\frac{ma^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}}{m-n} + b$ . Se  $m = 1$ ,  $n = 1$ , cioè  $xy = aa$ ,

avremo  $\int y dx = \frac{aa}{0} + b$ , quantità infinita, onde lo spazio infinito, come si è veduto di sopra.

Se  $n = 1$ ,  $m = 2$ , cioè  $a^2 = xyy$ , farà  $\int y dx =$   
 $2\sqrt{a^2 x} + b$ ; ma posta  $x = 0$ , farà pure  $b = 0$ , adunque l'integrale compito, cioè lo spazio cercato  $= 2\sqrt{a^2 x} =$   
 $2xy$ , per l'equazione della curva, e però finito, quantunque infinitamente prodotto all'insù dalla parte di  $F$ .

Se  $n = 2$ ,  $m = 1$ , cioè  $a^2 = xxy$ , farà  $\int y dx =$   
 $-\frac{a^2}{x} + b$ , ma posta  $x = 0$ , farà  $-\frac{a^2}{0}$  infinito, e però  $b =$  all'infinito, adunque si deve aggiungere all'integrale quantità infinita, e però lo spazio farà infinito.

Se  $n = 1$ ,  $m = 3$ ; cioè  $a^4 = xxy^3$ , farà  $\int y dx =$   
 $\frac{3}{2} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b$ ; ma posta  $x = 0$ , farà  $b = 0$ , adunque l'integrale compito, cioè lo spazio, farà  $= \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 xx} =$   
 $-\frac{3}{2} xy$ , quantità finita, quantunque infinitamente prodotta all'insù.

Se



Se  $n = 3$ ,  $m = 1$ ; cioè  $a^+ = x^3 y$ , farà  $\int y dx =$   
 $-\frac{a^+}{2xx} + b$ ; ma posta  $x = 0$ , è  $b = \infty$ , adunque  
 lo spazio infinito.

Se  $n = 1$ ,  $m = 4$ ; cioè  $a^+ = xy^4$ , farà  $\int y dx =$   
 $\frac{4}{3} \sqrt[4]{a^+ x^3} + b$ ; ma posta  $x = 0$ , farà  $b = 0$ , adunque  
 l'integrale compito, cioè lo spazio, farà  $= \frac{4}{3} \sqrt[4]{a^+ x^3} =$   
 $\frac{4}{3} xy$ , quantità finita.

Se  $n = 4$ ,  $m = 1$ ; cioè  $a^+ = x^4 y$ , farà  $\int y dx =$   
 $-\frac{a^+}{3x^3} + b$ ; ma posta  $x = 0$ , farà  $b$  eguale all'infini-  
 to, adunque infinito lo spazio. Con la stessa maniera  
 si potrà procedere quanto si vuole.

Prendansi ora le affisse dal punto  $B$ , e si cerchi  
 lo spazio  $BCDE$ . Sia dunque  $AB = b$ ,  $BC = x$ ,  
 $CD = y$ , e sia la stessa iperbola apolloniana, la di cui  
 equazione  $by + xy = aa$ ; adunque farà  $y = \frac{aa}{b+x}$ , e però  
 $y dx = \frac{a dx}{b+x}$ , ed integrando  $\int y dx = a \ln(b+x) + f$ , pre-  
 so il logaritmo nella logaritmica della sottangente  $= a$ .

Ma

Ma per determinare la costante  $f$ , posta  $x = 0$ , dovrà essere  $f = -a \int b$ , adunque l'integrale compito, cioè lo spazio  $BCDE$  farà  $a \int \overline{b+x} - a \int b$ .

Se si prenda  $BC = x$  infinita, farà infinito  $\int \overline{b+x}$ ; adunque lo spazio  $EBCD$  infinitamente prodotto dalla parte di  $C$  è infinito.

Si prenda  $x$  negativa  $= BA = -b$ , farà  $a \int \overline{b+x}$  eguale ad  $a$  moltiplicato nel logaritmo del zero; ma il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, adunque in questo caso lo spazio è negativo, cioè dalla parte di  $M$ , ed è infinito, come si è veduto anche di sopra, e però lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti è infinito dall' una, e dall' altra parte infinitamente prodotto.

Sia l'iperboloide cubico dell'equazione  $byy + xyy = a^3$ , farà  $y = \sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$ , onde  $ydx = dx \sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$ , ed integrando  $\int ydx = 2\sqrt{a^3b + a^3x} + f$ , ma posta  $x = 0$ , farà  $f = -2\sqrt{a^3b}$ , adunque l'integrale compito, o sia lo spazio  $EBCD$ , farà  $= 2\sqrt{a^3b + a^3x} - 2\sqrt{a^3b}$ , quantità algebrica. Presa  $x$  infinita, farà infinito lo spazio  $EBCD$  infinitamente prodotto dalla parte di  $C$ .

Preso  $x$  negativa  $= BA = -b$ , l'integrale farà  $-2\sqrt{a^3b}$ , adunque lo spazio farà negativo, cioè sarà

q rà

rà *FEBA**M*, e sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di *M*, come si è pure veduto di sopra.

Sia l'iperboloide dell'equazione  $\overline{b+x^2} \times y = a^3$ , sarà  $y = \frac{a^3}{\overline{b+x^2}}$ , onde  $ydx = \frac{a^3 dx}{\overline{b+x^2}}$ . Ed integrando  $\int ydx = -\frac{a^3}{b+x} + f$ , ma posta  $x = 0$ , farà  $f = \frac{a^3}{b}$ ; adunque l'integrale compito, cioè lo spazio *EBCD* farà =  $\frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{b+x}$ . Presa  $x$  infinita, il termine  $-\frac{a^3}{b+x}$  farà zero, adunque lo spazio sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di *C*. Sia  $x$  negativa = *BA* =  $-b$ , l'integrale farà  $\frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{0}$ , ma  $-\frac{a^3}{0}$  è quantità infinita, e negativa, adunque lo spazio sarà dalla parte di *M* infinito ec.

Con questo metodo operando troverassi, che lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti infinitamente prodotto sarà infinito dall'una, e dall'altra parte; tra l'iperboloide primo cubico, e gli asintoti sarà finito dalla parte di *M*, ed infinito dalla parte di *C*; tra l'iperboloide secondo cubico, e gli asintoti sarà infinito dalla parte di *M*, e finito dalla parte di *C*; tra l'iperboloide primo del quarto grado, e gli asintoti sarà finito dalla parte di *M*, ed infinito dalla parte di *C*; tra l'iper-

l'iperboloide secondo, e gli asintoti sarà finito dalla parte di  $C$ , ed infinito dalla parte di  $M$  ec.

Per porre in opera le serie, Prendo l'espressione dello spazio  $BCDE$  della suddetta iperbola apolloniana, cioè  $\frac{aadx}{b+x}$ .

Ridotta questa in serie, sarà essa  $= \frac{aadx}{b} - \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxxdx}{b^3} - \frac{aax^3dx}{b^4}$  ec., ed integrando  $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} - \frac{aax^4}{4b^4}$  ec., la qual serie infinitamente prodot-

ta equivale appunto allo spazio  $BCDE$ , e se fosse sommabile, ci darebbe in termini finiti, cioè algebricamente lo spazio cercato, vale a dire la quadratura dell'iperbola, ma non essendo sommabile, quanti più termini di essa si prenderanno, principiando dal primo, tanto più ci avvicineremo al giusto valore dello spazio.

Prendo l'assissa  $BT$  dalla parte de' negativi, sarà l'equazione della curva  $by - xy = aa$ , e però  $ydx = \frac{aadx}{b-x}$ , e riducendo in serie, sarà

$ydx = \frac{aadx}{b} + \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxxdx}{b^3} + \frac{aax^3dx}{b^4} + \frac{aax^4dx}{b^5}$  ec., ed

integrando,  $\int ydx = \frac{aax}{b} + \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} + \frac{aax^4}{4b^4} + \frac{aax^5}{5b^5}$  ec.

q 2

eguale

eguale allo spazio  $BTPE$ . Presa  $BT = BA$ , lo spazio  $FEBAM$  infinitamente prodotto dalla parte di  $M$  sarà  $= aa + \frac{aa}{2} + \frac{aa}{3} + \frac{aa}{4} + \frac{aa}{5}$  ec., serie di valore infinito; adunque lo spazio infinito,

## E S E M P I O I V.

95. Fra gl'asintoti  $AS$ ,  $AB$  (Fig. 12.) sia l'iperbola equilatera  $OC$ , e sia  $AB = BC = a$ ,  $BI = -x$ . S'intenda descritta la curva meccanica  $BEF$  tale, che il rettangolo di  $AB$  in qualunque ordinata  $IE$  sia eguale al corrispondente spazio iperbolico  $BCOI$ . Si ricerca lo spazio indeterminato  $SABEF$ . Sia l'ordinata  $IE = z$ . Si è veduto, essere lo spazio  $BCOI$  eguale alla serie  $ax + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4aa} + \frac{x^5}{5a^3}$  ec., posta come

suppongo,  $a = b$ , adunque per la proprietà della curva, farà  $z = x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{3aa} + \frac{x^4}{4a^3}$  ec., e però  $zdx =$

$x dx + \frac{xx dx}{2a} + \frac{x^3 dx}{3aa} + \frac{x^4 dx}{4a^3}$  ec.; ed integrando, farà finalmente lo spazio  $BIE = \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6a} + \frac{x^4}{12aa} + \frac{x^5}{20a^3} + \frac{x^6}{30a^4}$  ec.,

e presa  $x = a = BA$  rispetto a tutto lo spazio  $SABEF$  infi-

nitamente prodotto, farà esso  $= \frac{aa}{2} + \frac{aa}{6} + \frac{aa}{12} + \frac{aa}{20} + \frac{aa}{30}$  ec.,

la qual serie è sommabile, ed è  $= aa$ , adunque è algebricamente quadrabile, ed eguale al quadrato di  $BA$  lo spazio infinitamente prodotto  $SABEF$ .

ESEMPIO V.

96. Sia l'iperbola  $ATC$ , (Fig. 13.) l'asse trasverso  $DA=2a$ , il parametro  $= p$ ,  $EB=x$ ,  $BC=y$ , e però l'equazione  $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$ , e si cerchi lo spazio  $ABC$ ;

farà dunque  $y = \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$ , e però la formola

$ydx = dx \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$ . Fatto sparire il segno radicale,

e passando all'integrazione, troverassi con le solite maniere l'integrale in parte algebrico, ed in parte logaritmico, adunque lo spazio  $ABC$  dell'iperbola dipende dalla descrizione della logaritmica ..

Se si voglia lo spazio  $ACHE$ , lo spazietto infinitesimo  $ITCH$ , fatta  $MT$  infinitamente prossima a  $BC$ , ne farà l'elemento, e però la formola sarà  $x dy$ , in cui sostituendo in luogo di  $x$  il valore dato per  $y$  dall'equazione, farà  $x dy = dy \sqrt{\frac{2ayy + aap}{p}}$ , il di cui inte-

grale

grale isteffamente dipende dalla logaritmica .

E se tanto nella formola  $ydx$  del primo spazio , quanto nella  $x dy$  del secondo si avesse fofstituto in luogo di  $dx$  in quella , ed in luogo di  $dy$  in quella i rifpettivi valori dati dall'equazione , fi farebbero parimente ritrovati gl'integrali della fteffa natura .

Per far ufo delle ferie . Prendo la formola dello spazio  $ACHEA$  , cioè  $x dy$  ; adunque  $x dy =$

$$dy \sqrt{\frac{2ayy + aap}{p}}$$

( giacchè le coftanti non alterano il metodo ) cioè fuppofta l'iperbola equilatera , farà  $x dy = dy \sqrt{yy + aa}$  , e riducendo in ferie il radicale , farà

$$x dy = a dy + \frac{y dy}{2a} - \frac{y^3 dy}{8a^3} + \frac{y^5 dy}{16a^5} - \frac{5y^7 dy}{128a^7} \text{ ec. , ed inte-}$$

grando  $\int x dy$  , cioè lo spazio  $ACHRA = ay + \frac{y^3}{6a} -$

$$\frac{y^5}{40a^3} + \frac{y^7}{7 \times 16a^5} - \frac{5y^9}{9 \times 128a^7} \text{ ec. , ferie che non fi fa-}$$

ffommare . E foftraendo quefta ferie dal rettangolo  $xy$  , avraffi lo spazio  $ABC$  .

Si conducano dal centro  $E$  le infinitamente proffime  $ET$  ,  $EC$  , e fia  $AKP$  tangente nel vertice . Col centro  $E$  fi defcrivano gli archetti di circolo  $KQ$  ,  $TR$  ;

farà

farà  $AK = \frac{ay}{x}$ , e  $KP = \frac{axdy - aydx}{xx}$ ,  $ET = \sqrt{xx + yy}$ ,

$EK = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$ , e per la similitudine de' triangoli

$PKQ$ ,  $KEA$ , o sia  $TEM$ , farà  $KQ = \frac{axdy - aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$ ,

e per la similitudine de' settori  $EKQ$ ,  $ETR$ , farà  $TR = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{xx + yy}}$ , e però farà  $\frac{1}{2} ET \times TR$ , cioè  $\frac{xdy - ydx}{2}$

l'elemento del settore  $ETA$ , e sostituendo in luogo di  $y$ , e  $dy$  il valore dato dall'equazione della curva  $y = \sqrt{xx - aa}$ , (supposta equilatera l'iperbola) farà  $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$ , ed in-

tegrando  $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$ , cioè il settore  $ETA =$

$-\frac{1}{2} a \log |x - \sqrt{xx - aa}|$  nella logaritmica della sottan-  
gente  $= a$ , il quale spazio è espresso da quantità nega-  
tiva appunto, perchè si assume nel senso de' negativi.

Riducendo la formola in serie, troveremo  $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}} =$

$$\frac{aadx}{2x} + \frac{a^2 dx}{4x^3} + \frac{3a^4 dx}{16x^5} + \frac{5a^6 dx}{32x^7} + \frac{35a^{10} dx}{256x^9} \text{ ec.}$$

Ma per integrare il primo termine della serie fa-  
rebbe



rebbe d'uopo ridurre prima quello ancora ad una serie infinita; adunque farà meglio fare più speditamente nel seguente modo. Sia  $EM = x$ ,  $MT = y$ ,  $AK = z$ , farà  $KP = dz$ , e sia  $KE = p$ ,  $AE = a$ , semiasse trasverso, il semiasse conjugato  $= b$ . Sarà adunque  $KQ = \frac{adz}{p}$ ,

$$ET = \frac{px}{a}, \quad TR = \frac{xdz}{p}, \quad \text{e però } \frac{1}{2} ET \times TR = \frac{xxdz}{2a}$$

ma, per l'equazione della curva, è  $y = \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$ ,

e per i triangoli simili  $EAK$ ,  $EMT$ , farà  $y = \frac{xz}{a}$ ,

adunque  $zx = b \sqrt{xx - aa}$ , ed  $xx = \frac{aabb}{bb - zz}$ ; e però

la formola farà  $\frac{abbdz}{2 \times bb - zz}$ , cioè ridotta in serie

$$\frac{adz}{2} + \frac{azzdz}{2bb} + \frac{az^3dz}{2b^3} + \frac{az^5dz}{2b^5} + \frac{az^7dz}{2b^7} \text{ ec., ed integrando,}$$

$$\int \frac{abbdz}{2 \times bb - zz}, \quad \text{cioè lo spazio } ETA = \frac{az}{2} + \frac{az^3}{6bb} +$$

$$\frac{az^5}{10b^4} + \frac{az^7}{14b^6} + \frac{az^9}{18b^8} \text{ ec.}$$

ESEM-

ESEMPIO VI.

97. Sia il circolo  $ABD$  (*Fig. 14.*) col diametro  $AD = a$ , e si cerchi l'area d'un qualunque mezzo segmento  $AHE$ . Fatta  $AE = x$ ,  $EH = y$ , farà l'equazione  $y = \sqrt{ax - xx}$ , e però  $y dx = dx \sqrt{ax - xx}$ . Qui non occorre liberare la formola dalla radicale, o tentare altri modi, a fine di mutarla in un'altra capace d'essere integrata algebricamente, o per mezzo de' logaritmi, perchè farà fatica superflua, mentre ci ridurremo sempre ad una formola di quadratura, o rettificazione di circolo, come si è notato al num. 37., e però senz'altro potressi procedere con le serie.

Risolta adunque in serie la formola, farà

$$dx \sqrt{ax - xx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{16a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.,}$$

ed integrando  $\int y dx$ , cioè lo spazio  $AEH =$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{28a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{72a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

Sia ora il raggio  $CA = a$ , e sia  $CE = x$ ,  $EH = y$ ,

r

c

e l'equazione  $y = \sqrt{aa - xx}$ ; adunque  $ydx = dx \sqrt{aa - xx}$ ,  
 e riducendo in serie,  $ydx = adx - \frac{xxdx}{2a} - \frac{x^4 dx}{8a^3} - \frac{x^6 dx}{16a^5}$

$\frac{5x^4 dx}{128a^7}$  ec., ed integrando,  $\int ydx$ , cioè lo spazio

$$CEHB = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} \text{ ec.},$$

e fatta  $x = a$  rispetto a tutto il quadrante,  $aa -$   
 $\frac{aa}{6} - \frac{aa}{40} - \frac{aa}{112} - \frac{5aa}{1152}$  ec., ed il quadruplo di questa

serie farà l'area di tutto il circolo.

Per mezzo d'un settore. Sia  $CA = a$ ,  $AQ = x$ ,  
 e condotta  $CK$  infinitamente prossima alla  $CQ$ , farà  
 $QK = dx$ ,  $CQ = \sqrt{aa + xx}$ , e descritto col centro  $C$   
 l'archetto infinitesimo  $QS$ , per la similitudine de' trian-  
 goli  $KSQ$ ,  $QAC$ , farà  $QS = \frac{adx}{\sqrt{aa + xx}}$ , e però  $MN =$

$\frac{aadx}{aa + xx}$ ; adunque il picciolo settore  $CMN$ , elemento

del settore  $CAM$ , farà =  $\frac{a^3 dx}{2 \times aa + xx}$  .. Ridotto esso

per tanto in serie, farà  $\frac{a^3 dx}{2 \times aa + xx} = \frac{a^3 dx}{2aa} -$

$\frac{a^3 xxdx}{2a^4} + \frac{a^3 x^4 dx}{2a^6} - \frac{a^3 x^6 dx}{2a^8} + \frac{a^3 x^8 dx}{2a^{10}}$  ec., ed inte-

grando,

grando, farà  $\int \frac{a^3 dx}{2 \times \sqrt{aa + xx}}$ , cioè il settore  $CMA =$

$$\frac{ax}{2} - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10a^3} - \frac{x^7}{14a^5} + \frac{x^9}{18a^7} \text{ ec.}, \text{ e posto, che l'arco}$$

$AM$  sia la metà del quadrante, cioè presa  $x = a$ , la serie farà  $\frac{aa}{2} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{10} - \frac{aa}{14}$  ec.; ed il doppio, cioè

$$aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} - \frac{aa}{7} \text{ ec. farà il quadrante } ABC.$$

Se in vece di prendere il raggio  $CA = a$ , l'avessi preso  $= \sqrt{\frac{aa}{8}}$ , farebbe il quadrante  $ABC =$

$$\frac{aa}{8} - \frac{aa}{3 \times 8} + \frac{aa}{5 \times 8} - \frac{aa}{7 \times 8} \text{ ec.}, \text{ e sottraendo attual-}$$

mente ciascun termine negativo dall'antecedente positivo, farà  $\frac{aa}{3} + \frac{aa}{35} + \frac{aa}{99} + \frac{aa}{155}$  ec., che è la stessa serie

inferita dal Sig. Leibnizio negl'atti di Lipsia dell'anno 1682.

### ESEMPIO VII.

98. Sia l'ellissi  $BCD$ , (Fig. 15.) il semiasse trasverso  $AB = a$ , il semiasse conjugato  $AC = b$ ,  $AE = x$ ,  $EH = y$ , onde l'equazione  $\frac{bb}{aa} \times \sqrt{aa - xx} = yy$ , e pe-

rdò  $ydx = \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}$ , elemento dell'area  $A E H C$ .

Ma  $dx \sqrt{aa - xx}$  è formola di quadratura del circolo  $BOD$ , il di cui diametro sia l'asse trasverso dell'ellissi, adunque dalla quadratura del circolo dipenderà la quadratura dell'ellissi. E perchè  $\int \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx} = E H C A$ , e  $\int dx \sqrt{aa - xx} = E M O A$ ; farà un qualunque spazio dell'ellissi al corrispondente spazio del circolo sul diametro  $DB$ , come  $b$  ad  $a$ , cioè come il semiasse conjugato al semiasse trasverso, ed in conseguenza lo spazio intero dell'ellissi a tutto lo spazio del circolo nella stessa ragione. Ma poichè i circoli sono tra loro, come i quadrati de' diametri, o sia de' raggi, se faremo un circolo, il di cui raggio sia  $= \sqrt{ab}$ , cioè medio proporzionale tra i due semiasse dell'ellissi  $BCD$ , farà questo circolo al circolo  $BOD$ , come  $ab$ ,  $aa :: b$ ,  $a$ , ma in questa medesima ragione è l'area dell'ellissi  $BCD$  allo stesso circolo  $BOD$ ; adunque l'area dell'ellissi farà eguale all'area del circolo, il di cui raggio sia medio proporzionale fra i semiasse dell'ellissi.

Per mezzo della serie. Ridotta in serie la formola

$$\frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}, \text{ farà essa } = \frac{bdx}{a} \times a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^3}{8a^3} - \frac{x^5}{16a^5} - \frac{5x^7}{128a^7} \text{ ec.,}$$

ed

ed integrando  $\int \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}$ , cioè l'area  $ACHE =$

$$bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8} \text{ ec. , e fatta } x = a ,$$

farà l'area  $ACB$ , quarta parte dell'ellissi, eguale ad  $ab - \frac{ab}{6} - \frac{ab}{40} - \frac{ab}{112} - \frac{5ab}{1152}$  ec.

Nella stessa ellissi, preso un qualunque arco  $DS$ ; sia  $DP$  tangente in  $D$ ,  $AI = x$ ,  $IS = y$ , e per lo punto  $S$  condotta  $AP$ , le sia infinitamente prossima  $AK$ , che taglierà l'ellissi in  $T$ . Col centro  $A$  si descrivano gl'archetti di circolo  $KQ$ ,  $TR$ ; farà dunque  $AS = \sqrt{xx + yy} = AT$ ,  $DP = \frac{ay}{x}$ ,  $AK = AP = a\sqrt{xx + yy}$ ,

$KP = - \frac{axdy + aydx}{xx}$ , essendo  $PK$  differenza negativa;

e per la similitudine de' triangoli  $PQK$ ,  $PAD$ , farà  $KQ = - \frac{axdy + aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$ , e per la similitudine de' settori

$ATR$ ,  $AKQ$ ; farà  $TS = - \frac{xdy + ydx}{\sqrt{xx + yy}}$ , e però

$TR \times \frac{AT}{2}$ , cioè  $- \frac{xdy + ydx}{2}$  farà la formola per lo

spazio  $ACT$ , la quale, sostituito in luogo di  $y$ , e di  $dy$  il valore dato dall'equazione della curva, farà finalmente  $\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}}$ .

$$2\sqrt{aa - xx}$$

Ma

Ma  $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$  è la rettificazione del circolo,

come si è veduto al num. 37., e come si vedrà in breve, adunque la quadratura de' settori ellittici dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo. Nè occorre affaticarsi per liberare la formola dal radicale, perchè, ciò non ostante, utteremo in un'altra dallo stesso circolo dipendente.

Per mezzo poi delle serie troveremo, essere

$$\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}} = \frac{b dx}{2} + \frac{bxx dx}{4aa} + \frac{3bx^3 dx}{16a^4} + \frac{5bx^5 dx}{32a^6} +$$

$\frac{35bx^7 dx}{256a^8}$  ec., ed integrando, avremo lo spazio  $ATC =$

$$\frac{bx^2}{2} + \frac{bx^4}{12aa} + \frac{3bx^6}{80a^4} + \frac{5bx^8}{224a^6} + \frac{35bx^{10}}{2304a^8}$$
 ec., e fatta  $x = a$

rispetto a tutto lo spazio  $ADC$ , quarta parte dello spazio intero dell'ellissi, farà esso =  $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{12} + \frac{3ab}{80} +$

$$\frac{5ab}{224} + \frac{35ab}{2304}$$
 ec.

Che se avessi voluto liberare la formola dal segno radicale, facendo la sostituzione  $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xx}{a}$ , si farebbe mutata in quest'altra  $\frac{aabdz}{aa + zz}$ , la quale ridotta in

serie

serie si trova essere  $bdz - \frac{bzdz}{aa} + \frac{bz^3 dz}{a^4} - \frac{bz^5 dz}{a^6} + \frac{bz^7 dz}{a^8}$  ec.,

ed integrando,  $bz - \frac{bz^3}{3aa} + \frac{bz^5}{5a^4} - \frac{bz^7}{7a^6} + \frac{bz^9}{9a^8}$  ec., e posta

$x = a$ , nel qual caso è pure  $z = a$ , farà  $ab - \frac{ab}{3} + \frac{ab}{5} -$

$\frac{ab}{7} + \frac{ab}{9}$  ec. rispetto al quadrante dell'ellissi.

E se si supponga  $a = b$ , l'ellissi passa ad essere un circolo del raggio  $= a$ , e la serie farà  $aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} -$

$\frac{aa}{7} + \frac{aa}{9}$  ec. come al num. 97., che esprimerà il qua-

drante; e però da qui ancora si vede, che l'area dell'ellissi è all'area del circolo, il di cui diametro sia eguale all'asse trasverso dell'ellissi, come l'asse conjugato all'asse trasverso della stessa ellissi.

ESEMPIO VIII.

99. Sia la cicloide  $NAM$ , (Fig. 16.) il circolo generatore  $ARH$ , e sia  $AH = a$ ,  $AB = x$ ,  $BC = dx$ ,  $BE = y$ ,  $DF = dy$ , farà l'equazione  $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$

$\frac{dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$ . Ma lo spazietto  $Q E F P$  è l'elemento dello

spazio



spazio  $AEQ$ , adunque  $FP \times PQ$ , cioè  $\frac{x dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$

$dx \sqrt{ax-xx}$  ne farà la formola; ma  $\int dx \sqrt{ax-xx}$  è il segmento circolare  $ASB$ , adunque lo spazio cicloidale  $AEQ$  farà eguale al corrispondente spazio circolare  $ASB$ , e tutto lo spazio  $AMK$  al semicircolo. Ma il rettangolo  $AHMK$  è quadruplo del semicircolo, poichè è il prodotto della semiperiferia nel diametro; adunque lo spazio  $AMH$  farà triplo del semicircolo, e però tutto lo spazio della cicloide triplo del circolo generatore.

• Se si volesse immediatamente lo spazio  $AFC$ ; come che il piccolo spazio  $FCBE$ , cioè  $y dx$  ne è l'elemento, e dall'equazione della curva abbiamo  $dy = \frac{dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$ , si riduca in serie l'omogeneo di compa-

razione; moltiplicando prima per  $\sqrt{x}$  il numeratore, e denominatore, onde sia  $\frac{dx \sqrt{ax-xx}}{x} = \frac{a^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{16a^{\frac{5}{2}}}$  ec., e però integran-

do,

do,  $\int \frac{dx \sqrt{ax - xx}}{x}$ , cioè  $y = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{56a^{\frac{5}{2}}}$  ec., onde  $ydx = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{3a^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{56a^{\frac{5}{2}}}$  ec., e finalmente integrando,

$\int ydx = ABE = \frac{4x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{70a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{252a^{\frac{5}{2}}}$  ec.

ESEMPIO IX.

100. Sia la concoide  $ADR$ ,  $CB = BA = a$ ,  $CM = x$ ,  $MD = y$ , (Fig. 17.) e si voglia lo spazio  $ADGB$ . Chiamo  $CG = z$ , la quale sarà sempre data per le  $x$ , ed  $y$  della proposta curva, come è assai chiaro. Sia  $CE$  infinitamente prossima a  $CD$ , e col centro  $C$ , cogli intervalli  $CG$ ,  $CD$  si descrivano i due archetti  $GI$ ,  $DF$ , farà  $HI = dz$ , ed il trapezio  $FDGI$  l'elemento del ricercato spazio. Per la similitudine de'

f trian-

triangoli  $HIG$ ,  $BGC$ , farà  $GI = \frac{adz}{\sqrt{zz - aa}}$ , e per la

similitudine de' settori  $CGI$ ,  $CDF$ , farà  $DF = \frac{azdz + aadz}{z\sqrt{zz - aa}}$ . Ma il trapezio  $FDGI$  è  $= DF + GI \times \frac{1}{2}GD =$

$$\frac{2aazdz + a^3dz}{2z\sqrt{zz - aa}}, \text{ dunque } \int \frac{2aazdz + a^3dz}{2z\sqrt{zz - aa}}, \text{ cioè } -$$

$a \sqrt{zz - aa} - z + a \times$  arco di circolo col raggio  $= a$ ,  
tangente  $= \sqrt{zz - aa} - z$ , (preso il logaritmo nella  
logaritmica della sottangente  $= a$ ) farà eguale allo spa-  
zio, che si cercava.

Si può niente meno avere lo spazio totale, ed i  
parziali della stessa concoide considerando la curva in  
relazione al suo asse. Sia nella stessa Figura  $AB =$   
 $DG = a = BC$ ,  $BM = x$ ,  $MD = y$ , e dal punto  $G$  si  
tiri all'ordinata  $MD$  la perpendicolare  $GO$ , farà  $DO =$   
 $\sqrt{aa - xx}$ , per l'angolo retto  $GOD$ , e per la simili-  
tudine de' triangoli  $CBG$ ,  $GOD$  farà  $BG = \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} =$

$$MO; \text{ dunque } MD = \sqrt{aa - xx} + \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} = y,$$

quindi  $ydx$ , cioè l'elemento dello spazio, farà  
 $dx\sqrt{aa - xx} + \frac{adx\sqrt{aa - xx}}{x}$ . Il primo termine inte-

grato

grato dipende dalla quadratura del circolo, il secondo da quella dell'iperbola.

ESEMPIO X.

101. Sia  $AMI$  (Fig. 18.) la Cissoide di Diocle, la di cui equazione  $yy = \frac{x^3}{a-x}$ . Sarà dunque la formola,

fossituito il valore di  $y$  dato dall'equazione,  $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{a-x^2}$ ,

il di cui integrale dipende dalla quadratura del circolo. Per avere il rapporto dello spazio totale della cissoide a quello del circolo generatore, si rifletta, che essendo l'equazione  $yy = \frac{x^3}{a-x}$ , farà anco  $yy \times \frac{ax-xx}{ax-xx} = x^4$ ,

e però  $y \sqrt{ax-xx} = xx$ . Ciò posto, differenziando la proposta equazione  $ayy - xyy = x^3$ , viene  $2aydy - 2xydy - yydx = 3xxdx$ , cioè  $2dy \times \frac{y}{a-x} - ydx = \frac{3xxdx}{y}$ ,

perchè  $xx = y \sqrt{ax-xx}$ , dunque  $2dy \times \frac{y}{a-x} - ydx = 3dx \sqrt{ax-xx}$ . Ma  $dy \times \frac{y}{a-x}$  è l'elemento dello spazio  $AMQB$ ,  $ydx$  è l'elemento dello spazio

f 2

$AMP$ ,

$AMP$ , ed integrando rispetto allo spazio totale, è  
 $\int dy \times \overline{a-x} = \int y dx$ , dunque in tale circostanza farà  
 $2 \int dy \times \overline{a-x} - \int y dx = \int dy \times \overline{a-x}$ , e però  
 $\int dy \times \overline{a-x} = 3 \int dx \sqrt{ax-xx}$ , e perchè nel caso  
 dello spazio totale della Cissoide  $\int dx \sqrt{ax-xx}$  è l'area  
 del semicircolo  $ABN$ ; quindi lo spazio della Cif-  
 foide infinitamente prodotto è triplo del semicircolo ge-  
 neratore.

## E S E M P I O X I.

102. Sia la Logaritmica  $HBD$  (Fig. 19.) all' asin-  
 toto  $MQ$ , e sia  $AB =$  alla sottangente  $= a$ ,  $KH = y$ ,  
 $AK = x$ , e l'equazione  $\frac{ady}{y} = dx$ . Sarà adunque la

formola  $y dx = a dy$ , ed integrando  $\int y dx = ay + bb$ ;  
 ma posta  $y = a$ , farà  $bb = -aa$ , adunque l'integrale  
 compito, cioè lo spazio  $AKHB = ay - aa$ . Presa una  
 qualunque altra ordinata  $MN = z$ , farà pure  $AMNB =$   
 $az - aa$ ; adunque  $MKHN = ay - az$ . Sia l'ordinata  
 $EF$  minore di  $AB$ , ed eguale ad  $y$ ,  $AE = -x$ , farà

nello

nello stesso modo l'equazione  $\frac{ady}{y} = dx$ , perchè essen-

do negativa la  $x$ , deve essere pure negativa la sua differenza, ma crescendo l'assissa  $x$ , cala l'ordinata  $y$ , adunque dovrà essere negativa la  $dy$ ; per lo che sarà pure negativo l'elemento dello spazio, sarà adunque esso elemento  $-ydx$ , cioè  $-ady$ , ed integrando,  $-ay + bb$ , ma quando  $y$  sia  $= a$ , sarà  $bb = aa$ , adunque l'integrale compito, cioè lo spazio  $AEFB$  sarà  $= aa - ay$ ; e posta  $y = 0$ , cioè quando egli sia infinitamente prodotto dalla patte di  $Q$ , sarà egli  $= aa$ ; ed in conseguenza lo stesso spazio infinitamente prodotto dalla parte di  $Q$ , ma che principj da una qualunque ordinata  $EF = y$ , sarà  $= ay$ .

E S E M P I O XII.

103. La curva  $ABF$  sia la Trattoria, (Fig. 20.) la di cui proprietà primaria è, che la tangente  $BP$  di un qualunque punto  $B$ , sia sempre costante eguale ad una data retta. Si faccia una qualunque assissa  $ED = x$ , l'ordinata  $DB = y$ , l'arco della curva  $AB = u$ , e la data retta  $= a$ . Perchè crescendo l'assissa  $ED$ , cala l'ordinata  $DB$ , sarà negativo il di lei elemento, cioè  $-dy$ ; quindi per la proprietà della curva avremo l'equazione

quazione

quazione  $-\frac{ydu}{dy} = a$ , e posto in luogo di  $du$  il valore

$\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , farà  $dx = -\frac{dy \sqrt{aa - yy}}{y}$ . Ciò fatto, nella

formola  $ydx$  degli spazj posto in luogo di  $dx$  il valore dato dall'equazione della curva, avremo  $-dy \sqrt{aa - yy}$ , elemento di un qualunque spazio  $ABDE$ . Ma posta  $AE$  la prima delle ordinate  $= a$ , e col raggio  $EA$  descritto il quadrante  $AQM$ , e condotta  $BQ$  parallela ad  $MH$ , poichè  $DB = EC = y$ , e per la proprietà del circolo,  $CQ = \sqrt{aa - yy}$ , anco l'elemento dello spazio circolare  $CQA$  farà  $-dy \sqrt{aa - yy}$ ; quindi lo spazio  $CQA$  eguale allo spazio  $ABDE$ , e così degl'altri, e per conseguenza lo spazio infinitamente prodotto compreso dalla trattoria  $ABF$ , dall'asintoto  $EH$ , e dalla retta  $AE$  farà eguale al quadrante  $AME$ .

## E S E M P I O X I I I.

104. Sia la spirale  $ACB$ , (*Fig. 21.*) ed  $AB = a$  il raggio del circolo  $BMD$ , la di cui periferia  $= b$ , un qualunque arco  $BD = x$ ,  $AC = y$ ; farà l'equazione  $by = ax$ . Condotta  $AE$  infinitamente prossima ad  $AD$ , sia  $ED = dx$ , e col centro  $A$  si descriva l'archetto infinitesimo  $CH$ ; per la similitudine de' settori  $ACH$ ,  
 $ADE$

*ADE*, farà  $CH = \frac{ydx}{a}$ , e però il settore *ACH*, elemento dello spazio *ANCA*, farà  $= \frac{yydx}{2a}$ ; ma, per l'equazione della curva, è  $y = \frac{ax}{b}$ , dunque esso elemento farà  $= \frac{axxdx}{2bb}$ , ed integrando,  $\frac{ax^3}{6bb}$  (ommesa la costante, che è superflua) farà lo spazio *ACN*, e fatta  $x = b$  rispetto a tutto lo spazio *ANB*, farà esso  $= \frac{ab}{6}$ .

Sia l'equazione generale alle infinite spirali  $a^m x^n =$

$b^n y^m$ , adunque farà  $yy = \frac{aax^{\frac{2n}{m}}}{b^{\frac{2n}{m}}}$ , e la formola dello

spazio farà  $\frac{ax^{\frac{2n}{m}} dx}{2b^{\frac{2n}{m}}}$ , ed integrando,  $\frac{max^{\frac{2n+m}{m}}}{4n+2m \times b^{\frac{2n}{m}}}$ , e fatta  $x = b$ , farà lo spazio intero  $= \frac{mab}{4n+2m}$ .

E' facile a vedere, che lo spazio *ABMDCNA* terminato dal raggio *AB*, dall'arco di circolo *BMD*, e dalla porzione *ANC* della spirale farà  $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb}$ , perchè egli è eguale al settore *ABMDA* meno lo spazio *ACN*; ma se lo volemmo per mezzo di formola diffe-



differenziale, basta osservare, che l'elemento di esso farà il trapezio infinitesimo  $ECHD$ , il quale si fa essere  $= \overline{DE + CH} \times \frac{CD}{2}$ , cioè  $\frac{dx + ydx}{a} \times \frac{a - y}{2} = \frac{aadx - yydx}{2a}$ , e ponendo in luogo di  $yy$  il valore  $\frac{axx}{bb}$  dato dall'equazione, farà  $\frac{adx}{2} - \frac{axxdx}{2bb}$ , ed integrando (ommesa la costante superflua)  $\frac{ax}{2} - \frac{ax^2}{6bb}$ .

## E S E M P I O X I V.

105. Sia la parabola  $ABM$  (Fig. 22.) dell'equazione  $ax = yy$ , e sia  $AC = x$ ,  $CB = y$ , e la ragione del seno tutto al seno retto dell'angolo  $BCD$  sia quella di  $a$  alla  $b$ ; al seno del complemento, quella di  $a$  alla  $f$ , farà  $BD = \frac{by}{a}$ ,  $CD = \frac{fy}{a}$ . Sia  $CH = dx$ , adunque  $CH \times DB = CHMB$ , elemento dello spazio  $ACB$ , e però la formola farà  $\frac{bydx}{a}$ , e posto in luogo di  $y$  il valore dato dall'equazione, cioè  $\sqrt{ax}$ , farà  $\frac{bdx\sqrt{ax}}{a}$ , ed integrando,  $\frac{2bx\sqrt{ax}}{3a}$ , o sia  $\frac{2bxy}{3a} = \frac{2}{3} AC \times BD$ , ommesa la costante superflua.

ESEM-

ESEMPIO XV.

106. Sia la parabola  $ACM$  (Fig. 23.) riferita al fuoco  $B$ , la di cui equazione sarà  $\frac{atz}{\sqrt{2az - aa}} = du$ , essen-

do  $BC = z$ ,  $CD = du$ , archetto infinitesimo di circolo, parametro  $= 2a$ . Sarà dunque il settore infinitesimo  $BMC$ , o sia  $BDC$  l'elemento dello spazio  $ABC$ , e però  $\frac{zdu}{2}$ , cioè  $\frac{azdz}{2\sqrt{2az - aa}}$  la formola, il di cui inte-

grale si trova essere  $\frac{z + a\sqrt{2az - aa}}{6} + mm$ . Ma presa

$z = BA = \frac{1}{2}a$ , nel qual caso deve essere nullo lo spazio, farà  $mm = 0$ , adunque l'integrale compiuto, cioè lo spazio  $ABC$ , farà  $= \frac{z + a\sqrt{2az - aa}}{6}$ .

Ed in fatti dal punto  $C$  abbassata la perpendicolare  $CQ$  ad  $AQ$ , lo spazio  $BCA$  è eguale allo spazio  $QCA$  meno il triangolo  $BQC$ , ma fatta  $BQ = x$ ,  $QC = y$ , farà  $QCA - QCB = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}a + x \times y - \frac{xy}{2} = \frac{2a + x}{6} \times y$ ;

adunque  $BCA = \frac{2a + x}{6} \times y$ , ma per la proprietà della

t

pa-

parabola,  $BC = AQ + AB = x + a$ , cioè  $z = x + a$ ,  
 ed  $y = \sqrt{aa + 2ax} = \sqrt{2az - aa}$ ; sostituiti adunque in  
 luogo di  $x$ , ed  $y$  questi valori, troveremo  $BCA =$   
 $\frac{2a + x}{6} \times y = \frac{a + z}{6} \sqrt{2az - aa}$ , come sopra.

## ESEMPIO XVI.

107. Se la quarta parte  $AC$  (Fig. 24.) della periferia  
 di circolo s'intenderà distesa nella retta ( $ac$ ), e preta una  
 qualunque porzione ( $ae$ ) eguale all'arco  $AE$ , si alzi  
 normale ( $ed$ ) eguale al seno retto  $DE$ , la curva ( $at$ ),  
 che passerà per tutti i punti ( $d$ ) così determinati, si  
 chiama la linea de' seni retti. Prodotta ( $ac$ ) onde sia  
 eguale alla semicirconferenza del circolo, la curva ave-  
 rà un'altro ramo al di là di ( $ct$ ) simile, ed eguale  
 al primo.

Sia il raggio  $= r$ , un qualunque arco  $AE = x = (ae)$ ,  
 il corrispondente seno  $DE = y = (ed)$ ; poichè il differen-  
 ziale, o sia la flussione dell'arco espressa per mezzo del  
 seno si trova essere  $\frac{rdy}{\sqrt{rr - yy}}$ , avremo  $dx = \frac{rdy}{\sqrt{rr - yy}}$ ,  
 equazione della nostra curva. La formola adunque  $ydx$ ,  
 sostituito il valore di  $dx$ , sarà  $\frac{rydy}{\sqrt{rr - yy}}$ , ed integran-

do,

do,  $-r \sqrt{rr-yy} + n$ ; ma posta  $y = 0$ , viene  $n = rr$ , dunque l'integrale compito è  $rr - r \sqrt{rr-yy}$  = allo spazio (*ade*), e fatta  $y = r$ , farà  $rr =$  allo spazio totale, (*atc*). Quindi fatto il quadrato *TH* del raggio, e prodotto il seno *DE* in *M*, lo spazio (*ade*) farà eguale al rettangolo *DH*, e lo spazio totale (*atc*) eguale al quadrato *TH*.

108. Gli addotti esempj possono bastare per fare uso del metodo, rimane solamente d'avvertirsi, che molte volte le equazioni delle curve, gli spazj delle quali si vogliono quadrare (e ciò s'intenda pure rispetto alle rettificazioni, quadrature di superficie, e cubature) possono essere tali, che non abbiano le incognite separate, nè si possano separare colla sola divisione, ed in conseguenza non siano adattabili alle formole. Tale sarebbe la curva  $x^3 + y^3 = axy$ .

In questi casi bisogna valersi di qualche congrua sostituzione, per mezzo di cui l'equazione si trasformi in un'altra, in cui sieno separate, o separabili le incognite. Ma non si può generalmente definire, quale sostituzione debba farsi; bisognerà avere pratica, e provarne molte per ottenere, quando si possa, l'intento.

Rispetto alla proposta  $x^3 + y^3 = axy$ . Si ponga  $y = \frac{axx}{z}$ , e fatta la sostituzione, farà l'equazio-

ne  $x^3 + \frac{a^3 x^6}{z^6} = \frac{aax^3}{zz}$ , cioè  $x^3 = \frac{aaz^4 - z^6}{a^3}$ . Differen-

ziando adunque,  $xxx dx = \frac{4aaz^3 dz - 6z^5 dz}{3a^3}$ ; quindi

presa la formola degli spazj, cioè  $y dx$ , poichè per la sostituzione è  $y = \frac{axx}{zz}$ , farà essa formola  $\frac{axx dx}{zz}$ , e

sostituendo in luogo di  $xxx dx$  il valore ritrovato  $\frac{4aaz^3 dz - 6z^5 dz}{3a^3}$ , farà  $y dx = \frac{4aaz dz - 6z^3 dz}{3a^2}$ , ed inte-

grando  $\int y dx = \frac{2}{3} zz - \frac{z^4}{2ca}$ ; e restituendo in luogo di  $zz$

il valore  $\frac{axx}{y}$ , farà finalmente  $\int y dx = \frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$ .

## E S E M P I O XVII.

109. Sia la curva  $a^3 xxxy - x^3 = a^6 y^3$ , di cui si voglia lo spazio. Pongo  $y = \frac{xx}{z}$ , e l'equazione si tras-

formerà in quest'altra  $a^3 z - x^3 z^3 = a^6$ , da cui si rica-

va  $x = \frac{a \sqrt[3]{aaz - a^3}}{z}$ , e però  $dx = \frac{a^3 dz}{3z \times \frac{aaz - a^3}{z^2}}$

$adz$

$\frac{adz \times \frac{aaz - a^3}{3}}{zz}$ , ed  $y = \frac{aa \times \frac{aaz - a^3}{3}}{z^3}$ ; quindi avremo l'elemento dello spazio, cioè  $ydx = \frac{a^5 dz}{3z^4} -$

$\frac{a^3 dz \times \frac{aaz - a^3}{3}}{z^5} = \frac{a^6 dz}{z^5} - \frac{2a^5 dz}{3z^4}$ , e però integrando

$\int ydx = \frac{-a^6}{4z^4} + \frac{2a^5}{9z^3}$ , e restituendo in luogo di  $z$  il suo

valore  $\frac{xx}{y}$ , farà  $\frac{-a^6 y^4}{4x^8} + \frac{2a^5 y^3}{9x^6}$  lo spazio ricercato.

A questo proposito si potrà vedere il metodo del Signor Craigio nel suo libro: *De Calculo fluentium*.

*Della rettificazione delle Curve.*

ESEMPIO XVIII.

110. Sia da rettificarsi la parabola apolloniana, cioè da ritrovarsi una retta linea eguale ad un'arco qualunque della stessa parabola, la di cui equazione sia  $ax = yy$ . Differenziando farà  $adx = 2ydy$ , e  $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$ . Ma la formola per la rettificazione è  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ;

adun.

adunque sostituendo in questa, in luogo di  $dx^2$ , il valore dato dall' equazione differenziata, farà  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}}{a} = \frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$ , elemento per la parabola apolloniana  $ax = yy$ . Passando alle integrazioni, fatta la sostituzione di  $\sqrt{4yy + aa} = 2y + z$ , a fine di levare il radicale, troveremo essere  $\frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa} = -\frac{a^2 dz}{8z^3} - \frac{adz}{4z} - \frac{zdz}{8a}$ , il di cui integrale si vede esse-

re in parte algebrico, ed in parte logaritmico, e però la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell'iperbola, la qual verità in quest'altro modo pure si scorge. Sia l'iperbola equilatera  $ADE$  (Fig. 25.) coi semiasse  $= a$ ,  $BC = x$  dal centro,  $CD = 2y$ , la di cui equazione farà  $xx - aa = 4yy$ . Condotta  $GE$  infinitamente prossima ad  $HD$ , farà  $HGED$  l'elemento dello spazio  $ADHB$ , ma  $HGED$  si fa essere  $2dy \sqrt{4yy + aa}$ , che è la stessa formola della rettificazione della parabola, a riserva del denominatore costante  $\frac{a}{2}$ , dunque ec.

Per mezzo della serie. Prendo la sopra scritta formola per la rettificazione della parabola, cioè  $\frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$ ,

la quale ridotta in serie farà  $= dy + \frac{2vy dy}{aa} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} - \frac{10y^8 dy}{a^8}$  ec., ed integrando,  $\int \frac{dv}{a} \sqrt{4yy + aa}$ , cioè l'arco qualunque  $= y + \frac{2y^3}{3aa} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4v^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$  ec.

Se nella formola generale  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  in vece di sostituire in luogo di  $dx$  il valore dato per  $y$  dall'equazione della curva, sostituiremo in luogo di  $dy$  il valore dato per  $x$ , farà essa  $\frac{dx \sqrt{4ax + aa}}{\sqrt{4ax}}$ , o sia  $\frac{dx \sqrt{4xx + ax}}{2x}$ ,

la quale non è punto più trattabile dell'altra.

Se la parabola non fosse l'apolloniana, ma la seconda cubica, la di cui equazione è  $axx = y^3$ , differenziando farebbe  $dx^2 = \frac{9y dy^2}{4a}$ , e però la formola

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{\frac{9y + 4a}{4a}}$ , il di cui integrale farà  $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} + m$ ; ma posta  $y = 0$ , farà  $m = -\frac{8a}{27}$ ; adunque l'integrale compito, cioè la lunghezza dell'arco farà  $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} - \frac{8a}{27}$ .

Se nella parabola apolloniana  $ADM$  (Fig. 26.) farà



farà  $AC = \frac{4z}{9}$ , e si prenda una qualunque  $CK = y$ ;

il parametro  $= \frac{9z}{4}$ , farà  $AK = \frac{4z}{9} + y$ ,  $KM = \sqrt{\frac{4z^2 + 9zy}{4}}$ ,

onde l'elemento dell'area  $MKCD$  farà  $dy \sqrt{\frac{4z^2 + 9zy}{4}}$ ,

che è lo stesso dell'elemento della lunghezza della seconda parabola cubica, a riserva della costante  $a$ , e però la rettificazione di questa, e la quadratura di quella è la stessa cosa, onde perchè quella è algebricamente quadrabile, questa è algebricamente rettificabile. Quindi generalmente, se l'espressione dell'elemento di una qualunque data curva diviso per la differenza dell'incognita si porrà per ordinata, e la incognita per l'assissa, onde nasca una nuova curva, la quadratura di questa ci darà la rettificazione della curva data.

### ESEMPIO XIX.

III. Sia il circolo  $AEM$ , (*Fig. 27.*)  $AM$  diametro  $= a$ ,  $AB = x$ , farà  $BF = y = \sqrt{ax - xx}$ ; adunque  $dy = \frac{1}{2} \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$ ,  $dy^2 = \frac{1}{4} \frac{aadx^2 - axdx^2 + xxdx^2}{ax - xx}$ ,

e

e però  $FH$  elemento della curva  $= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{2}$ , e riducendo in serie, farà

$$2\sqrt{ax - xx}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2 \times 2a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{5}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6a^{\frac{5}{2}}} +$$

$$\frac{105x^{\frac{7}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8a^{\frac{7}{2}}} \text{ ec., ed integrando, farà } a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^{\frac{5}{2}}} +$$

$$\frac{105x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^{\frac{7}{2}}} \text{ ec.; o pure effendo } dx^2 = \frac{dy^2 \times ax - xx}{\frac{1}{4}aa - ax + xx},$$

cioè ( sostituendo  $yy$  in luogo di  $ax - xx$  )  $dx^2 = \frac{yydy^2}{\frac{1}{4}aa - yy}$ ; posto questo valore in luogo di  $dx^2$  nella

formola generale, farà essa  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ady}{2\sqrt{\frac{aa-yy}{4}}}$ ,

$$\frac{1}{4}aa - yy$$

che ridotta in serie si trova essere

$$= dy + \frac{zyydy}{aa} + \frac{6y^4 dy}{a^4} + \frac{20y^6 dy}{a^6} + \frac{70y^8 dy}{a^8} \text{ ec., ed inte-}$$

u

grando,

grando, farà finalmente l'arco  $AF =$

$$y + \frac{2y^3}{3aa} + \frac{6y^5}{5a^4} + \frac{20y^7}{7a^6} + \frac{70y^9}{9a^8} \text{ ec.}$$

Che se il raggio fosse stato  $= a$ , sarebbe la serie

$$y + \frac{y^3}{2 \times 3aa} + \frac{3y^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15y^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105y^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

E se finalmente farà  $DB = x$ ,  $DA$  raggio  $= a$ , farà  $y = \sqrt{aa - xx}$ , e  $dy = \frac{-x dx}{\sqrt{aa - xx}}$ , adunque

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}, \text{ e riducendo in serie, farà}$$

$$\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = dx + \frac{xx dx}{2aa} + \frac{3x^4 dx}{2 \times 4a^4} + \frac{15x^6 dx}{2 \times 4 \times 6a^6} +$$

$$\frac{105x^8 dx}{2 \times 4 \times 6 \times 8a^8} \text{ ec., ed integrando, farà l'arco } EF =$$

$$x + \frac{x^3}{2 \times 3aa} + \frac{3x^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105x^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

ESEM-

ESEMPIO XX.

112. Sia l'ellissi  $ADC$ , ( Fig. 28. ) semiasse trasverso  $AB = a$ , semiasse conjugato  $BD = b$ ,  $BE = x$ ,  $EO = y$ , farà l'equazione  $\frac{axy}{bb} = aa - xx$ , e però

$$ydy = -\frac{bbx dx}{aa}, \text{ e } dy^2 = \frac{bbx dx^2}{aa \times aa - xx}$$

generale  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{bbx dx^2}{a^2 - aaxx}} =$

$$\frac{dx \sqrt{a^2 - aaxx + bbxx}}{a \sqrt{a^2 - xx}}$$

Se in luogo di sostituire il valore di  $dy$  dato per  $x$  dall'equazione, sostituiremo il valore di  $dx$ , farà  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \frac{\sqrt{aayy - bbyy + b^4}}{b \sqrt{bb - yy}}$ . Ma e l'una, e

l'altra delle due ritrovate espressioni manca di una delle condizioni del num. 38., senza di cui si è veduto, che queste formole non si possono liberare dai segni radicali, e preparare per l'integrazioni. Adunque per passare alle serie,

prendo una delle due formole, per esempio

$dx \sqrt{a^2 - aaxx + bbxx}$ ; la quale si esprime con l'equi-

$$a \sqrt{aa - xx}$$

valente  $dx \sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^2 - aaxx}}$ , e questa ridotta in serie

$$\text{farà} = dx + \frac{\frac{1}{2} bbxx dx}{aa \times aa - xx} - \frac{\frac{1}{8} b^2 x^2 dx}{a^4 \times aa - xx^2}$$

$$\frac{\frac{1}{16} b^3 x^3 dx}{a^6 \times aa - xx^3} + \frac{\frac{5}{128} b^4 x^4 dx}{a^8 \times aa - xx^4} \text{ ec., e riducendo in}$$

oltre in serie ciascun termine di questa, cominciando dal secondo, farà

$$\begin{aligned} dx \sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^2 - aaxx}} &= dx \left[ \frac{1 + \frac{xx}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^3}{a^6} \text{ ec.}}{aa} \right. \\ &- \frac{\frac{1}{8} b^2 x^2 dx}{a^4} \times \frac{1 + \frac{2xx}{a^2} + \frac{3x^2}{a^4} + \frac{4x^3}{a^6} \text{ ec.}}{a^4} \\ &+ \frac{\frac{1}{16} b^3 x^3 dx}{a^6} \times \frac{1 + \frac{3xx}{a^2} + \frac{6x^2}{a^4} + \frac{10x^3}{a^6} \text{ ec.}}{a^6} \\ &\left. - \frac{\frac{5}{128} b^4 x^4 dx}{a^8} \times \frac{1 + \frac{4xx}{a^2} + \frac{10x^2}{a^4} + \frac{20x^3}{a^6} \text{ ec.}}{a^8} \right] \end{aligned}$$

ed

ed integrando , farà l'arco  $DO$  , cioè

$$\int dx \sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^4 - a^2xx}} = x + \frac{\frac{1}{2}bb}{aa} \times \frac{x^3 + \frac{x^5}{5a^4} + \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8}}{3aa} \text{ ec.}$$

$$- \frac{\frac{1}{8}b^4}{a^4} \times \frac{x^5 + \frac{2x^7}{7a^6} + \frac{3x^9}{9a^8} + \frac{4x^{11}}{11a^{10}}}{5a^4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{\frac{1}{16}b^6}{a^6} \times \frac{x^7 + \frac{3x^9}{9a^8} + \frac{6x^{11}}{11a^{10}}}{7a^6} \text{ ec.}$$

$$- \frac{\frac{5}{128}b^8}{a^8} \times \frac{x^9 + \frac{4x^{11}}{11a^{10}}}{9a^8} \text{ ec.,}$$

e finalmente riducendo alla stessa denominazione i termini omogenei , troveremo  $DO =$

$$\frac{x + \frac{bbx^3}{6a^4} + \frac{4aabb - b^4}{40a^8} \times x^5 + \frac{8a^4bb - 4aab^2 + b^6}{112a^{12}} \times x^7 + \frac{64a^6bb - 48a^4b^4 + 24aab^6 - 5b^8}{9 \times 128a^{16}} \times x^9 \text{ ec.}$$

che se vo-

gliasi supporre  $a = b$  , nel qual caso l'ellissi diviene un circolo , farà l'arco  $DO = x + \frac{x^3}{6aa} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6}$

$\frac{35x^9}{9 \times 128a^8}$  ec. appunto come sopra al num. III.

In

In altra maniera ancora . Nella formola

$\frac{dx \sqrt{a^+ - aaxx + bbxx}}{a \sqrt{aa - xx}}$  si faccia  $bb - aa = -cc$ , onde

$$a \sqrt{aa - xx}$$

sia  $\frac{dx \sqrt{a^+ - ccxx}}{a \sqrt{aa - xx}}$ ; risolti in serie i due radicali, farà

$$a \sqrt{aa - xx} \cdot$$

$$\frac{dx \sqrt{a^+ - ccxx}}{a \sqrt{aa - xx}} = \frac{dx}{a} \times \frac{aa - ccxx - c^+ x^+ - c^6 x^6 - 5c^+ x^+ \text{ec.}}{2aa \quad 8a^6 \quad 16a^{10} \quad 128a^{14}}$$

$$a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

e facendo attualmente la divisione del numeratore per lo denominatore, dopo un lunghissimo calcolo troveremo un'altra serie, la quale integrata, e restituito in luogo di  $cc$  il suo valore, ci darà la medesima serie di sopra, che esprime il valore dell'arco  $DO$ .

### ESEMPIO XXI.

113. Sia l'iperbola  $BD$ , (Fig. 29.) semiasse trasverso  $AB = a$ , semiasse conjugato  $AE = b$ ,  $CD = y$ ,  $AC = x$ , farà l'equazione  $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ ; adunque

differenziando farà  $dx = \frac{ay dy}{b \sqrt{bb + yy}}$ , onde

de

$$de \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{1 + \frac{aayy}{b^2 + bbyy}} = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{bbyy + aayy + b^2}{bb + yy}}$$

e però ridotta questa in serie o nell'una, o nell'altra maniera ufata intorno all'ellissi, troveremo essere il suo

$$\text{integrale, cioè l'arco } BD = y + \frac{aay^3}{6b^2} - \frac{4aabb - a^2 \times y^5}{40b^2}$$

$$\frac{8aab^4 + 4a^2bb + a^6 \times y^7}{112b^{12}} - \frac{64aab^6 - 48a^2b^4 - 24a^4bb - 5a^6 \times y^9}{9 \times 128b^{16}} \text{ ec.,}$$

che è la stessa serie dell'ellissi, a riserva de' segni, e della mutazione delle veci delle costanti  $a, b$ .

ESEMPIO XXII.

114. Sia la cicloide dell'Esempio VIII. delle quadrature, (Fig. 16.) la di cui equazione sappiamo essere

$$dy = \frac{dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}; \text{ adunque farà la formola } \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$\frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{x}}, \text{ e però integrando, farà l'arco } FA = 2 \sqrt{ax} =$$

al doppio della corda  $AS$  del corrispondente arco di circolo  $AS$ , e posta  $x = a$ , farà  $AM$  doppia del diametro del circolo generatore, e però tutta la cicloide quadrupla.

ESEM-



## ESEMPIO XXIII.

115. Sia la trattoria  $ABF$ , (Fig. 20.) la di cui equazione ( num. 103. ) è  $-\frac{ydu}{dy} = a$ ; dunque  $du = -\frac{ady}{y}$ ,

ed integrando, un qualunque arco  $AB = u = -ly \pm n$  nella logaritmica della sottotangente  $= a$ ; ma fatta  $u = 0$ , è  $y = a$ , e  $ly = 0$ , dunque  $n = 0$ , e l'integrale compito farà  $u = -ly$ . Se pertanto con la sottotangente  $AE$ , per lo punto  $A$ , all'asintoto  $MH$  si descriva la logaritmica  $AKS$ , preso un qualunque punto  $B$  nella trattoria, e condotta alla logaritmica la  $BK$  parallela all'asintoto, ed abbassata la normale  $KN$ , l'intercetta  $NE$  farà eguale all'arco  $AB$ .

## ESEMPIO XXIV.

116. Sia la spirale d'Archimede  $ACB$  del num. 104., (Fig. 21.) il raggio del circolo  $= a$ , la circonferenza  $= b$ , l'arco  $BMD = x$ ,  $AC = y$ . Sia  $AE$  infinitamente prossima ad  $AD$ , e però  $DE = dx$ . Col centro  $A$  sia descritto l'arco  $CH$ , farà  $CH = \frac{ydx}{a}$ ,

ed

ed  $OH = dy$ ; adunque farà  $CO$  l'elemento della curva

$$va = \sqrt{yydx^2 + aady^2}$$

, ma l'equazione della curva è  $ax = by$ , e però  $dx^2 = \frac{bbdy^2}{aa}$ , onde, fatta la sostituzione,

$$\text{farà } CO = \frac{dy}{aa} \sqrt{a^4 + bbby^2}$$

, il di cui integrale, dopo un lungo calcolo, che ommetto per brevità, troveremo dipendere da' logaritmi, o sia dalla quadratura dell'iperbola.

Per mezzo delle serie, Faccio in primo luogo

$$a^4 = bbmm, \text{ onde la formola sia questa } \frac{bdy}{aa} \sqrt{mm + yy}$$

che ridotta in serie è =

$$\frac{bdy}{aa} \times m + \frac{yy}{2m} - \frac{y^3}{8m^3} + \frac{y^5}{16m^5} - \frac{5y^7}{128m^7} \text{ ec., e però inte-}$$

$$\text{grando, cioè l'arco } AC \text{ farà } = \frac{bmy}{aa} + \frac{by^3}{6aam} - \frac{by^5}{40aam^3} +$$

$$\frac{by^7}{112aam^5} - \frac{5by^9}{9 \times 128aam^7} \text{ ec., e fatta } y = a, \text{ farà tutta}$$

$$\text{la curva } ACB = \frac{bm}{a} + \frac{ab}{6m} - \frac{a^3b}{40m^3} + \frac{a^5b}{112m^5} - \frac{5a^7b}{9 \times 128m^7} \text{ ec.,}$$

cioè restituendo in luogo di  $m$  il valore  $\frac{aa}{b}$ ,  $ACB =$

$$a + \frac{bb}{6a} - \frac{b^4}{40a^3} + \frac{b^6}{112a^5} - \frac{5b^8}{9 \times 128a^7} \text{ ec.}$$

z

Sc

Se la curva fosse la logaritmica spirale  $ABC$ , (Fig. 30.) la di cui equazione  $ady = bdx$ , chiamando  $RB = y$ , e l'archetto infinitesimo  $BD = dx$ , posto nella formola generale  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  il valore di  $dx$  dato dall'equazione, farà essa  $dy \sqrt{aa + bb}$ , ed integrando, la curva  $AB = \frac{y}{b} \sqrt{aa + bb}$ .

Sia la curva  $ABC$  la spirale iperbolica, in cui la sottangente deve sempre essere costante, e però l'equazione, denominando come sopra,  $ydx = ady$ , farà dunque  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy}$ ; l'integrale della qual formola, liberata che sia dal segno radicale, troveremo dipendere dalla logaritmica.

Per mezzo della serie troveremo  $\frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy} = \frac{ady}{y} + \frac{ydy}{2a} - \frac{y^3 dy}{8a^3} + \frac{y^5 dy}{16a^5} - \frac{5y^7 dy}{128a^7}$  ec.; ma volendo passare all'integrazioni, il primo termine non è integrabile, se non per mezzo d'un'altra serie infinita; adunque la somma della soprascritta serie integrata, eccetto il primo termine, con l'integrale della serie, che esprime esso primo termine, formerà una serie, che farà il valore della proposta curva.

ESEM-

## ESEMPIO XXV.

117. Sia la logaritmica  $HBD$ , (Fig. 19.)  $AB$  fottangente  $= a$ ,  $AK = x$ ,  $KH = y$ , e l'equazione  $\frac{ady}{y} = dx$ . Posto nella formola generale il valore di  $dx$ , farà  $\frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy}$ , il di cui integrale dipende dalla stessa logaritmica. Ometto l'uso delle serie, che abbastanza s'è veduto ne' superiori Esemplj.

## ESEMPIO XXVI.

118. Sia la parabola apolloniana con le coordinate in angolo obliquo dell'equazione  $ax = yy$ . Differentiata questa, e sostituito nella formola generale delle rettificazioni, quando le coordinate sono in angolo obliquo, cioè nella formola  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$ , in luogo di  $dx$ , e di  $dx^2$  il loro valore dato per  $y$ , si avrà  $\frac{2dy}{a} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$ , il di cui integrale è in parte algebrico, ed in parte dipende dalla quadratura dell'iperbola.

## ESEMPIO XXVII.

119. Sia l'equazione  $\frac{x^t}{t} = y$  alle infinite parabole, ed alle infinite iperbole fra gl'asintoti. Differenziando farà  $x^{t-1} dx = dy$ , ed  $x^{2t-2} dx^2 = dy^2$ , onde  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , elemento della curva,  $= dx \sqrt{x^{2t-2} + 1}$ . Passando all'integrazioni, per valermi del metodo del num. 61. espongo la formola nel seguente modo

$$\frac{dx}{x^{2t-2} + 1} \quad - \frac{1}{2}$$

La formola canonica  $\frac{x^n dx}{x^m + a^m}$  del suddetto numero è

integrabile algebricamente quando sia  $\frac{1-m+n}{m}$  numero intero affermativo; e se sia intero negativo, si ridurrà alle note semplici quadrature. Paragonando questa formola  $\frac{dx}{x^{2t-2} + 1}$  con la canonica, si ha  $n=0$ ,

$$\frac{dx}{x^{2t-2} + 1} \quad - \frac{1}{2}$$

$2t-2=m$ ,  $a =$  all'unità; per lo che converrà, che sia  $\frac{1-2t+2}{2t-2}$  numero intero, che chiamo  $b$ , dunque

$\frac{1-2t+2}{2t-2}$ , cioè  $\frac{3-2t}{2t-2} = b$ , e conseguentemente

te

te  $\frac{3 + 2b}{2 + 2b} = t$ , esponente determinante delle curve in-

finite .

Sia  $b$  numero positivo intero , principiando dal nulla . Se  $b = 0$ , farà  $t = \frac{3}{2}$ ; se  $b = 1$ , farà  $t = \frac{5}{4}$ ; sia  $b$

qualunque numero della serie de' numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ec., faranno espressi gl' innumerabili valori dell' esponente  $t$  dalla seguente progressione  $t = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}$  ec. L'andamento della serie è ma-

nifesto, ed in tutti questi casi le curve paraboliche sono algebricamente rettificabili, e la prima di esse è la seconda parabola cubica .

Sia  $b$  eguale ad un numero intero negativo, ed in primo luogo sia  $b = -0$ , torna in campo la seconda parabola cubica, equivalendo  $-0$  al  $+0$ ; sia  $b = -1$ , l'esponente  $t$  diventa eguale ad  $\frac{1}{0}$ , e di conseguenza infinito; sia  $b = -2$ , farà  $t = \frac{1}{2}$ ; sia  $b = -3$ , farà  $t = \frac{3}{4}$ , e così di mano in mano, e gl' infiniti va-

lori dell' esponente  $t$  faranno espressi dalla progressione  $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$  ec., e le curve paraboliche indi nascenti rettificabili per via delle note quadrature .

La

La prima curva, che ci si affaccia, è la parabola conica, la di cui rettificazione richiede ( num. 110. ) la quadratura dell' iperbola .

L'altro caso, in cui la formola generale del num. 61. , o è integrabile algebricamente, o per mezzo delle note quadrature, è che  $u = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$  sia numero

intero, cioè, sostituendo le spezie particolari di questo esempio,  $-\frac{3t+2}{2t-2} = b$ , e però  $\frac{2+2b}{3+2b} = t$ , esponente

determinatore delle curve infinite .

Sia  $b$  numero intero positivo, principiando dal zero, avremo la seguente progressione

$$t = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11} \text{ ec.}$$

Sia  $b$  intero negativo, ed in primo luogo sia  $b = -1$ , torna in campo lo stesso esponente  $t = \frac{2}{3}$ ,

equivalendo  $-\frac{0}{1}$  al  $+\frac{0}{3}$ ; sia  $b = -2$ , l'esponente  $t$  diventa eguale alla frazione  $\frac{0}{1}$ , e di conseguenza nullo;

sia  $b = -3$ ,  $b = -4$  ec., avremo la seguente progressione  $t = \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$  ec.

La frazione, che dà il valore dell'esponente determinatore  $t$ , è la stessa nell'uno, e nell'altro caso, solo che nel secondo è inversa del primo, dal che dovevano

no

no nascere, come di fatto sono nate inverse le progressioni; le curve adunque scoperte per mezzo dell'una, e dell'altra formola sono le medesime, ma con gl'esponenti inversi, vale a dire riferite a due assi differenti; a cagion d'esempio i due esponenti  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{1}$  appartengono alla parabola apolloniana, che in due maniere ci si presenta  $x^{\frac{1}{2}} = y$ , vale a dire  $x = yy$ ; ed in oltre  $xx = y$ , equazione focale al trilineo parabolico.

Quelle curve pertanto, che sono inchiusse nelle premesse progressioni, o sono integrabili algebricamente, o non esigono quadrature oltre il circolo, e l'iperbola; ma le altre infinite richieggono tetragonismi più alti.

Dalle nostre progressioni appare, che il valore dell'esponente  $z$  non è mai negativo, onde nessuna iperbola non ammette rettificazione nè algebrica, nè dipendente dalle mentovate più semplici quadrature.

*Delle Cubature.*

ESEMPIO XXIII.

120. Sia il cono retto  $ACGKA$ ; (Fig. 31.)  $AB = a$ ,  $BC = b$ , una qualunque porzione  $AD$  dell'asse  $AB$  sia  $= x$ , farà



farà  $y$ , cioè  $DE = \frac{bx}{a}$ , e però nella formola generale

$\frac{cyydx}{2r}$  sostituito questo valore in luogo di  $y$ , farà essa

$\frac{cbbxxdx}{2aar}$ , ed integrando  $\frac{cbbx^3}{6aar}$ , rispetto ad una qualun-

que porzione presa dal vertice (ommesa la costante superflua), é fatta  $x = a$ , farà tutto il cono  $ACGKA = \frac{cbba}{6r} = \frac{cbb}{2r} \times \frac{a}{3}$ , cioè eguale al prodotto della base nella terza parte dell'altezza.

E perchè la solidità de' cilindri è il prodotto della base nell'altezza, farà il cilindro al cono inscritto, come 3 ad 1.

Il cono  $ACGKA$  è adunque  $= \frac{cbba}{6r}$ , ed il cono

$AIEMP = \frac{cbbx^3}{6aar}$ , adunque il frusto di cono  $IMCK$

farà  $\frac{cbb}{6r} \times a - \frac{x^3}{aa}$ , e però farà a tutto il cono nella

ragione di  $a^3 - x^3$  ad  $a^3$ ; onde se per esempio faremo  $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$ , farà il frusto a tutto il cono, come  $a^3 - \frac{a^3}{8}$ ,  $a^3$ ; cioè come 7, 8, ed al cono  $AEMPI$ ,

come 7, 1.

Ogni qual volta però si pensa a misurare qualche solido, fa di mestieri considerare, di quali elementi inten-

ten-

tendiamo, ch'egli sia composto giusta le differenti sezioni, che possono adoprarsi, tornando in acconcio ora l'una, ora l'altra secondo le circostanze; indi fra i suddetti elementi scegliere quelli, che con maggiore facilità possono maneggiarsi, ed a' quali più naturalmente il calcolo s'adatta. Nel cono retto, per esempio, di cui si tratta, vi sono tanti circoli paralleli alla base; ed oltre ciò tanti triangoli, che hanno comune il vertice con quello del cono, e per base le ordinate parallele del circolo  $CGK$ ; si può ancora tagliare il cono con tante parabole fra loro equidistanti, e con gl'assi paralleli al lato  $AK$ , ed altre molte sezioni possono farsi.

Egli è bensì vero, che per ritrovare la solidità del cono sì fatti pezzi devono riputarsi fuor di proposito, e troppo composti per lo proposto caso; ma si potrebbe proporre di tagliare il cono, o altro solido con un piano qualunque, ed indi misurare i due pezzi, in cui egli è diviso, ed in questo caso conviene far uso di quelli elementi, che a tale sezione corrispondono, come si vedrà negl'esempj 37., e 38.

## ESEMPIO XXIX.

121. Sia il femicircolo  $CDK$ , (Fig. 32.) che s'aggiri attorno al raggio immobile  $DB$ , onde produca un'emisfero, e sia  $DB = a$ ,  $DA = x$ , farà  $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$ . Sostituito adunque questo valore nella formola generale, farà essa  $\frac{cdx}{2r} \times \sqrt{2ax - xx}$ , ed integrando, farà la solidità del segmento indefinito  $AEM = \frac{3caxx - cx^3}{6r}$ , e fatta  $x = a$ , farà la solidità dell'emisfero  $= \frac{ca^3}{3r}$ , ed il doppio  $\frac{2ca^3}{3r}$  tutta la sfera.

E perchè il cilindro, la di cui altezza eguale al diametro della base sia  $= 2a$ , è  $= \frac{ca^3}{r}$ , farà il cilindro circoscritto alla sfera inscritta, come  $\frac{ca^3}{r}$  a  $\frac{2ca^3}{3r} :: 3, 2$ , ed in conseguenza nella stessa ragione la metà del cilindro all'emisfero. Ma il cono pure, la di cui altezza eguale al raggio della base sia  $= a$ , raggio della sfera, è  $= \frac{ca^3}{6r}$ , adunque farà l'emisfero al cono inscritto, come 2, 1.

In

In oltre essendo, come è noto,  $= \frac{\sqrt{3aa}}{2}$  il raggio della base del cono equilatero inscritto nella sfera, il di cui raggio sia  $= a$ , ed essendo l'altezza di esso  $= \frac{3a}{2}$ , farà il cono  $= \frac{9ca^3}{48r}$ , e la sfera farà  $= \frac{2ca^3}{3r}$ , e però la sfera al cono come  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{9}{48}$ , cioè, come 32 al 9. In simil modo si possono dimostrare quanti teoremi si vogliono d'Archimede in questo proposito.

E' chiara la maniera di avere un qualunque settore di sfera generato per esempio dal settore  $BEDM$  del circolo; imperciocchè al segmento di sfera generato dalla figura  $AED$ , che si fa essere  $= \frac{3caxx - cx^3}{6r}$ , s'aggiunga il cono generato dal triangolo  $EBA$ , e che si troverà essere  $= \frac{c}{6r} \times \frac{2ax - xx}{2} \times \frac{a-x}{2}$ , e la somma, cioè  $\frac{caxx}{3r}$  farà il settore cercato.

E S E M P I O X X X.

122. Sia (*Fig. 33.*) la parabola di qualunque ordine, la di cui equazione  $y^m = a^m - x$ , la quale ruotandosi attorno all'asse  $AM$  generi il conoide parabolico. Sarà

y 2

dun-

dunque  $y = a^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$ , ed  $yy = a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}}$ , e però la formola generale, sostituito questo valore, farà

$$\frac{ca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}} dx}{2r}, \text{ ed integrando, } \frac{mca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{m+2}{m}}}{2r \times \frac{m+2}$$

la solidità del conoide indefinito; o pure, perchè  $x^{\frac{2}{m}} =$

$$\frac{yy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}, \text{ e però } x^{\frac{2+m}{m}} = \frac{xyy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}, \text{ sostituendo questo}$$

valore nell' integrale ritrovato, farà effo  $\frac{mcxyy}{2r \times \frac{m+2}$ .

Sia  $m = 2$ , cioè la parabola apolloniana, farà il conoide  $= \frac{cxyy}{4r}$ , cioè il prodotto della base nella metà dell'altezza, ed in conseguenza il detto conoide farà la metà del cilindro nella medesima altezza, e nella medesima base.

Se si volesse la solidità della scodella, o sia il solido generato dalla figura  $ACD$  mossa attorno all' asse  $AB$ , dal cilindro descritto dal rettangolo  $ABCD$ , che sapiamo essere  $= \frac{cxyy}{2r}$ , si sottragga il conoide parabolico

$$\frac{mcxyy}{2r \times \frac{m+2}}, \text{ il residuo } \frac{cxyy}{r \times \frac{m+2}}{\text{ farà la scodella. E fat}}$$

ta

ta  $m = 2$  rispetto alla parabola apolloniana, farà la sconda  $\frac{cxyy}{4r}$  metà del cilindro, appunto come deve esse-

re, il conoide essendo pure la metà d'esso cilindro.

Si muova la figura attorno all'ordinata  $MO$ ; e sia  $AM = b$ ,  $MO = f$ ,  $AB = x$ ,  $BC = y$ ,  $CK = b - x$ ,

$KO = f - y$ . Sarà il circolo del raggio  $CK = \frac{c}{2r} \times \overline{b-x}^2$ ,

adunque il prodotto di questo circolo in  $dy$ , differenziale di  $KM$ , cioè  $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - 2bxdy + xxdy}$  farà l'elemen-

to del solido generato dalla figura  $MACK$ , e però integrando, posto in luogo di  $x$  il valore dato per  $y$ ,

farà  $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{2by^{m+1}}{m+1 \times a^{m-1}} + \frac{y^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m-2}}}$  = al solido

indefinito, o pure, ponendo  $x$  in luogo di  $\frac{y^m}{a^{m-1}}$ ,

$\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{2bxy}{m+1} + \frac{xxxy}{2m+1}}$ . E posta  $x = b$ ,  $y = f$  ris-

petto a tutto il solido generato dalla figura  $ACOM$ ,

farà  $\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{2bbf}{m+1} + \frac{bbf}{2m+1}}$ , cioè  $\frac{2mmbbf}{2m+1 \times m+1} \times \frac{c}{2r}$ .

E se si vuole, che la parabola sia apolloniana, cioè che sia  $m = 2$ , farà il solido =  $\frac{4cbbf}{15r}$ .

E'

È facile il vedere, che nella parabola apolloniana il cilindro sulla medesima base, ed altezza del detto solido farà al solido, come 15, 8; e che il solido generato dalla figura  $OAP$  farà  $= \frac{7cbbf}{30r}$ .

Si muova la figura attorno alla retta  $AP$ ; e sia, come sopra,  $AB = x$ ,  $BC = y$ , farà  $\frac{cxy}{2r}$  il circolo del

raggio  $DC$ ; adunque  $\frac{cxydy}{2r}$  l'elemento del solido ge-

nerato dalla figura  $ACD$ , e ponendo in luogo di  $x$  il valore dato per  $y$ , ed integrando, farà

$\frac{c}{2r} \times \frac{y^{2m+1}}{2m+1} \times a^{2m-2}$ , cioè  $\frac{c}{2r} \times \frac{xyy}{2m+1}$  eguale al foli-

do indefinito, e fatta  $x = b$ ,  $y = f$ , farà  $\frac{cbbf}{2r \times 2m+1}$

rifpetto a tutto il solido generato dalla figura  $AOP$ .

Ma il cilindro nella medesima base, ed altezza è  $= \frac{cbbf}{2r}$ , farà adunque il solido generato dalla figura

$$AMO = \frac{c}{2r} \times \frac{2m b b f}{2m+1}.$$

Ma in altra maniera ancora si può avere il solido generato dalla figura  $AOM$  ruotata attorno all'asse  $AB$ . Sia  $AM = b$ ,  $MO = f$ . Il circolo del raggio  $DC$  farà  $= \frac{cxy}{2r}$ , ed il circolo del raggio  $DK$  farà  $\frac{cbb}{2r}$ ,

adun-

adunque farà  $\frac{c}{2r} \times \overline{bb - xx}$  l'anello descritto dalla linea

$CK$ , adunque  $\frac{c}{2r} \times \overline{bb - xx} \times dy$  farà l'elemento del so-

lido generato dalla figura  $CKMA$ , e posto in luogo

di  $x$  il valore dato per  $y$ , farà  $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{y^{2m} dy}{a^{2m-2}}}$ , ed

integrando,  $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{y^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m-2}}}$ , e finalmente

fatta  $y = f$  rispetto a tutto il solido generato dalla figu-

ra  $AMOA$ , farà egli  $\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{f^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m-2}}}$ ; ma

quando  $y = f$ , farà, per la parabola,  $x$  cioè  $b = \frac{f^m}{a^{m-1}}$ ,

e  $bb = \frac{f^{2m}}{a^{2m-2}}$ , adunque posto nell'integrale questo va-

lore dato per  $b$ , farà il solido =

$$\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{bbf}{2m+1}} = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}, \text{ come sopra.}$$

ESEM-



## ESEMPIO XXXI.

123. Sia l'ellissi  $ADC$ , ( Fig. 28. )  $AB = a$ ,  $BD = b$ ,  $AE = x$ ,  $EO = y$ , e però l'equazione  $\frac{bb}{aa} \times \frac{2ax - xx}{2ax - xx} = yy$ . Sostituito adunque nella formola generale il valore di  $y$  dato dall'equazione, farà essa  $\frac{cbb}{2aar} \times \frac{2axdx - xx dx}{2axdx - xx dx}$ , ed integrando, farà  $\frac{cbb}{2aar} \times \frac{axx - \frac{x^3}{3}}{3}$  eguale al solido indefinito generato dalla figura  $AEO$  mossa attorno all'asse  $AC$ . Posta  $x = a$ , farà  $\frac{cbba}{3r}$  metà dello sferoide; e posta  $x = 2a$ , farà  $\frac{2cbba}{3r}$  tutto lo sferoide.

E perchè il cono nella medesima altezza  $AC$ , e nella base, il di cui raggio sia il semiasse conjugato  $BD$ , è  $= \frac{cbba}{3r}$ , ed il cilindro è  $= \frac{cbba}{3}$ , farà lo sferoide due terzi del cilindro, e doppio del cono.

ESEM-

E S E M P I O   X X X I I .

124. Sia l'iperbola  $AD$ , (Fig. 25.) che s'aggiri attorno a  $BC$ , e sia il semiasse trasverso  $BA = \frac{a}{2}$ , il centro  $B$ , ed il parametro  $= b$ ,  $AC = x$ ,  $CD = y$ , e l'equazione  $\frac{ax + xx}{a} \times \frac{b}{a} = yy$ . Sostituito il valore di  $y$  nella formola generale, farà  $\frac{cbdx}{2ar} \times \frac{ax + xx}{a}$ , ed integrando, farà  $\frac{cb}{2ar} \times \frac{axx + \frac{x^3}{3}}$  eguale al conoide iperbolico indefinito generato dalla figura  $ADC$ .

Sia  $BC = x$ , il resto come sopra. Sarà l'equazione  $\frac{b}{a} \times \frac{xx - aa}{4} = yy$ , e però la formola farà

$\frac{cbdx}{2ar} \times \frac{xx - aa}{4}$ , ed integrando,  $\frac{cb}{2ar} \times \frac{x^3 - aax + f}{4}$ .

Aggiungo la costante, che in questo caso non è zero. Per determinarla si avverta, che nel punto  $A$ , quando  $x = \frac{1}{2} a$ , il solido deve essere nullo, onde posto nell'integrale  $\frac{1}{2} a$  in luogo di  $x$ , dovrà essere

$f + \frac{cb}{2ar} \times \frac{a^3 - a^3}{8} = 0$ , adunque  $f = \frac{caab}{24r}$ ; e però l'in-

tegrale compito farà  $\frac{cb}{2ar} \times \frac{x^3}{3} - \frac{aax}{4} + \frac{a^3}{12}$ .

S'aggiri l'iperbola attorno al semiasse conjugato  $HB$ , e sia  $BA$  semiasse trasverso  $= a$ , il semiasse conjugato  $= b$ ,  $BC = x$ ,  $CD = y$ . Il circolo del raggio  $HD$  farà  $= \frac{cxx}{2r}$ , adunque  $\frac{cxydy}{2r}$  farà l'elemento del solido generato dal piano, o sia figura

$BHDA$ , e posto in luogo di  $xx$  il valore dato dall'equazione della curva, avremo  $\frac{cdy}{2r} \times \frac{aayy + aabb}{bb}$ , ed

integrando,  $\frac{c}{2r} \times \frac{aay^3 + aay}{3bb}$ , e fatta  $y=b$ , farà il solido  $= \frac{2caab}{3r}$ .

### ESEMPIO XXXIII.

125. Sia l'iperbola  $KHF$  (Fig. 34.) fra gl'asintoti,  $AD = a$ ,  $DE = b$ ,  $AP = x$ ,  $PH = y$ , e l'equazione  $xy = ab$ . Si muova la curva attorno all'asintoto  $AB$ . Adunque il circolo del raggio  $QH$  farà  $= \frac{cxx}{2r}$ , e per

rà  $\frac{cxydy}{2r}$  farà l'elemento del solido generato dalla figura

$AQHFMA$  infinitamente prodotta della parte di  $M$ , e posto in luogo di  $x$  il valore dato dall'equazione,

ne,

ne, farà  $\frac{caabb \cdot dy}{2ryy}$ , ed integrando,  $f = \frac{caabb}{2ry}$ ; ma per

determinare la  $f$ , si offervi che quando sia  $y = 0$ , il solido deve essere  $= 0$ , adunque  $f = \frac{caabb}{2r \times 0}$ , quantità infi-

nita, e però l'integrale compito farà  $-\frac{caabb}{2ry} + \infty$ ,

adunque il solido di valore infinito.

Se in vece di sostituire nella formola in luogo di  $xx$  il valore dato per  $y$  dall'equazione, sostituiamo il valore di  $dy$ , farà essa  $-\frac{abcdx}{2r}$ , ed integrando,

$-\frac{abcx}{2r} + f$ ; ma il solido non può essere zero se non

quando sia  $x$  infinita, adunque la costante  $f$  da aggiungersi deve essere infinita, e però infinito il solido.

Per avere il solido generato dal piano, o figura  $BAPHK$  infinitamente prodotta verso  $B$ , basta riflettere, che essendo  $\frac{cx}{r}$  la periferia del circolo, il di cui

raggio è  $QH = x$ , farà  $\frac{cxy}{r}$  la superficie del cilindro

generato dal piano  $AQHP$ , ed in conseguenza farà  $\frac{cxydx}{r}$  la solidità del cilindro vuoto generato dal ret-

tangolo infinitesimo  $IPHO$ ; adunque la somma di tutti questi, cioè  $\int \frac{cxydx}{r}$  farà il solido, che si cerca.

Posto adunque in luogo di  $y$  il suo valore  $\frac{ab}{x}$ , farà l'integrale  $\frac{cabx}{r}$  quantità finita, quantunque il solido sia infinitamente alto.

Nell'espressione  $\frac{cabx}{r}$  del solido posto in luogo di  $ab$  il valore  $xy$  dato dall'equazione, farà  $\frac{cxy}{r}$ , ma  $\frac{cxy}{2r}$  è il cilindro generato dal rettangolo  $APHQ$ ; adunque il solido iperbolico farà doppio di esso cilindro, e però il solido generato dalla figura  $BQHK$  infinitamente prodotta farà eguale al cilindro, che gli serve di base. Presa adunque  $x = a$ , ed in conseguenza  $y = b$ , farà il cilindro  $= \frac{caab}{2r} =$  al solido sopra di esso.

## E S E M P I O XXXIV.

126. Sia la logaritmica  $HCD$ , (Fig. 35.) la sottotangente  $CA = a$ ,  $AB = x$ ,  $BD = y$ , e l'equazione  $dx = \frac{ady}{y}$ . S'aggiri attorno all'asintoto  $EB$ . Posto nella formola generale in luogo di  $dx$  il valore dato dall'equazione, farà  $\frac{caydy}{2r}$ , ed integrando,  $\frac{cayy}{4r} + f$ . Ma quando sia  $y = AC = a$ , il solido è zero; adunque deve

deve essere  $f = -\frac{ca^3}{4r}$ , e l'integrale compiuto, cioè il solido generato dal piano indefinito  $ABDC$ , sarà  $= \frac{cayy}{4r} - \frac{ca^3}{4r}$ .

Sia l'assissa  $AE$  negativa, e però  $= -x$ , sarà pure negativa la differenza cioè  $-dx$ , e perchè crescendo l'assissa cala l'ordinata, sarà pure negativa la differenza di  $EH$ , cioè  $-dy$ , e l'equazione della curva sarà nello stesso modo  $dx = \frac{ady}{y}$ . Ma per essere nega-

tiva  $dx$ , sarà negativa la formola generale, vale a dire  $-\frac{cyydx}{2r}$ . Sostituito adunque il valore di  $dx$ , sarà  $-\frac{caydy}{2r}$ , ed integrando  $-\frac{cayy}{4r} + f$ ; ma quando il solido

è zero, sarà  $y = a$ ; adunque  $f = \frac{ca^3}{4r}$ , e l'integrale com-

pito sarà  $\frac{ca^3}{4r} - \frac{cayy}{4r}$  eguale al solido generato dal pia-

no  $ACHE$ . Posto  $y = 0$ , cioè supposto il solido infinitamente prodotto dalla parte di  $M$ , l'integrale sarà  $= \frac{ca^3}{4r}$ , adunque esso solido infinitamente prodotto sarà

eguale a  $\frac{ca^3}{4r}$ , ma il solido generato dal piano  $ACHE$

abbiamo veduto essere  $\frac{ca^3 - cayy}{4r}$ , adunque il solido

infi-

infinitamente prodotto generato dal piano  $LEHM$  farà  $\frac{cayy}{4r}$ .

Poichè il cilindro, il di cui raggio della base sia  $AC = a$ , e l'altezza pure  $= a$ , è  $= \frac{ca^3}{2r}$ , farà il solido

della logaritmica infinitamente prodotto dalla parte di  $M$  nella base del raggio  $AC = a$  al detto cilindro, come  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2} :: 1, 2$ .

## E S E M P I O X X X V.

127. Sia la curva  $AMI$  (Fig. 18.) la Ciffide di Diocle, la quale aggirandosi attorno alla retta  $AB$  descriva un solido. Sia  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $AB = a$ , e l'equazione  $yy = \frac{x^3}{a-x}$ . Sarà adunque la formola generale de' solidi, sostituito il valore di  $yy$ ,  $\frac{cx^3 dx}{2r \times a-x}$ , ed

integrando,  $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} \int a-x + f$ ;

ma fatta  $x = 0$ , il solido deve essere zero, adunque  $f = \frac{caa}{2r} \int a$ , e l'integrale compito  $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} -$

$\frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} \int a-x + \frac{caa}{2r} \int a$  eguale al solido generato

dalla

dalla figura  $APM$ , e fatta  $x = a$ , farà il solido intiero  $= -\frac{11ca^3}{12r} - \frac{caa}{2r} \log 0 + \frac{caa}{2r} \log a$ . Ma il logaritmo del

zero è quantità infinita, e negativa, che moltiplicata in  $-\frac{caa}{2r}$  fa quantità positiva, adunque il solido intiero

farà infinito. Si avverta, che i suddetti logaritmi si prendono nella logaritmica della sottangente  $= a$ .

Per mezzo della serie farà  $\frac{cx^3 dx}{2r \times a - x} = \frac{cx^3 dx}{2ar} + \frac{cx^4 dx}{2raa} +$

$\frac{cx^5 dx}{2ra^3} + \frac{cx^6 dx}{2ra^4}$  ec., ed integrando, il solido generato

dal piano  $APM$  farà  $= \frac{cx^4}{8ar} + \frac{cx^5}{10raa} + \frac{cx^6}{12ra^3} + \frac{cx^7}{14ra^4}$  ec.,

e fatta  $x = a$  rispetto al solido intiero, farà

$\frac{a^3}{2r} \times \frac{c}{4} + \frac{c}{5} + \frac{c}{6} + \frac{c}{7}$  ec., serie di valore infinito.

ESEMPIO XXXVI.

128. S'aggiri la trattoria  $ABF$  (Fig. 20.) attorno l'asintoto  $EH$ . Nella formola generale  $\frac{cyydx}{2r}$  sostituito il valore della  $dx$  dato dall'equazione  $dx =$

$-\frac{dy \sqrt{aa - yy}}{9}$  num. 103., avremo  $-\frac{cydy \sqrt{aa - yy}}{2r}$ ,

ed



ed integrando ,  $\frac{c}{6r} \times \frac{aa - yy^{\frac{3}{2}}}{2} =$  al solido generato dal-

la figura  $AEDB$ , ommessa l'aggiunta della costante superflua . Fatta pertanto  $y = 0$ , farà il solido infinitamente prodotto  $= \frac{ca^3}{6r}$ ; ma la solidità della sfera, il di

cui raggio sia  $AE = a$  ( num. 121. ) è  $= \frac{2ca^3}{3r}$ , dunque

il solido infinitamente prodotto farà la quarta parte di essa sfera .

### ESEMPIO XXXVII.

129. Sia il cilindro  $QBMCP T$ , ( *Fig. 36.* ) da cui con un piano per  $BC$  diametro , e nella direzione  $AP$  si tagli la porzione , o sia l'unghia  $BMCPB$ , si cerca la solidità di questa .

Sia  $BC = QM = 2a$ ,  $MP = QT = b$ ,  $AD = x$ , e farà  $DH$  condotta ordinata nel circolo  $= \sqrt{aa - xx}$ . Si tiri dal punto  $H$  parallelamente ad  $MP$ , o sia  $QT$  la retta  $HO$ , che farà nella superficie del cilindro, indi dal punto  $D$  al punto  $O$  si conduca la retta  $DO$ , che farà nel piano  $BOPC$ , avremo formato nella solidità dell'unghia il triangolo  $DHO$  simile al triangolo

lo  $AMP$ , e però farà  $HO = \frac{b\sqrt{aa-xx}}{a}$ . Ma la som-

ma di tutti questi triangoli  $DHO$  è appunto la ricer-  
cata solidità della metà dell'unghia, adunque farà essa

$$= \int \frac{bdx}{a} \times \frac{aa-xx}{a}, \text{ ed integrando, } \frac{abx}{2} - \frac{bx^3}{6a}, \text{ e}$$

fatte  $x = a$ , farà finalmente la suddetta metà dell'un-  
ghia  $= \frac{1}{3} aab$ , e tutta  $= \frac{2}{3} aab$ .

In altra maniera, e più generalmente sia (Fig. 37.)  
il mezzo cilindro  $DACHEG$ , il quale per lo diametro  
 $CD$  sia tagliato da un piano nella direzione  $DE$ , on-  
de nasca l'unghia  $DBCEAD$ , di cui si vuole la soli-  
dità. Sia  $BA = a$ ,  $AE = b$ ,  $BQ = x$ ,  $QM = y$ , farà  
 $QK = \frac{bx}{a}$ , e però il rettangolo  $PONM = \frac{2bxy}{a}$ , e

questo moltiplicato in  $dx$  farà l'elemento della solidità  
dell'unghia, cioè  $\frac{2byxdx}{a}$ .

Sia la curva  $DAC$  un semicircolo, adunque  
 $y = \sqrt{aa-xx}$ , e la formola farà  $\frac{2bxdx}{a} \sqrt{aa-xx}$ , ed

integrando  $-\frac{2b}{3a} \times \frac{aa-xx}{2} + m$ , ma la costante  $m$ ,

posta  $x = 0$ , si trova essere  $= \frac{2}{3} baa$ , adunque l'inte-

2 a

grale

grale compito del solido farà  $\frac{2baa}{3} - \frac{2b}{3a} \times \frac{aa - xx^2}{3}$ ,  
 e fatta  $x = a$  rispetto a tutta l'unghia, farà essa  $\frac{2b^2a}{3}$ .

Sia la curva  $DAC$  una delle infinite parabole, e l'equazione  $y^m = a - x$ ; farà la formola, sostituito il valore di  $y$ ,  $\frac{2bx dx}{a} \times \frac{a - x}{m}$ , la quale integrata conforme al num. 29., ed aggiunta la debita costante, e fatta  $x = a$ , darà per la solidità di tutta l'unghia  $\frac{2bmma}{2m+1} \times \frac{m+1}{m+1}$ , e posta  $m = 2$ , cioè che la parabola

sia l'apolloniana,  $\frac{8ba^{\frac{3}{2}}}{15}$ . E supposto, che quando

$x = 0$ , sia  $BC = y = c$ , farà  $a^{\frac{1}{2}} = c$ , e però l'unghia  $= \frac{8abc}{15}$ . Nello stesso modo troverassi l'unghia del cilindro ellittico essere  $= \frac{2abc}{3}$ , supposto il semiasse trasverso  $= a$ , il semiasse conjugato  $= c$  ec.

ESEM-

## E S E M P I O   X X X V I I I .

130. Tagliato il conoide parabolico  $BAC$  (Fig. 38.) col piano qualunque  $IEH$  perpendicolare alla base circolare  $BICH$ , si dimanda la misura del pezzo compreso dalla sezione  $IEH$ , e dal piano a lei parallelo per l'asse  $AD$ .

Sia  $= a$  il parametro della parabola generatrice  $BAC$ , l'assisa data  $AD = b$ , farà l'ordinata  $DB = \sqrt{ab}$ . Sieno le coordinate  $DF = x$ ,  $FE = y$ , e però l'equazione alla predetta curva  $BAC$   $ab - xx = ay$ . Per la natura del circolo  $BICH$  farà il rettangolo  $CFB = ab - xx$ , eguale al quadrato  $FH = zz$ ; ma  $ab - xx = ay$ , dunque  $ay = zz$ , e conseguentemente la sezione  $IEH$  farà una parabola con lo stesso parametro della principale. Resta pertanto fissato il rettangolo  $EFH = yz = y\sqrt{ay}$ ; e perchè questo sta all'area  $IEH$ , come 3 a 4, farà essa area  $= \frac{4}{3} y\sqrt{ay}$ , ed il prodotto di essa area  $IEH$  nell'altezza infinitesima  $dx$ , flussione di  $DF = x$ , farà l'elemento del solido in questione, cioè  $\frac{4}{3} y dx \sqrt{ay}$ ; ma  $y = \frac{ab - xx}{a}$ , dunque esso elemento

aa 2

farà

$$\text{farà } \frac{4}{3} dx \times \frac{\sqrt{ab-xx} \sqrt{ab-xx}}{a}, \text{ o sia } \frac{4}{3} bdx \sqrt{ab-xx} - \frac{4}{3a} xxx \sqrt{ab-xx},$$

L'integrale del primo termine dipende dalla quadratura del cerchio  $BHC$ ; il secondo si ridurrà alle quadrature note per via della prima formola del num. 61.

131. Ometto gli esempj de' solidi generati da curve con le coordinate tra loro in angolo obliquo, perchè essendo la formola per questi casi diversa dalla solita, ed ordinaria per le sole costanti, non si potranno incontrare difficoltà di natura diversa dalle già spiegate. Così pure ometto gl'esempj de' solidi generati da curve riferite al fuoco, perchè non volendomi servire della teoria de' centri di gravità, come ô detto di sopra, bisognerà ridurre le date curve ad altre riferite agl'assi, intorno alle quali già abbastanza si è parlato.

*Delle Quadrature, o sia Compianazioni delle superficie de' Corpi.*

### ESEMPIO XXXIX.

132. Sia il cono retto  $ACGK$ , (*Fig. 31.*)  $AB = a$ ,  $BC = b$ , una qualunque porzione dell'asse  $AB$ , come

me  $AD$ , sia  $= x$ , farà  $DE = y = \frac{bx}{a}$ , e  $dy = \frac{bdx}{a}$ ,

$dy^2 = \frac{bbdx^2}{aa}$ . Sostituito adunque questo valore di  $dy^2$

nella formola generale  $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , farà

$\frac{cy}{r} \sqrt{\frac{aadx^2 + bbdx^2}{aa}} = \frac{cylx}{ar} \sqrt{aa + bb}$ , e sostituito il va-

lore di  $y$ , cioè  $\frac{bx}{a}$ , farà  $\frac{cbxdx}{aar} \sqrt{aa + bb}$ , ed integran-

do,  $\frac{cbxx}{2aar} \sqrt{aa + bb}$  rispetto alla superficie del cono

$AEMPI$ ; e fatta  $x = a$ , farà  $\frac{cb}{2r} \sqrt{aa + bb}$  rispetto alla

superficie di tutto il cono, e però eguale al rettangolo della metà della circonferenza della base nel lato  $AC$ .

La stessa determinazione avrebbe si avuta, se in luogo di sostituire nella formola generale il valore di  $dy^2$ , si fosse sostituito il valore di  $dx^2$ .

Sarà per tanto la superficie del frusto conico  $IMKCG = \frac{cb}{2r} \sqrt{aa + bb} - \frac{cbxx}{2aar} \sqrt{aa + bb}$ , cioè

$\frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2ra} \times aa - xx$ ; e però farà alla superficie di tutto

il cono, come  $aa - xx$  ad  $aa$ .

133. Ma se il cono farà scaleno, bisognerà procedere

cedere in altra maniera . Onde sia il cono scaleno  $PAFBM$ , ( *Fig. 39.* ) la base sia il circolo  $AFBM$ , e nel diametro prodotto, se fa bisogno, s'abbassi la  $PD$  normale al piano del circolo, o sia base . Si prendano nella periferia del circolo due punti  $F, f$  infinitamente prossimi, e si tirino i due lati  $FP, fP$  del cono . Egli è chiaro, che il triangolo infinitesimo  $PFf$  farà la differenza, o sia l'elemento della superficie del cono . Adunque al punto  $F$  si conduca la tangente  $TFQ$ , a cui sia normale  $DQ$ , e si congiungano i punti  $P, Q$  con la retta  $PQ$  .

Poichè il piano del triangolo  $PDQ$  passa per la retta  $PD$  normale al piano della base del cono, il piano  $PQD$  farà anch'egli normale allo stesso piano della base, ma la tangente  $TQ$ , che è nel piano pure della base, fa angolo retto con  $QD$  comune sezione de' due piani, dunque farà normale al piano  $PQD$ , ed in conseguenza alla retta  $QP$ , e però farà il triangolo  $PFf = \frac{PQ \times Ff}{2}$ .

2

Si chiami il raggio  $CA = r$ ,  $CD = b$ ,  $CE = x$ , farà  $FE = \sqrt{rr - xx}$ , e perchè l'angolo  $CFT$  è retto, essendo tangente del circolo la  $TF$ , sono simili i triangoli  $CFE$ ,  $TCF$ ; onde farà  $CT = \frac{rr}{x}$ , ma  $CT$  è alla

CF,

$CF$ , o sia  $CF, CE :: TD, DQ$ , adunque  $DQ = \frac{rr + bx}{r}$ . Sia la data  $PD = p$ , farà dunque la  $PQ =$

$\sqrt{pp + \frac{rr + bx}{r}}$ ; ma l'elemento del cerchio  $Ff$  si sa essere  $-\frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}}$ ; adunque  $\frac{Ff \times PQ}{2}$ , elemento della

superficie, farà  $= -\frac{rdx \sqrt{pp + \frac{rr + bx}{r}}}{2 \sqrt{rr - xx}}$ , formola che

fin' ora non si fa ridurre alle note quadrature di circolo, o dell'iperbola, perchè non si può liberare da' segni radicali, come si è veduto al num. 38., e come ci è pure occorso nel volere rettificare l'ellissi.

Ricorrendo alla serie: si riduca in serie infinita il numeratore, e lo stesso si faccia del denominatore, indi si proceda nello stesso modo, come si è fatto nella seconda maniera intorno all'ellissi nell'Esempio 20. num. 112.

### ESEMPIO XL.

134. Sia l'emisfero, il di cui femicircolo generatore  $CDK$ , (Fig. 32.) che s'aggiri attorno al raggio  $DB$ , e sia  $DB = a$ , una qualunque  $DA = x$ , farà



rà  $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$ , e però  $dy^2 = \frac{a - x}{2ax - xx} \times dx^2$ ,

e fatte le sostituzioni nella formola generale, farà essa  $= \frac{cadx}{r}$ , ed integrando  $\frac{cax}{r} =$  alla superficie del seg-

mento di sfera generato dall'arco  $EDM$ ; e fatta  $x = a$ , farà  $\frac{caa}{r}$  la superficie dell'emisfero, e però  $\frac{2caa}{r}$  la su-

perficie di tutta la sfera. Sarà adunque la superficie d'un qualunque segmento eguale al prodotto della periferia del circolo generatore della sfera nell'altezza di esso segmento; dell'emisfero, eguale al rettangolo della stessa periferia nel raggio; e della sfera, eguale al rettangolo della periferia nel diametro, e però esse superficie tra loro nella ragione, che hanno l'altezza, il raggio, ed il diametro.

E perchè l'area del circolo generatore della sfera è  $\frac{caa}{2r}$ , farà la superficie della sfera ad essa area :: 4, 1,

cioè quadrupla del massimo circolo.

Ma poichè è pure la superficie del cilindro (non comprese le basi) circoscritto all'emisfero, eguale al prodotto della periferia della base nell'altezza, farà dunque  $= \frac{caa}{r}$ , ed in conseguenza essa superficie eguale

alla superficie dell'emisfero. Ma il cono inscritto nell'

emis-

emisfero à pure la superficie =  $\frac{ca \sqrt{2aa}}{2r}$ , dunque farà

la superficie del cilindro, o dell'emisfero alla superficie del cono inscritto, come  $2a, \sqrt{2aa}$ , cioè a dire, come il diametro al lato del cono ec.

ESEMPIO XLI.

135. Si muova la parabola  $ACO$  dell'equazione  $ax = yy$  attorno all'asse  $AM$  (Fig. 33.). Sarà dunque  $adx = 2ydy$ , e  $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$ ; e però, la formola, fatta

la sostituzione,  $\frac{cydy}{ar} \sqrt{4yy + aa}$ , ed integrando,

$$\frac{c}{127a} \times \frac{\sqrt{4yy + aa}^3}{3} = \text{alla superficie del conoide parabo-}$$

lico indefinito, eguale alla quarta proporzionale di  $6a,$   
 $\sqrt{4yy + aa}$ , e dell'area del circolo del raggio =  
 $\sqrt{4yy + aa}$ .

136. Sia più generalmente  $\frac{x^t}{t} = y$  l'equazione del-

la parabola  $ACO$  (Fig. 33.) con l'assisa  $AB = x$ , e coll'applicata  $BC = y$ , la qual'equazione per lo trilineo

bb

ACD

$ACD$  farà  $x^{\frac{1}{t}} = y$ , se si prenda  $AD = x$  siccome affissa, e  $DC = y$  siccome ordinata. Al num. 119. Esempio 27. si è veduto, essere l'elemento della curva, il quale chiamo  $du = \frac{dx}{x^{2t-2} + 1}^{-\frac{1}{2}}$ , e la formola differenziale per le superficie è  $\frac{cydu}{r}$ , dunque farà  $\frac{cydu}{r} = \frac{cydx}{r \times x^{2t-2} + 1}^{-\frac{1}{2}}$ ;

ma è, per l'equazione locale,  $x^t = y$ , dunque farà  $\frac{cydu}{r} = \frac{cx^t dx}{rt \times x^{2t-2} + 1}^{-\frac{1}{2}}$ .

Per procedere alle integrazioni, o quadrature mi fervirò del metodo spiegato al num. 61., e posto in uso nel suddetto Esempio 27., ma prima si offervi, che essendo  $c$  la periferia del circolo, il di cui raggio  $r$ , l'integrale  $\int \frac{cydu}{r}$  ci dà la superficie del conoide; ma

se  $c$  farà una qualunque data retta, si averà la misura della superficie dell'ugna, quando cioè eretta sulla base  $CAB$  una cilindroide, questa viene tagliata da un piano, che passa per l'asse  $AB$ , e forma con la base sottoposta  $CAB$  un'angolo, il di cui seno retto a quello del complemento sia, come la  $c$  alla  $r$ . Le superficie

cie unguari adunque stanno a quelle del solido rotondo, come una data retta alla circonferenza  $c$ .

Operando adunque, come nel citato num. 61. è stato spiegato, affinchè la nostra formola sia algebricamente integrabile, o riducibile alle note quadrature, troveremo dover essere  $t = \frac{3+2b}{1+2b}$ , o pure  $t = \frac{b+1}{b+2}$ ,

intendendo per  $b$  un qualunque numero intero positivo, o negativo.

La prima condizione, cioè  $t = \frac{3+2b}{1+2b}$ , posto  $b$  numero intero prima positivo, e poi negativo, ci dà le due progressioni

$$\text{I. } t = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9} \text{ ec.}$$

$$\text{II. } t = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11} \text{ ec.}$$

La seconda condizione, cioè  $t = \frac{b+1}{b+2}$ , posto  $b$  numero

intero prima positivo, poi negativo, ci dà le due altre progressioni

$$\text{III. } t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ ec.}$$

$$\text{IV. } t = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \text{ ec.}$$

bb 2

Sog-

Soggiungo alcune brèvi osservazioni.

I. Siccome le due progressioni prima, e terza abbracciano gli esponenti di tutte quelle parabole, che aggirandosi intorno all'asse generano conoidi, la superficie de' quali è analiticamente quadrabile, supposta soltanto la rettificazione della periferia circolare, e conseguentemente tutte le unghie sopra descritte di data altezza ammettono una quadratura algebrica; così ne' casi della serie seconda, e quarta ci vuole qualche cosa di più, e c'entra il tetragonismo dell'iperbola.

II. E' notabile, che paragonando insieme la serie prima con la seconda, e la terza con la quarta, gli esponenti sono inversi, ed appartengono alla medesima curva. Ciò significa, che potendosi girare l'area parabolica o intorno l'asse  $AB$ , o intorno l'asse  $AD$ , e producendosi nell'uno, e nell'altro caso superficie affatto diverse, se nel primo si genera una superficie assolutamente quadrabile, almeno considerata nell'unghie; nel secondo tutto all'opposto, essendo reciprochi i valori, nascono le superficie suddette ipoteticamente quadrabili. Per esempio il conoide formato dalla prima parabola cubica arruotata intorno  $AD$  ci somministra quadrabile algebricamente la superficie dell'unghie, ed anche quella del solido rotondo, mentre si abbia una linea retta eguale alla circonferenza. Ma se s'aggiri intorno all'asse  $AB$ , si richieggono le quadrature. Nella  
para-

parabola seconda cubica succede lo stesso; e tutto all'opposto nella apolloniana.

III. Confrontando queste serie con quelle del num. 119. si scorge, che fra queste nessuna parabola della prima, o seconda serie è rettificabile nè analiticamente, nè per via delle note quadrature; quelle all'opposto della seconda, e quarta sono tutte rettificabili, ed abbracciano tutte le contenute nelle progressioni comprese nel citato num. 119.

IV. Fra le iperbole la sola comune tra gli asintoti ammette la superficie riducibile alla quadratura della stessa iperbole, perchè altro esponente negativo non ci si affaccia nelle citate progressioni, salvo che  $-1$ .

V. Gli esponenti, che non si trovano nelle dette serie, come  $t = 4, 5, 6$  ec.  $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}$  ec. vogliono quadrature più alte per misurare le superficie conoidali indi nascenti.

ESEMPIO XLII.

137. Sia l'ellissi  $ADC$ , ( Fig. 28. ) che si muova attorno all'asse  $AC$ , e sia  $AB = a$ ,  $BD = b$ ,  $AE = x$ ,  $EO = y$ , e l'equazione  $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$ .

Sarà

Sarà dunque, differenziando,  $dx = \frac{aaydy}{bb \times \overline{a-x}}$ , e pe-

rò  $dx^2 = \frac{a^2yydy^2}{b^4 \times \overline{a-x}^2}$ , e ponendo in luogo di  $-2ax + xx$

il valore  $-\frac{aayy}{bb}$  dato dall'equazione, farà  $dx^2 =$

$\frac{aayydy^2}{bb}$ . Adunque sostituito questo valore nella

$bb \times bb - yy$

formola generale, la troveremo essere

$\frac{cydy \sqrt{b^2 + aayy - bbyy}}{rb \sqrt{bb - yy}}$ , e fatta per brevità  $aa - bb = ff$ ,

$rb \sqrt{bb - yy}$

supposta  $a$  maggiore di  $b$ , cioè che l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, sia il maggiore, ( se fosse  $a$  minore di  $b$  si farebbe  $aa - bb = -ff$  ) farà  $\frac{cydy \sqrt{b^2 + ffyy}}{rb \sqrt{bb - yy}}$  for-

$rb \sqrt{bb - yy}$

mola, che per le cose dette a suo luogo si potrà liberare dai radicali, ed il di cui integrale per mezzo del canone del num. 56. troveremo dipendere dalla quadratura del circolo. Ma se farà  $a$  minore di  $b$ , cioè l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, il minore, la superficie dello sferoide dipenderà d'ambe le quadrature, cioè dalla circolare, e dall'iperbolica. La superficie poi dell'ugna nel primo caso è eguale ad una porzione di spazio ellittico, che si determina facilmente per via

delle

delle normali alla curva ; ma nel secondo caso appunto queste normali ci danno uno spazio iperbolico eguale alla stessa superficie dell'ugna . Per vedere ciò chiaramente: sia la curva  $ACF$ , ( *Fig. 40.* ) su cui s'intenda eretta una cilindroide , che venga tagliata da un piano , il quale passi per l'asse  $AB$ , e formi col sottoposto piano  $CAB$  un'angolo semiretto , egli è manifesto , che chiamato  $du$  l'elemento della curva , sarà  $\int ydu$  la superficie dell'ugna inferiore , e  $\int \frac{cydu}{r}$  la superficie del conoide nascente dal girarsi la figura  $CAB$  intorno l'asse  $AB$ , e però sarà la superficie dell'ugna a quella del conoide , come il raggio alla circonferenza del circolo .

Ora sieno le due ordinate  $BC$ ,  $DF$  infinitamente prossime , e condotta al punto  $F$  la normale  $FG$ , si metta essa in  $DH$ , e faccia figura di applicata della nuova curva  $MIH$  delineata col metodo prescritto: dico , che l'area  $MABI$  è eguale alla superficie dell'ugna , che à per base l'arco  $AC$ .

I due triangoli  $FCE$ ,  $GFD$  sono simili , dunque sarà  $FC$ ,  $CE :: GF$ ,  $FD$ , e però  $FD \times FC = GF \times CE = DH \times DB$ . Ma  $FD \times FC$  ( $ydu$ ) è l'elemento della superficie dell'ugna ; ed  $HD \times DB$  è l'elemento dell'area  $IMAB$ , dunque essendo eguali questi elementi , lo faranno ancora i loro integrali ,  
cioè



cioè le predette aree . Ciò premesso , sia la Figura  $ACB$  un quarto d'ellissi dell'equazione  $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$ , farà

la normale  $FG = \frac{b}{aa} \sqrt{2a^3x - aaxx + bbxx - 2abbx + aabb}$ ,

dunque chiamata  $z$  l'ordinata  $BI$ , farà  $z =$

$\frac{b}{aa} \sqrt{xx - 2ax} \times \frac{bb - aa + aabb}{bb}$ , equazione alla curva

$MIH$ , che appunto è un'altra ellissi quando sia  $a$  maggiore di  $b$ , cioè se  $AB$  sia l'asse maggiore dell'ellissi  $ACB$ ; ed all'incontro un'iperbola quando sia  $a$  minore di  $b$ , cioè  $AB$  l'asse minore .

Finalmente nel caso di mezzo, cioè quando l'ellissi degenera in circolo, già si sa, che la detta superficie dell'ugna è quadrabile, eguagliandosi ad un rettangolo .

### ESEMPIO XLIII.

138. Sia l'iperbola  $BD$ , (*Fig. 29.*) che s'aggiri attorno all'asse trasverso  $BA$ . Sia  $A$  il centro,  $BA = a$ ,  $AE$  semiasse conjugato  $= b$ ,  $AC = x$ ,  $CD = y$ ; farà l'equazione  $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ , e però  $y = \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$ ,

$dy = \frac{bx dx}{a \sqrt{xx - aa}}$ , adunque la formola generale, fatte

le

le sostituzioni, farà

$$\frac{cb}{ar} \sqrt{xx - aa} \sqrt{\frac{aaxxdx^2 + bbxxdx^2 - a^4 dx^2}{aa \times xx - aa}}, \text{ cioè}$$

$$\frac{cbdx}{aar} \sqrt{aaxx + bbxx - a^4}, \text{ o sia, fatta } aa + bb = ff,$$

$$\frac{cbfdx}{aar} \sqrt{xx - \frac{a^4}{f}}, \text{ il di cui integrale, quando si sia libe-}$$

rata dal segno radicale, troveremo dipendere medesima-  
mente dalla quadratura dell'iperbola.

ESEMPIO XLIV.

139. Sia l'iperbola  $MD$ , (*Fig. 41.*) equilatera fra gl'asintoti, e si muova attorno all'asintoto  $AC$ , di cui l'equazione sia  $ay + xy = aa$ , essendo  $AB = a$ ,  $BC = x$ ,  $CD = y$ . Sarà dunque  $x = \frac{aa}{y} - a$ , e  $dx^2 =$

$\frac{a^4 dy^2}{y^4}$ ; e però la formola generale farà, fatta la sosti-

tuzione,  $\frac{cdy}{ry} \sqrt{y^4 + a^4}$ . Si faccia  $\sqrt{y^4 + a^4} = z$ , e però

$y^4 = zz - a^4$ ,  $dy = \frac{zdz}{2y^3}$ . Fatte queste sostituzioni,

avremo trasformata la formola in quest'altra

$$\frac{czzdz}{2r \times zz - a^4}$$

c c

libera

libera da' segni radicali, il di cui integrale dipende in parte da' logaritmi, come è facile a vedere. Adunque la ricercata superficie della nostra iperbola descritta dipenderà dalla quadratura pure dell'iperbola.

## E S E M P I O X L V.

140. Sia il solido generato dalla trattoria (Fig. 20.)  $ABF$ , come nel Esempio 36. num. 128., di cui si voglia la superficie. Nella formola generale  $\frac{cy du}{r}$  (intendendo per  $du$  l'elemento della curva) sostituito in luogo di  $du$  il valore  $-\frac{ady}{y}$  dato dall'equazione della curva, avremo  $-\frac{acdy}{r}$ , ed integrando  $-\frac{acy}{r} + n$ . Ma quando la superficie sia nulla, si è  $y = a$ ; dunque la costante  $n = \frac{aac}{r}$ , e però l'integrale compito  $\frac{aac}{r} - \frac{acy}{r}$  eguale alla superficie del solido generato dalla figura  $AEDB$ ; e fatta  $y = 0$ , farà  $\frac{aac}{r}$  eguale alla superficie del solido infinitamente prodotto. Ma l'area del circolo, il di cui raggio  $= \sqrt{2aa}$ , si trova  $= \frac{caa}{r}$ , dunque la superficie del solido infinitamente prodotto è eguale all'

all'area del circolo , il di cui raggio sia la diagonale del quadrato di  $AE$  .

E S E M P I O X L V I .

141. Sia l'unghia  $CNEODAC$  , ( *Fig. 37.* ) di cui si cerchi la superficie . Denominando , come al num. 129 , farà  $QK = \frac{bx}{a} = MN$  , ma  $Mi$  elemento della curva  $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$  , adunque farà  $\frac{bx}{a} \sqrt{dx^2 + dy^2}$  eguale al quadrilineo infinitesimo  $MimN$  , elemento della superficie della metà dell'unghia .

Sia la curva  $DAC$  un semicircolo , farà in questo caso  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$  , e però la formola

$\frac{bx dx}{\sqrt{aa - xx}}$  , ed integrando ( per lo num. 31. ) farà

$-b \sqrt{aa - xx} + f$  , ma fatta  $x = 0$  , farà  $f = ab$  , adunque l'integrale compito si trova essere  $ab - b \sqrt{aa - xx}$  , e posta  $x = a$  , rispetto a tutta la superficie della metà dell'unghia , farà essa superficie  $= ab$  .

Sia la curva  $DAC$  la parabola dell'equazione  $yy = a - x$ , farà  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} dx \sqrt{\frac{4a - 4x + 1}{a - x}}$ , e però

la formola  $\frac{bx dx}{2a} \sqrt{\frac{4x^2 - 4x + 1}{a - x}}$ , il di cui integrale

dipende dalla quadratura dell'iperbola, adunque dalla stessa quadratura dipenderà la superficie dell'unghia.

## E S E M P I O X L V I I.

142. Sia il conoide parabolico generato dalla rotazione della parabola  $ADH$  con le coordinate in angolo obbliquo (*Fig. 7.*) attorno all'asse  $AC$ , la di cui equazione è  $ax = yy$ . Si sostituiscia nella formola delle superficie, che a questo caso compete, cioè nella formola  $\frac{cay}{rm} \sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zedxdy}{m}$  il valore di  $dx$  dato per  $dy$  dall'equazione differenziata della curva, e si trasformerà in quest'altra  $\frac{zcn y dy}{arm} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$ , il di cui integrale si trova essere in parte algebrico, ed in parte logaritmico.

143. Coerentemente al metodo esposto delle quadrature, rettificazioni ec. sarebbe questo luogo oppor-

tuno

tuno per dare altresì le formole de' centri di gravità , di oscillazione , e di percussione , ma stimo meglio di ometterle , includendo esse necessariamente alcuni principj di Statica , dei quali non suppongo informati i miei Leggitori .



CAPO

## C A P O I V.

*Del Calcolo delle Quantità Logaritmiche ,  
ed Esponenziali .*

144. **Q**UANTITÀ esponenziali ( giacchè altrove abbastanza è stato detto, cosa sieno le logaritmiche ) si chiamano quelle , che sono elevate a qualunque potestà indeterminata ; tali farebbero  $a^x$ ,  $y^z$  ec., gli esponenti delle quali  $x$ ,  $z$  sono quantità indeterminate , e però il calcolo , che versa sopra queste tali quantità , chiamasi calcolo esponenziale .

145. Ma di più gradi sono le quantità esponenziali ; si dicono del primo grado quelle , i di cui esponenti sono indeterminate ordinarie , come sono appunto le quantità  $a^x$ ,  $y^z$ . Del secondo grado sono quelle , gli esponenti delle quali sono essi pure quantità esponenziali , come farebbe  $a^{x^t}$ ,  $y^{z^p}$ , intendendo la  $x$  elevata alla potestà  $t$ , e la  $z$  alla potestà  $p$ . Del terzo grado sono quelle , che hanno per esponente una quantità esponenziale del secondo grado , e così di mano in mano coll' istesso ordine .

146. Ma qui fa d'uopo richiamare a memoria  
ciò ,

ciò , che è stato detto al num. 11. , cioè , che  $\int \frac{ady}{y} = ly$

nella logaritmica della sottangente =  $a$  ; adunque il differenziale di  $ly$  farà  $\frac{dy}{y}$  moltiplicato nella sottangente

della logaritmica , in cui si prende il logaritmo ; così il differenziale di  $l\sqrt{aa-xx}$  nella logaritmica della sottangente = 1 farà  $-\frac{x dx}{aa-xx}$  , e generalmente il diffe-

renziale d'una qualunque quantità logaritmica farà una formola composta del differenziale della quantità moltiplicata nella sottangente , e divisa per la quantità stessa .

147. Ciò posto: abbiati da differenziare la quantità logaritmica  $l^m x$  ( la  $m$  è esponente del logaritmo ). Si ponga  $l^m x = y^m$  , adunque farà  $l x = y$  , e  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$  ;

ma il differenziale di  $l^m x$  farà  $m y^{m-1} dy$  , ed è  $y^{m-1} = l^{m-1} x$  ; adunque sostituito il valore in luogo di  $y$  , e  $dy$  dato per  $x$  , farà il differenziale di  $l^m x = m l^{m-1} x \times \frac{adx}{x}$  , supposta =  $a$  la sottangente della loga-

ritmica ; o pure  $m l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$  , supposta essa sottangente = 1 .

148. Che se fosse da differenziarsi  $l^m x^n$  ; fat-

ta



ta  $x^n = z$ , farà  $l^m z$ , ed il differenziale farà  $m l^{m-1} z \times \frac{dz}{z}$ ; ma  $dz = nx^{n-1} dx$ , adunque sostituendo,

il differenziale della proposta formola  $l^m x^n$  farà  $nm l^{m-1} x^n \times \frac{dx}{x}$ .

149. Abbiassi da differenziare la formola  $llx$ . Si ponga  $lx = y$ , e però  $llx = ly$ ; adunque farà  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

nella logaritmica della sottangente = 1 (il che s'intenda ogni qual volta esse sottangenti non siano espresse); ma poichè  $llx = ly$ , il differenziale di  $llx$  farà  $\frac{dy}{y}$ ;

adunque posti in luogo di  $y$ , e di  $dy$  i valori dati per  $x$ , farà  $\frac{dx}{x}$  il differenziale della proposta formola.

${}_x l x$

Ma più generalmente sia  $l^m lx$  da differenziarsi. Pongo  $lx = y$ , e però  $l^m lx = l^m y$ , e  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ ; ma

il differenziale di  $l^m y$  è  $m l^{m-1} y \times \frac{dy}{y}$ ; adunque sostituiti

i valori in luogo di  $y$ , e di  $dy$  dati per  $x$ , farà  $m l^{m-1} lx \times \frac{dx}{x}$  il differenziale cercato.

Più generalmente ancora. Sia da differenziarsi  $l^n l^m x$ . Pongo  $l^m x = y^m$ , e però  $lx = y$ , e  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ ;

adun-

adunque farà  $l^n l^m x = l^n y^m$ . Ma il differenziale di  $l^n y^m$  è  $mn l^{n-1} y^m \times \frac{dy}{y}$ , adunque fatte le sostituzioni, farà  $mn l^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x l x}$  il differenziale cercato.

150. Quanto al modo di differenziare le quantità esponenziali. Sia la quantità  $z^x$  da differenziarsi. Pongo  $z^x = t$ , farà in conseguenza  $l z^x = l t$ , ma per lo num. 14.  $l z^x = x l z$ ; adunque farà  $x l z = l t$ , e però differenziando  $\frac{dx l z + x dz}{z} = \frac{dt}{t}$ , ma  $t = z^x$ , onde  $\frac{dx l z + x dz}{z} = \frac{dt}{z^x}$ , e finalmente  $dt = z^x dx l z + x z^{x-1} dz$ , differenziale cercato.

151. Sia da differenziarsi la quantità esponenziale del secondo grado  $z^{x^p}$ . Pongo  $z^{x^p} = t$ , adunque farà  $x^p l z = l t$ , e differenziando, il differenziale di  $x^p \times l z + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$ , ma per lo num. antecedente, il differenziale di  $x^p$  sapiamo essere  $x^p dpl x + p x^{p-1} dx$ , adunque farà  $x^p dpl x + p x^{p-1} dx \times l z + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$ , ma  $t = z^{x^p}$ ; adunque farà  $dt = z^{x^p} x^p dpl x l z + z^{x^p} p x^{p-1} dx l z + z^{x^p} z^{-1} x^p dz$ , differenziale cercato.

Nello stesso modo si proceda intorno alle quantità esponenziali di qualunque altro grado.

d d

152.

152. Istessamente si averanno i differenziali delle quantità, che sono il prodotto di quantità esponenziali, per esempio di  $x^p y^u$ , imperocchè il differenziale di questa sarà il prodotto di  $x^p$  nel differenziale di  $y^u$ , con di più il differenziale di  $x^p$  in  $y^u$ ; ma i differenziali di  $x^p$ , ed  $y^u$  si fanno trovare, adunque ec.

153. Dall'ordine, con cui procedono i differenziali logaritmici, si possono cavare alcune regole per la integrazione delle formole differenziali logaritmiche; ed in primo luogo que' canoni, che servono per la integrazione delle quantità differenziali ordinarie, serviranno ancora per le quantità differenziali logaritmiche a loro simili, purchè queste sieno in oltre divise per la variabile, e l'integrale di queste sarà lo stesso dell'integrale di quelle, ponendo solo in queste in luogo della incognita, o sua potestà, il logaritmo, o potestà del logaritmo dell'incognita stessa, ed il tutto dividendo per la sottangente della logaritmica.

Così poichè l'integrale di  $m x^{m-1} dx$  è  $x^m$ , farà pure  $\frac{l^m x}{a}$  l'integrale di  $m l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$ .

Istessamente poichè  $\int x^{-1} dx = l x$ , farà pure  $\int l^{-1} x \times \frac{dx}{x}$ , o sia  $\int \frac{dx}{x l x} = l l x$ , supposta la sottangente = 1.

E

E poichè  $\int y dy \sqrt{aa+yy} = \frac{aa+yy^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ , farà pure

$$\int ly \sqrt{aa+l^2y} \times \frac{dy}{y} = \frac{aa+l^2y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

Sia da integrarsi  $ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx}$ . Pongo  $lx = y$ ,

adunque  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ , e fatta la sostituzione, farà  $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$ ;

ma l'integrale di  $my^{m-1}dy$  si fa essere  $y^m$ , adunque l'integrale di  $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$  farà  $l^m y$ ; ma  $y = lx$ , e

però  $ly = llx$ , e  $l^m y = l^m lx$ ; adunque

$$\int ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx} = l^m lx.$$

Sia  $nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x}$ . Pongo  $x^m = y$ , e però

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{mx^{m-1}}$ ; fatte le sostituzioni, farà

$nml^{n-1}y \times \frac{dy}{mx^{m-1} \times x}$ , cioè  $\frac{nml^{n-1}y \times dy}{m \times y}$ , o sia

$nl^{n-1}y \times \frac{dy}{y}$ , il di cui integrale è  $l^n y$ , adunque re-

stituito il valore di  $y$ , farà  $\int nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x} = l^n x^m$ .

Sia  $nml^{n-1}l^m x \times \frac{dx}{xlx}$ . Pongo  $lx = y$ ; dun-

dd 2

que

que  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ , e  $l^m x = y^m$ ; fatta la sostituzione, farà  $nm l^{n-1} y^m \times \frac{dy}{y}$ , ma l'integrale di questa è  $l^n y^m$ ,

adunque restituito il valore, farà

$$\int nm l^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x l^m} = l^n l^m x.$$

154. A ciò aggiungo una regola generale per la integrazione della formola  $y^m l^n y dy$ , e dico, che farà generalmente  $\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - n y^{m+1} \frac{a l^{n-1} y}{m+1}$

$$\frac{n \times \frac{y^{m+1} a a l^{n-2} y}{m+1}}{m+1} -$$

$$\frac{n \times \frac{y^{m+1} a^2 l^{n-3} y}{m+1} \text{ ec. , e così conti-}}{m+1}$$

novando in infinito con la stessa legge, che da se è manifesta.

Quindi se l'esponente  $n$  farà un numero intiero, e positivo, è facile il vedere, che la serie s'interrromperà, ed in conseguenza farà dato in termini finiti l'integrale della proposta formola.

Sia per cagione d'esempio  $n = 2$ ; farà dunque  $n - 2 = 0$ , e però farà zero il coefficiente del quarto termine, e de' susseguenti, per essere ciascuno moltiplicato

plicato per  $n-2$ . Così se farà  $n=3$ , s'interromperà la serie nel quinto termine; e così degl'altri ec.

Sia  $n=2$ ,  $m=1$ , onde la formola d'integrarsi sia  $y l^2 y dy$ ; farà adunque zero il quarto termine, ed ognuno de' susseguenti, e però l'integrale sarà  $\frac{y y l^2 y}{2} - \frac{2 y y a l y}{4} + \frac{2 y y a a}{6}$ , cioè  $\frac{2 y y l^2 y}{2} - \frac{2 a y y l y}{4} + \frac{a a y y}{6}$ .

Che se fosse  $m=-1$ , sarebbe inutile la serie, perchè farebbe  $m+1=0$ , il che rende infinito ciascun termine, ma in questo caso non v'è bisogno della serie, giacchè si fanno integrare queste formole per le cose dette di sopra.

Rimane, che di tale regola se ne dia la dimostrazione; per lo che fare si ponga  $ly = z$ ; e però  $\frac{ady}{y} = dz$ ;

farà adunque, fatta la sostituzione,  $y^m l^n y dy = y^m z^n dy$ ; ma  $y^m z^n dy = y^m z^n dy + \frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz -$

$$\frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady - \frac{n \times n-1}{m+1} y^{m+1} z^{n-2} adz +$$

$$\frac{n \times n-1}{m+1} y^m z^{n-2} aady \text{ ec. , e così in infinito, per-}$$

chè in questa guisa ciascun termine, tolgone il primo, si distrugge dall'immediatamente susseguente, appunto per

per essere  $dz = \frac{ady}{y}$ . Ora poichè questa tal serie infinita

è integrabile, prendendo i termini a due a due, imperciocchè l'integrale del primo, e secondo termine è  $\frac{y^{m+1}z^n}{m+1}$ ; del terzo, e quarto è  $-\frac{any^{m+1}z^{n-1}}{m+1}$ ;

del quinto, e sesto è  $\frac{aan \times \frac{n-1}{m+1} \times y^{m+1}z^{n-2}}{m+1}$ , e

così di mano in mano; restituito in questi integrali  $ly$  in luogo di  $z$ , troveremo finalmente essere

$$\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{any^{m+1} l^{n-1} y}{m+1} +$$

$$\frac{aan \times \frac{n-1}{m+1} \times y^{m+1} l^{n-2} y}{m+1} - \frac{a^2 n \times \frac{n-1}{m+1} \times \frac{n-2}{m+1} \times y^{m+1} l^{n-3} y}{m+1}$$

155. L'artificio, con cui si ritrova la suddetta serie, può essere il seguente.

M'immagino, che l'integrale di  $y^m l^n y dy$  sia  $\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1}$ , quale appunto sarebbe, se  $l^n y$  non fosse

quantità variabile, ma posta la sottraggente  $= a$ , il differenziale di esso integrale è  $y^m l^n y dy + \frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ ,

il quale si trova maggiore della proposta formola, quanto

to è  $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ ; adunque l'integrale assunto è mag-

giore del dovere, quanto è l'integrale di  $\frac{ny a l^{n-1} y dy}{m+1}$ ,

e però l'integrale di questo si dovrà sottrarre dall'integrale supposto.

• E qui di nuovo m'immagino, che l'integrale di  $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$  sia  $\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y^2}{m+1}$ , onde l'integrale

della proposta formola venga ad essere  $\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y^2}{m+1}$ . Ma differenziando

$\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y^2}{m+1}$ , si à  $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1} +$

$n \times \frac{n-1}{m+1} \times \frac{y^m a^2 l^{n-2} y dy}{m+1}$ ; adunque l'integrale di

$\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$  non è  $\frac{ny^m a l^{n-1} y^2}{m+1}$ , ma è maggiore

del dovere, quanto è l'integrale di  $\frac{n \times n-1}{m+1} \times \frac{y^m a a l^{n-2} y dy}{m+1}$ ,

adunque si è sottratto troppo; e però bisognerà aggiungere questo integrale, il quale nuovamente m'im-

ma-



magino, che sia  $\frac{n \times n-1 \times y^{m+1} a a l^{n-2} y}{m+1}$ , adun-

que farebbe l'integrale della proposta formola

$$\frac{y^{m+1} l^n y - n y^{m+1} a l^{n-1} y + \frac{n \times n-1 \times y^{m+1} a a l^{n-2} y}{m+1} \text{ ec.},}{m+1 \quad m+1 \quad m+1}$$

e così con lo stesso ordine procedendo si continuerà la serie in infinito.

156. Si possono anco avere gl'integrali delle formole differenziali logaritmiche per via di serie, che non contengano quantità logaritmiche, ma sole ordinarie, le quali serie però non s'interrompono mai, e sono sempre infinite.

Sia adunque da integrarsi  $x / x \times dx$ . Pongo  $x = z + a$ , sostituendo farà  $\frac{z+a}{z+a} \times dx$ , ma per lo num. 70.

$$\frac{1}{z+a} = \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2aa} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} \text{ ec.}, \text{ supposta la sottan-}$$

gente = 1, facendo adunque l'attuale moltiplica, avere-

$$\text{mo } \frac{z+a}{z+a} \times dz =$$

$$\frac{zdz}{a} + \frac{z^2 dz}{2aa} - \frac{z^3 dz}{3a^3} + \frac{z^4 dz}{4a^4} - \frac{z^5 dz}{5a^5} \text{ ec.}$$

$$- \frac{z^2 dz}{2aa} + \frac{z^3 dz}{3aa} - \frac{z^4 dz}{4a^3} + \frac{z^5 dz}{5a^4},$$

cioè

cioè  $zdz + \frac{zzdz}{2a} - \frac{z^3dz}{6aa} + \frac{z^4dz}{12a^3} - \frac{z^5dz}{20a^4}$  ec., ed integran-

do farà  $\frac{zz}{2} + \frac{z^3}{6a} - \frac{z^4}{24aa} + \frac{z^5}{60a^3} - \frac{z^6}{120a^4}$  ec. =

$$\int \overline{z+a} \overline{l z+a} \times dz .$$

Che se la formola fosse  $x^m l x dx$ , cioè

$\overline{z+a}^m \overline{l z+a} \times dz$ , si dovrebbe moltiplicare la serie

esprimente il logaritmo nella potestà  $\overline{z+a}^m$ . E se di più fosse anco il logaritmo elevato a potestà, come a

dire  $x^m l^n x dx$ , cioè  $\overline{z+a}^m \overline{l^n z+a} \times dz$ , bisognerebbe in oltre elevare alla potestà  $n$  la serie infinita, che esprime esso logaritmo, e fare il rimanente come sopra.

157. Le equazioni o formole differenziali affette da quantità logaritmiche bene spesso ammettono integrazioni, che sono geometriche, e dipendono da quadrature di spazj curvilinei, che facilmente si descrivono, supposta la logistica. Eccone alcuni esempj scelti fra i più semplici.

Sia l'equazione  $dy l y = dx$ , e nella logaritmica descritta (Fig. 42.) pongasi  $CD = y$ , e presa la sottangente per unità, avremo  $AC$ , o  $HD = l y$ ; onde il rettangolo infinitesimo  $DG$ , la di cui base  $GH = FE = dy$ , farà  $= dy l y$ , ma questo rettangolo si è l'elemento

e c

dell'

dell'area crescente  $BDH$ , dunque la somma  $\int dy \, l y$  è eguale alla detta area  $BDH$ .

Di fatto l'area stessa si eguaglia al rettangolo  $AD$  meno lo spazio logaritmico  $ABDC$ ; ma questo spazio, siccome è noto, si misura dal rettangolo  $AB \times CD = y$ , dunque l'area  $BDH = \int dy \, l y = y \, l y - y$ , siccome pure può trovarsi per via d'analisi.

Considero un'altra formola  $dy \, l^2 y = dx$ . Il primo membro altro non è, che il solido generato dalla rivoluzione  $HG$  moltiplicata nel quadrato dell'ordinata  $GF$ , il qual solido è analogo all'elemento del conoide generato dall'area  $BDH$  girata attorno l'asse  $BG$ , dunque l'integrale  $\int dy \, l^2 y = y \, l^2 y - 2y \, l y + 2y$  sta al detto conoide in data ragione.

Più generalmente abbiassi  $dy \, l^m y$ . Alzata l'applicata  $HD$  alla potestà  $m$  (essendo l'indice  $m$  un numero affermativo, o negativo, intero, o rotto) basterà, che l'ordinata  $HM$  facciasi eguale alla dignità  $\overline{HD}^m$ , e che per lo punto  $M$ , ed altri infiniti in simil maniera determinati passi la curva  $BMN$ , per conseguire, che l'area  $BMH = \int MH \times dy$  sia eguale, o analoga all'integrale  $\int dy \, l^m y$ .

Mag-

Maggiore difficoltà non si incontra quando anche nella espressione ci si parano avanti i logaritmi dei logaritmi. Propongasi  $dy lly = dx$ ; giacchè  $AC$  è il logaritmo di  $CD$ , se si adatterà nella logistica la nuova applicata  $IL$  eguale all'assisa  $AC$ , farà  $AI$  il logaritmo di  $IL$ , e conseguentemente il logaritmo del logaritmo della  $CD$ . Si proroghi la retta  $IL$  fin a tanto, che tagli la  $HD$  parallela, ed eguale ad  $AC$  nel punto  $K$ , per cui, ed altri infiniti similmente determinati passi una nuova curva delineata relativamente alla logistica: dico, che la quadratura dello spazio spettante ad essa curva ci dà l'integrale della formola  $dy lly = dx$ .

In altro modo: piglio la differenza della quantità  $y lly$ , cioè  $dy lly + \frac{dy}{ly}$ , ed aggiunto nella nostra es-

pressione da ambo le parti il termine  $\frac{dy}{ly}$ , si à  $dy lly + \frac{dy}{ly}$

$\frac{dy}{ly} = dx + \frac{dy}{ly}$ , ed integrando,  $y lly = x + \int \frac{dy}{ly}$ . Po-

sta dunque all'assisa  $AH$  l'ordinata corrispondente in ragion reciproca di  $HD = ly$ , nascerà una curva, il di cui tetragonismo esprimerà l'integrale  $\int \frac{dy}{ly}$ . E ciò

basterà, onde si vegga l'andamento del metodo.

158. Passerò ora alle integrazioni delle formole

ee 2

dif-

differenziali, che contengono quantità esponenziali, e sia da integrarsi  $x^x dx$ . Pongo  $x = 1 + y$ , ( prendo l'unità per una qualunque costante ) sarà dunque  $x^x dx = \overline{1+y}^{1+y} dy$ ; ciò posto, faccio in oltre  $\overline{1+y}^{1+y} = 1 + u$ , adunque sarà  $\overline{1+y} \mid \overline{1+y} = \mid 1 + u$ , e però convertiti in serie pel num. 70. i due logaritmi, e fatta l'attual moltiplica per  $1 + y$  della prima serie, averassi  $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$  ec. =  $u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$  ec. Indi faccio una equazione fittizia, e suppongo, che sia

$$u = y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec. ;}$$

(  $A, B, C, D$  ec. sono quantità da determinarsi )  
e però

$$uu = yy + 2Ay^3 + AAy^4 + 2ABy^5 + BBy^6 \text{ ec.} \\ + 2By^4 + 2Cy^5 + Dy^6$$

$$u^3 = y^3 + 3Ay^4 + 3AAy^5 \text{ ec.} \\ + 3By^5$$

$$u^4 = y^4 + 4Ay^5 \text{ ec.}$$

$$u^5 = y^5 \text{ ec. ,}$$

adun-

adunque farà  $u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$  ec. =

$y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5$  ec.

$-\frac{1}{2}yy - Ay^3 - \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5$  ec.

$- By^4 - Cy^5$  ec.

$+\frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5$  ec.

$+ By^5$  ec.

$-\frac{1}{4}y^4 - Ay^5$  ec.

$+\frac{1}{5}y^5$  ec.

Ma poichè  $u - \frac{1}{2}uu + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5$  ec.

=  $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$  ec., farà

$y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5$  ec.

$-\frac{1}{2}yy - Ay^3 + \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5$  ec.

$- By^4 - Cy^5$  ec. =  $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$  ec.

$+\frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5$  ec.

$+ By^5$  ec.

$-\frac{1}{4}y^4 - Ay^5$  ec.

$+\frac{1}{5}y^5$  ec.

E

E riducendo l'equazione al zero, farà

$$y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{2} yy - Ay^3 - \frac{1}{2} A Ay^4 - ABy^5 \text{ ec.}$$

$$- By^4 - Cy^5 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{3} y^3 + Ay^4 + A Ay^5 \text{ ec.} = 0.$$

$$+ By^4 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{4} y^4 - Ay^5 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{5} y^5 \text{ ec.}$$

$$- y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} + \frac{y^5}{20} \text{ ec.}$$

Quindi dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ed altri termini troveremo il valore delle affunte  $A, B, C$  ec., che faranno  $A = 1, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{3}, D = \frac{1}{12}$ . Adunque, posti questi valori in luogo delle majuscole, avremo  $1 + u = 1 + y^{1+y} = 1 + y + yy + \frac{1}{2} y^3 + \frac{1}{3} y^4 + \frac{1}{12} y^5 \text{ ec.}$ , onde

$$1 + y^{1+y} dy \geq dy + ydy + yydy + \frac{1}{2} y^3 dy + \frac{1}{3} y^4 dy + \frac{1}{12} y^5 dy \text{ ec.}$$

ed integrando, farà finalmente

$$\int 1 + y^{1+y} dy = y + \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} + \frac{y^6}{72} \text{ ec.}$$

159. In altra maniera ancora si troverà l'integrale

le della formola  $x^x dx$ . Pongo  $x^x = 1 + y$ , adunque  
 $x l x = l \overline{1 + y}$ ; riduco in serie  $l \overline{1 + y}$ ; e farà  
 $l \overline{1 + y} = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$  ec.

Ciò posto, fingo  $y = l \overline{1 + y} + Al^2 \overline{1 + y} + Bl^3 \overline{1 + y} + Cl^4 \overline{1 + y} + Dl^5 \overline{1 + y}$  ec., (  $A, B, C, D$  ec. sono quantità da determinarsi ) adunque farà

$$y = l \overline{1 + y} + Al^2 \overline{1 + y} + Bl^3 \overline{1 + y} + Cl^4 \overline{1 + y} + Dl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$yy = l^2 \overline{1 + y} + 2a l^3 \overline{1 + y} + AAl^4 \overline{1 + y} + 2ABl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$+ 2Bl^4 \overline{1 + y} + 2Cl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$y^3 = l^3 \overline{1 + y} + 3Al^4 \overline{1 + y} + 3AAl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$+ 3Bl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$y^4 = l^4 \overline{1 + y} + 4Al^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$y^5 = l^5 \overline{1 + y} \text{ ec. ,}$$

e però  $y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$  ec., cioè

$$l \overline{1 + y} = l \overline{1 + y} + Al^2 \overline{1 + y} + Bl^3 \overline{1 + y} + Cl^4 \overline{1 + y} + Dl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{2} l^2 \overline{1 + y} - Al^3 \overline{1 + y} - \frac{1}{2} AAl^4 \overline{1 + y} - ABl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$- Bl^4 \overline{1 + y} - Cl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{3} l^3 \overline{1 + y} + AAl^4 \overline{1 + y} + AAl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$+ Bl^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{4} l^4 \overline{1 + y} - Al^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{5} l^5 \overline{1 + y} \text{ ec.}$$

Quindi



Quindi riducendo l'equazione al zero, dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle affunte  $A, B, C, D$ , ec., cioè

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{24}, D = \frac{1}{120} \text{ ec.}, \text{ onde farà}$$

$$1+y = 1 + l\overline{1+y} + \frac{1}{2} l^2 \overline{1+y} + \frac{1}{6} l^3 \overline{1+y} + \frac{1}{24} l^4 \overline{1+y} + \frac{1}{120} l^5 \overline{1+y} \text{ ec.};$$

ma  $l\overline{1+y} = x l x$ , ed  $1+y = x^x$ ; adunque fatte le sostituzioni, e moltiplicando per  $dx$ , farà  $x^x dx = dx +$

$$x dx l x + \frac{1}{2} x x dx l^2 x + \frac{1}{6} x^3 dx l^3 x + \frac{1}{24} x^4 dx l^4 x + \frac{1}{120} x^5 dx l^5 x \text{ ec.},$$

ed integrando con le note regole di sopra spiegate,

$$\text{farà finalmente } \int x^x dx = x + \frac{x x l x}{2} - \frac{x x^2 + x^3 l^2 x}{4} -$$

$$\frac{x^3 l x + x^3}{9} + \frac{x^4 l^3 x}{27} - \frac{x^4 l^2 x + x^4 l x}{32} - \frac{x^4}{64} - \frac{x^4}{256} \text{ ec.}$$

160. Ma per dire in oltre alcuna cosa intorno alla costruzione delle curve espresse da equazioni logaritmiche, ed esponenziali. Debba in primo luogo descrivere la

curva dell'equazione  $x = l^{\frac{3}{2}} y$ : sia  $BD$  (Fig. 43.) la

$$a^{\frac{1}{2}}$$

logaritmica, in cui si prendano i logaritmi della proposta equazione, la di cui sottangente sia, per esempio,  $= a = AB$ ; ciò posto, presa  $y = a = AB$ , il logaritmo di  $y$  farà  $= 0$ , e però  $x = 0$ ; adunque fatta (Fig. 44.)

$$MN =$$

$MN=y=a$ , farà  $N$  un punto nella curva. Presa  $y$  minore

di  $AB$ , farà  $ly$  quantità negativa, e però  $l^{\frac{3}{2}}y$  quantità immaginaria, per essere il 2 indice pari di radice di quantità negativa, onde  $x$  farà immaginaria ogni qual volta sia  $y$  minore di  $a$ . Presa  $y$  maggiore di  $AB$  per esempio  $= CD$ , farà  $AC = ly$ ; ma per l'equa-

zione data, è  $a^{\frac{1}{2}}, l^{\frac{1}{2}}y :: ly, x$ , cioè  $a, \sqrt{aly} :: ly, x$ ; adunque fatta  $MP = CD$ , se prenderassi  $PH$  eguale alla quarta proporzionale di  $AB$ , della mediana  $AB$ , ed  $AC$ , e della stessa  $AC$ , farà essa  $= x$ , ed il punto  $H$  nella curva. In questo modo si troveranno quanti punti si vogliono, e descriverassi la curva, la quale anderà in infinito, come è facile a conoscere.

Per avere la sottangente della data curva, prendo la formola differenziale  $\frac{ydx}{dy}$  delle sottangenti; differenzio l'equazione della data curva, e trovo  $dx =$

$$\frac{3}{2} l^{\frac{3-2}{2}} y \times \frac{a^{\frac{1}{2}} dy}{y};$$

fatta la sostituzione in luogo di  $dx$ ,

$$\text{averassi essa sottangente} = \frac{3}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times a^{\frac{1}{2}} = \frac{3ax}{2ly} =$$

$$\frac{3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}}{2}$$

ff

Averà

Averà pure la nostra curva un flesso contrario, per ritrovare il quale prendo le seconde differenze della data equazione, supposta  $dx$  costante, e ritrovo

$$\frac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y \times ddy + \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y - \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y}{yy} = 0,$$

e però  $ddy = \frac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y}{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y}$ ; ma per lo

metodo de' flessi contrarj, deve essere  $ddy = 0$ ; adunque farà

$$\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y = 0, \text{ cioè}$$

$l^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} a l^{-\frac{1}{2}} y = 0$ , cioè  $ly = \frac{1}{2} a$ , farà adunque il flesso contrario allora quando sia  $ly = \frac{a}{2}$ .

Se la proposta curva da descriversi sarà  $x lx = y$ , risolta l'equazione in analogia, farà  $1, lx :: x, y$ , e si costruirà in simil modo.

E se fosse  $xx lx = y$ , o pure  $x^3 lx = y$ , o  $x^{\frac{1}{3}} lx = y$ , o più generalmente  $x^n lx = y$ , essendo  $n$  una qualunque potestà intiera o rotta di  $x$ ; risolta istessamente l'equazione nell'analogia  $1, lx :: x^n, y$ , e presa nella logaritmica una qualunque  $CD = x$ , onde sia

$$AC =$$

$AC = lx$ ; il moltiplo di  $AC$  secondo il numero  $n$ , se è intero; il submoltiplo, se è rotto, ci darà la corrispondente ordinata nella logaritmica stessa, che sarà  $x^n$ , per la proprietà della logaritmica.

Che se la curva contenesse quantità, che fossero il logaritmo di logaritmo, come se fosse  $x^n llx = y$ , facilmente si averebbe nella logaritmica la linea espressa per  $llx$  prendendo una qualunque  $CD = x$  (Fig. 43.), onde sia  $AC = lx$ , ed indi posta  $AC$  per ordinata in  $(ac)$ ; imperocchè sarà  $Aa$  il logaritmo di  $(ac)$ , cioè  $llx$ , come ancora è stato avvertito al num. 157.

161. Debba si costruire la curva esponenziale dell'equazione  $x^x = y$ . Adunque prendendo i logaritmi, sarà  $x lx = ly$ . Però descritta (Fig. 45.) la logaritmica  $PAB$  con la sottangente  $AD = 1$ , e presa una qualunque  $CB = DE = x$ , sarà  $DC = lx$ ; adunque poichè l'equazione si risolve nell'analogia  $1, x :: lx, ly$ , il quarto proporzionale di  $AD, BC$ , e  $DC$ , che sia per esempio  $DM$ , sarà  $ly$ ; adunque  $MN = y$ , e però se farassi  $EF = MN$ , sarà  $DE = x, EF = y$ , ed  $F$  un punto della curva da descriversi.

La curva taglierà l'asintoto  $HM$  in  $H$ , fatta  $DH = DA$ ; imperocchè posta  $x = 0$ , sarà  $ly = 0$ , cioè  $y$  eguale alla sottangente  $DA$ . Similmente posta  $x = 1 = DA$ , sarà  $lx = 0$ , e però  $ly = 0$ , cioè  $y = DA$ ; fatta adunque  $AG = DH$ , sarà  $G$  un punto in curva.

ff 2

Dal

Dal punto  $H$  alzando l'applicata  $HP$  alla logaritmica, e conducendo  $POR$  parallela ad  $HD$ , farà  $OR$  la minima ordinata  $y$  alla curva. Imperciocchè differenziando l'equazione, farà  $dx + dx \ln x = \frac{dy}{y}$ , cioè  $y dx +$

$y dx \ln x = dy$ , ma per lo metodo de' massimi, e minimi, deve essere  $dy = 0$ , adunque  $y dx + y dx \ln x = 0$ , e però  $-\ln x = 1 = HD = DA$ .

Essendo  $\frac{y dx}{dy}$  la formola generale della sottangente, e dall'equazione data della curva avendosi  $dx = \frac{dy}{y \times (1 + \ln x)}$ , sostituito questo valore nella formola, farà la sottangente per un qualunque punto della curva  $= \frac{1}{1 + \ln x}$ , e per lo

punto  $G$ , rispetto a cui è  $x = AD$ , ed in conseguenza  $\ln x = 0$ , farà la sottangente  $= 1 = AD$ , sottangente della logaritmica.

Rispetto allo spazio: prendo la formola generale  $y dx$ ; ma  $y = x^x$ , equazione della curva, sostituito adunque nella formola il valore di  $y$ , farà  $x^x dx$ , e però  $\int x^x dx$  lo spazio indefinito  $HOFEADH$ , il quale, integrando per lo num. 159., farà =

$$x + \frac{x x \ln x}{2} - \frac{x x}{4} + \frac{x^3 \ln^2 x}{6} - \frac{x^3 \ln x}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4 \ln^3 x}{24} - \frac{x^4 \ln^2 x}{32} + \frac{x^4 \ln x}{64} \text{ ec.}$$

E

E presa  $x = AD = 1$ , farà  $lx = 0$ , e però lo spazio  
 $HOGAD = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256}$  ec. ,

cioè  $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$  ec.

162. Sia la curva dell'equazione  $xy = a$ , farà  
 $ylx = la$ , e però si potrà costruire per mezzo della  
 logaritmica. Differenziando l'equazione  $ylx = la$ , ave-  
 remo  $\frac{ydx}{x} + dylx = 0$  ( presa la sottangente della loga-  
 ritmica  $= 1$  ), e però farà  $dx = -\frac{xlx dy}{y}$ , adunque  
 la sottangente  $= -xlx$ .

163. Sia  $x^x = ay$ ; adunque  $xlx = yla$ , che si  
 potrà costruire al solito. Prese le differenze, farà  
 $dx + dxlx = dyla$ , e però la sottangente  $= \frac{xlx}{1 + lx}$ .

Ma poichè  $y = \frac{xlx}{la}$ , farà  $ydx$ , cioè l'elemento  
 dello spazio  $= \frac{xlx \times dx}{la}$ , ed integrando per lo num. 154.,

$$\frac{2x x l x - x x}{4 l a} .$$

164. Altre questioni ancora possono proporsi ap-  
 partenenti ad equazioni esponenziali; come, per esem-  
 pio, nelle equazioni esponenziali composte di sole quan-  
 tità

tità cognite, ma con gl'esponenti incogniti, trovare essi esponenti.

Sia adunque  $c^x = ab^{x-1}$ , si dimanda il valore dell'esponente incognito  $x$ , essendo date le  $a, b, c$ ; scrivo  $\frac{c^x}{a} = b^{x-1}$ , adunque farà  $xlc - la = \frac{a-1}{c-1} lb$ , e però  $xlc - xlb = la - lb$ , quindi  $x = \frac{la - lb}{lc - lb}$ .

165. Altra questione farebbe questa. Trovare un numero  $x$  tale, che sia  $x^x = a$ , e  $x^{x+p} = b$ . Adunque per la prima condizione avremo  $xlx = la$ , e però  $x = \frac{la}{lx}$ , o pure  $lx = \frac{la}{x}$ .

Per la seconda condizione avremo  $\frac{x+p}{x} lx = lb$ , e però farà  $x = \frac{lb - plx}{lx}$ , o pure  $lx = \frac{lb}{x+p}$ . Adunque farà  $\frac{la}{x} = \frac{lb}{x+p}$ , cioè  $xla + pla = xlb$ , cioè  $x = \frac{pla}{lb - la}$ , o pure  $\frac{la}{lx} = \frac{lb - plx}{lx}$ , cioè  $lx = \frac{lb - la}{p}$ . Ciò posto, mi faccio a sciogliere il seguente problema.

166. Dato un vaso di nota capacità pieno di un qualunque liquore, che sia per esempio vino, se ne estrarra in un sorso una data quantità, poi si riempia d'acqua il vaso, indi del liquore ora mitto d'acqua, e  
di

di vino, se ne estragga un'altro sorso eguale al primo, e di poi si riempia d'acqua il vaso, e nuovamente si estragga del misto liquore un sorso pure eguale al primo, e così di mano in mano si vada con la stessa legge ripetendo l'operazione: si dimanda, quanti forsi bisognerà prendere, cioè quante volte bisognerà ripetere l'operazione, acciò sia nel vaso una data quantità di vino.

Sia  $= a$  la capacità del vaso, e sia  $= b$  la quantità di cialchedun sorso. Nel primo sorso adunque s'estraerà dal vaso tanta quantità di vino, che farà  $= b$ , ed altrettanto s'infonderà d'acqua, onde dopo il primo sorso farà nel vaso quantità di vino  $= a - b$ .

Nel secondo sorso s'estraerà  $b$  di liquore misto, onde per avere la quantità del puro vino, che in esso sorso s'estrae, si faccia l'analogia: come la capacità del vaso ( $a$ ) sta alla quantità d'un sorso ( $b$ ), così il vino, che è nel vaso, ( $a - b$ ) al quarto  $\frac{ab - bb}{a}$ , farà

esso la quantità del puro vino, che si è estratto nel secondo sorso, rimarrà adunque nel vaso quantità di puro vino  $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$ , cioè  $\frac{a - b}{a}^2$ . Pel terzo sorso

facendo pure l'analogia: come la capacità del vaso ( $a$ ) sta alla quantità d'un sorso ( $b$ ), così il vino, che è nel vaso,  $\left(\frac{a - b}{a}\right)^2$  al quarto  $\frac{a - b}{a} \times \frac{b}{a}$ , farà esso la

quan-



quantità del puro vino, che si è estratto nel terzo forso, rimarrà pertanto nel vaso quantità di puro vino

$\frac{a-b}{a} - \frac{b}{a} \times \frac{a-b}{a}$ , cioè  $\frac{a-b}{aa}$ , e così dopo il quar-

to forso farà nel vaso quantità di puro vino  $\frac{a-b}{a^3}$ , e

generalmente dopo un numero  $n$  di forsi farà nel vaso

quantità di puro vino  $\frac{a-b^n}{a^{n-1}}$ . Se adunque si voglia fa-

pere, quanti forsi debbanfi prendere, acciò nel vaso rimanga una data quantità, che sia per esempio  $\frac{a}{m}$  di

puro vino, faremo l'equazione  $\frac{a-b^n}{a^{n-1}} = \frac{a}{m}$ , la quale,

per essere  $n$  incogita, farà appunto esponenziale. Ridotta per tanto l'equazione ai logaritmi, farà

$$\int \frac{a-b^n}{a^{n-1}} = \int \frac{a}{m}, \text{ cioè } n \log a - b = \log a - \log m + n - 1 \log a,$$

$$\text{o sia } n \log a - b = -\log m + n \log a, \text{ e però } n = \frac{\log m}{\log a - \log a - b};$$

con che farà facile avere il numero  $n$  col mezzo delle tavole logaritmiche.

FINE DEL TERZO LIBRO.

# INSTITUZIONI

ANALITICHE

LIBRO QUARTO

*Del Metodo Inverso delle Tangenti .*



# INSTITUZIONI ANALITICHE LIBRO QUARTO

## *Del Metodo Inverso delle Tangenti .*

1. **P**Oichè , data una qualunque curva , il modo di ritrovare la di lei tangente , sottotangente , normale , o qualunque analoga linea si chiamà *Il Metodo diretto delle Tangenti* ; così , data la tangente , sottotangente , normale , o qualunque analoga linea ; siccome pure data la rettificazione , o lo spazio , il modo di ritrovare quella curva , a cui compete la data proprietà della tangente , dello spazio ec. , si chiama *Il Metodo inverso delle Tangenti* .

Nel secondo , e terzo libro si sono ritrovate le espressioni generali differenziali della tangente , e delle linee analoghe , come pure delle rettificazioni , e degli spazj ; adunque paragonando la proprietà data della tangente , della rettificazione ec. alla rispettiva espressione , o formola generale differenziale , nascerà una equazione differenziale del primo grado , o di grado superiore , la quale integrata , o algebricamente , o supposte le quadrature , ci darà la curva , che si ricerca , ed a

cui compete la data proprietà. Si cerchi, per esempio; la curva la di cui sottotangente debba essere eguale alla doppia affissa. Chiamate le affisse  $x$ , le ordinate  $y$ , la formola della sottotangente è  $\frac{ydx}{dy}$ , adunque farà l'e-

quazione  $\frac{ydx}{dy} = 2x$ . Si cerchi la curva, il di cui spa-

zio debba essere eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate. L'elemento dello spazio è  $ydx$ ; adunque dovrà essere  $\int ydx = \frac{2xy}{3}$ , e però  $ydx = \frac{2x}{3}dy + \frac{2y}{3}dx$ .

Si cerchi la curva, la di cui proprietà sia, che un qualunque arco preso dal vertice sia eguale alla rispettiva sottotangente. L'espressione dell'arco è  $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ;

quella della sottotangente è  $\frac{ydy}{dx}$ ; dunque avremo

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ydy}{dx}, \text{ e però } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ydxddy + dx^2dy^2}{dx^2},$$

(presa per costante  $dx$ ) equazione differenziale del secondo grado.

2. Le equazioni, che in questo modo risultano, averanno sempre, come è facile a vedere, le indeterminate con le differenziali tra loro miste, e confuse, quindi non si fanno per ora maneggiare a fine di passare alle integrazioni, e così avere le curve, che si

cer-

cercano , e molto meno se contengono differenziali secondi , terzi ec. , poichè nell'antecedente terzo libro si sono sempre supposte le formole differenziali essere composte di una sola indeterminata con la sua differenza . Sono adunque necessarj altri ripieghi per tentare di ridurre alle integrazioni , o quadrature tali equazioni , il che si chiama *Costruire le equazioni differenziali del primo , secondo ec. grado* . E quanto a quelle del primo in due maniere si procede ; l'una è di passare alle integrazioni , o quadrature senza alcuna previa separazione delle indeterminate , e loro differenziali ; l'altra di separare prima le indeterminate , e così render le equazioni atte all'integrazioni , o quadrature .

Anderò spiegando varj metodi particolari per ambedue le maniere , co' quali in molte equazioni si ottiene l'intento ; ma moltissime altre se ne incontrano , che si trovano affatto contumaci , almeno coi metodi fin' ora scoperti , i quali non hanno quell'universalità , che sarebbe necessaria .

CAPO

## C A P O I.

*Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado, senza alcuna previa separazione dell'indeterminate.*

3 **L**E più semplici formole, che abbiano le due variabili assieme confuse, sono le due  $x dy + y dx$ , ed  $y dx - x dy$ ; l'integrale della prima è  $xy$ , della seconda  $\frac{yy}{x}$ , come è chiaro. A queste adunque devonsi procura-

re di ridurre le più composte, e ciò con i soliti ajuti della semplice Analisi, aggiungendo, sottraendo, moltiplicando, dividendo ec. per quelle quantità, che fanno al proposito, le quali varie faranno, secondo i varj casi. Se ne vegga ora la pratica.

Sia  $y dx = x dx - x dy$ , trasportato all'altra parte il termine ultimo, sarà  $y dx + x dy = x dx$ , e però  $xy = \frac{xx \pm bb}{2}$ . Sia l'equazione  $x^2 dy^2 + 2x^3 y dx dy = a^2 dx^2 -$

$xxyy dx^2$ , cioè  $x^2 dy^2 + 2x^3 y dx dy + xxxyy dx^2 = a^2 dx^2$ , e dividendo per  $xx$ ,  $xx dy^2 + 2xy dx dy + yy dx^2 = \frac{a^2 dx^2}{xx}$ ,

e cavando la radice quadrata,  $x dy + y dx = \frac{a dx}{x}$ , ed in-

tegran-

tegrando,  $xy = a \log x \pm b$  nella logaritmica della sottrattente  $= a$ . Sia l'equazione  $ydx = y^r dy + yydy + xdy$ , cioè  $ydx - xdy = y^r dy + yydy$ . Il primo membro sarebbe integrabile, se fosse diviso per  $yy$ , divido adunque l'equazione, onde sia  $\frac{ydx - xdy}{yy} = ydy + dy$ , ed inte-

grando,  $\frac{x}{y} = \frac{yy}{2} + y \pm b$ .

4. Sia l'equazione  $y^r dy = mydx + xdy$ . Se non vi fosse il coefficiente  $m$ , la cosa sarebbe facile, poichè l'integrale del secondo membro sarebbe  $xy$ . Non riuscirà l'operazione nè meno trasportando il membro  $x dy$  nella parte opposta dell'equazione, cioè scrivendo  $y^r dy - xdy = mydx$ ; osservo pertanto, che il differen-

ziale di  $mxy^{\frac{1}{m}}$  si è  $my^{\frac{1}{m}} dx + xy^{\frac{1}{m}-1} dy$ , diverso dal proposto  $mydx + xdy$  in questo solo, che è moltiplicato per  $y^{\frac{1}{m}-1}$ ; per rendere adunque integrabile la quantità

$mydx + xdy$ , basta moltiplicarla per  $y^{\frac{1}{m}-1}$ , ed a fine di conservare l'egualità, moltiplicare altresì il corrispondente membro  $y^r dy$  dell'equazione, e però sarà

$$y^{r+\frac{1}{m}-1} dy = my^{\frac{1}{m}} dx + xy^{\frac{1}{m}-1} dy, \text{ ed integrando,}$$

$$\int y^{r+\frac{1}{m}-1} dy = mxy^{\frac{1}{m}} \pm b.$$

Sia



Sia la medesima equazione, ma con coefficiente diverso a ciascuno degl'ultimi due termini, cioè  $y^r dy = mydx + nxdy$ . Il secondo membro non è integrabile;

osservo però, che il differenziale di  $mxy^{\frac{n}{m}}$  si è

$my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n-1}{m}} dy$ , adunque l'omogeneo di comparazione farebbe integrabile, se fosse moltiplicato per

$y^{\frac{n-1}{m}}$ ; moltiplico per tanto tutta l'equazione, e farà

$y^{r+\frac{n-1}{m}} dy = my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n-1}{m}} dy$ , e l'integrale farà

$$\int y^{r+\frac{n-1}{m}} dy = mxy^{\frac{n}{m}} \pm b.$$

5. Il differenziale di  $x^ny$  è  $x^ndy + nyx^{n-1}dx$ . Ciò posto, sia l'equazione  $y^r dy = x^ndy + yx^{n-1}dx$ ; se l'ultimo termine avesse il coefficiente  $n$ , l'integrale del secondo membro dell'equazione farebbe  $x^ny$ . Osservo però, che il differenziale di  $x^ny^n$  si è  $nx^ny^{n-1}dy + ny^n x^{n-1}dx$ ; adunque moltiplicando l'equazione per  $ny^{n-1}$ , onde sia  $ny^{r+n-1}dy = nx^ny^{n-1}dy + ny^n x^{n-1}dx$ , si trova integrabile, e l'integrale è  $\int ny^{r+n-1} dy = x^ny^n \pm b$ .

Ma se l'ultimo termine in vece del coefficiente  $n$  ne avesse un'altro, anzi generalmente, se ambedue i termini ultimi fossero affetti da coefficienti diversi; co-

me

me se l'equazione fosse  $y^r dy = cx^n dy + eyx^{n-1} dx$ ; of-

fervo, che il differenziale di  $\frac{c}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}}$  si è

$cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$ ; adunque moltiplicando l'e-

quazione per  $y^{\frac{cn}{e}-1}$ , onde sia

$y^{\frac{r+cn}{e}-1} dy = cx^n y^{\frac{cn}{e}} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$ , sarà integra-

bile, e l'integrale sarà  $\int y^{\frac{r+cn}{e}-1} dy = \frac{c}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}} \pm b$ .

Facciasi  $r=1, c=3, n=1, e=1$ , cioè l'equazione  $y dy = 3x dy + y dx$ ; l'integrale sarà  $y^4 = xy^3$ .

Facciasi  $c=2, e=3, n=1, r=1$ , cioè l'equazione  $y dy = 2x dy + 3y dx$ , l'integrale sarà  $y^{\frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$ , cioè

$\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$ . Facciasi  $c=2, e=2, n=3, r=3$ , cioè l'equazione  $y^3 dy = 2x^3 dy + 2yx^2 dx$ , l'integrale sarà  $y^6 = \frac{2}{3} x^3 y^3$ .

Se l'equazione fosse espressa così  $y^{\frac{1-cn}{e}} x^r dx = cx^n dy + eyx^{n-1} dx$ , è chiaro a vedere, che sarebbe in-

h h tegr-

tegrabile, poichè moltiplicata per  $y^{\frac{cn-1}{c}}$  farebbe  $x^r dx =$   
 $cx^n y^{\frac{cn-1}{c}} dy + ey^{\frac{cn}{c}} x^{n-1} dx$ , ma l'integrale del secondo  
 membro si è veduto, essere  $\frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{c}}$ , adunque ec.

6. Sia ora l'equazione  $y^r dy = \frac{2xy dy - y dx}{xx}$ . Se non  
 vi fosse il coefficiente 2, l'integrale del secondo mem-  
 bro sarebbe  $\frac{y}{x}$ . Ma non perciò servirà trasportare alla  
 opposta parte il termine  $x dy$ , e scrivere  $y^r dy - \frac{x dy}{xx} =$   
 $\frac{x dy - y dx}{xx}$ ; osservo però, che il differenziale di  $\frac{yy}{x}$  si è  
 $\frac{2xy dy - yy dx}{xx}$ , dunque se si moltiplicherà l'equazione  
 proposta per  $y$ , onde sia  $y^{r+1} dy = \frac{2xy dy - yy dx}{xx}$ , farà  
 integrabile, e l'integrale sarà  $\int y^{r+1} dy = \frac{yy}{x} \pm b$ . Ma  
 più generalmente sia un qualunque coefficiente  $n$ , e  
 però l'equazione  $y^r dy = \frac{nxy dy - y dx}{xx}$ . Osservo, che il  
 differenziale di  $\frac{y^n}{x}$  è  $\frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$ , adunque se si  
 moltiplicherà l'equazione per  $y^{n-1}$ , onde sia  
 $y^{r+n-1} dy = \frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$ , farà integrabile, e  
 l'in-

l'integrale sarà  $\int y^{r+n-1} dy = \frac{y^n}{n} \pm b$ .

Anzi abbiano ambi gli ultimi due termini coefficiente diverso, e sia l'equazione  $y^r dy = \frac{nx dy - my dx}{xx}$ .

Osservo, che il differenziale di  $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$  si è

$\frac{nx y^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$ ; adunque se si moltiplicherà l'e-

quazione per  $y^{\frac{n-1}{m}}$ , onde sia  $y^{r+\frac{n-1}{m}} dy =$

$\frac{nx y^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$ , sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int y^{r+\frac{n-1}{m}} dy = \frac{my^{\frac{n}{m}}}{x} \pm b.$$

Se l'equazione fosse  $y^{1-\frac{n}{m}} x^r dx = \frac{nx dy - my dx}{xx}$ ,

sarebbe pure integrabile, poichè moltiplicata per  $y^{\frac{n-1}{m}}$

sarà  $x^r dx = \frac{nx y^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$ ; ma l'integrale del

secondo membro si fa, essere  $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$ , dunque ec.

Alle suddette equazioni manchi il denominatore  $xx$ , e sia l'equazione  $y^r dy = nxdy - ydx$ . Per sommare la seconda parte dell'equazione, bisognerebbe moltiplicarla per  $y^{n-1}$ , e dividerla per  $xx$ ; ma ciò dovendosi fare anche rispetto alla prima parte, sarebbe essa  $\frac{y^{r+n-1} dy}{xx}$ , che in nessuna maniera si può som-

mare; adunque si mutino i segni all'equazione, e farà  $-y^r dy = ydx - nxdy$ . Osservo, che il differenziale di  $\frac{x}{y^n}$  si è  $\frac{y^n dx - nxy^{n-1} dy}{y^{2n}}$ ; adunque se si moltiplicherà l'equazione per  $y^{n-1}$ , ed indi se si dividerà per  $y^{2n}$ , onde sia  $-\frac{y^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{y^n dx - nxy^{n-1} dy}{y^{2n}}$ ,

farà integrabile, e l'integrale farà

$$\int -\frac{y^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{x}{y^n} \pm b.$$

Abbia l'equazione ambi gli ultimi due termini con il coefficiente, e sia  $y^r dy = nxdy - mydx$ . Si mutino i segni, e farà  $-y^r dy = mydx - nxdy$ ; osservo, che il

differenziale di  $\frac{x}{my^{\frac{n}{m}}}$  è  $\frac{my^{\frac{n}{m}} dx - nxy^{\frac{n}{m}-1} dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$ ; adunque

se si moltiplicherà l'equazione per  $y^{\frac{n}{m}}$ , e si dividerà

per

per  $mmy^{\frac{2n}{m}}$ , onde sia  $\frac{r + \frac{n-1}{m}}{mmy^{\frac{2n}{m}}} dy =$

$\frac{my^{\frac{n}{m}} dx - nxy^{\frac{n-1}{m}} dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$ , farà integrabile, e l'integrale farà

$$\int \frac{my^{\frac{n}{m}} dx - nxy^{\frac{n-1}{m}} dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}} = \frac{x}{my^{\frac{n}{m}}} \pm b.$$

7. Sia l'equazione  $y^r dy = x^n dy - nyx^{n-1} dx$ . Si mutino i segni, e farà  $-y^r dy = nyx^{n-1} dx - x^n dy$ ; osservo, che il differenziale di  $\frac{x^n}{y}$  è  $\frac{nyx^{n-1} dx - x^n dy}{yy}$ ,

dunque dividendo l'equazione per  $yy$ , onde sia

$\frac{-y^{r-2} dy = nyx^{n-2} dx - x^n dy}{yy}$ , farà integrabile, e

farà l'integrale  $\int \frac{-y^{r-2} dy = x^n \pm b}{y}$ .

Ma se mancasse il coefficiente  $n$ , e l'equazione fosse  $y^r dy = x^n dy - yx^{n-1} dx$ ; si mutino i segni, e farà  $-y^r dy = yx^{n-1} dx - x^n dy$ . Osservo, che il differenziale di  $\frac{x^n}{y^n}$  è  $\frac{ny^n x^{n-1} dx - nx^n y^{n-1} dy}{y^{2n}}$ ; dunque

moltiplicando l'equazione per  $ny^{n-1}$ , e dividendola

per

per  $y^{2n}$ , onde sia  $\frac{-ny^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{ny^n x^{n-1} dx - nx^n y^{n-1} dy}{y^{2n}}$ ,

farà integrabile, e l'integrale sarà  $\int \frac{-ny^{r+n-1} dy}{y^{2n}} =$

$$\frac{x^n \pm b}{y^n}$$

Che se in luogo del coefficiente  $n$  ve ne fosse un'altro di natura diversa; anzi se ambi gl'ultimi termini fossero affetti da coefficiente diverso, come se l'equazione fosse  $y^r dy = cx^n dy - eyx^{n-1} dx$ , si mutino i segni, e sarà  $-y^r dy = eyx^{n-1} dx - cx^n dy$ . Osservo, che il dif-

ferenziale di  $\frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}}$  è  $\frac{ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1} dx - ncy^n y^{\frac{nc}{e}-1} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$ ;

dunque moltiplicando l'equazione per  $ny^{\frac{nc}{e}}$ , e divi-

dendola per  $eey^{\frac{2nc}{e}}$ , onde sia  $\frac{-ny^{r+\frac{nc}{e}-1} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} =$

$\frac{ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1} dx - ncy^n y^{\frac{nc}{e}-1} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$ , farà integrabile, e l'in-

tegrale sarà  $\int \frac{-ny^{r+\frac{nc}{e}-1} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} = \frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}} \pm b$ .

Ma

Ma se l'equazione fosse espressa così  $y^{\frac{nc}{c}} x^r dx = cx^n dy - cyx^{n-1} dx$ ; senza mutare i segni osservo, che il differenziale di  $\frac{ey^{\frac{nc}{c}}}{x^n}$  si è  $\frac{ncx^n y^{\frac{nc}{c}} dy - ney^{\frac{nc}{c}} x^{n-1} dx}{x^{2n}}$ ;

dunque moltiplicando l'equazione per  $\frac{ny^{\frac{nc}{c}}}{x^{2n}}$ , e dividendola per  $x^{2n}$ , onde sia  $\frac{nx^r dx}{x^{2n}} =$

$\frac{ncx^n y^{\frac{nc}{c}} dy - ney^{\frac{nc}{c}} x^{n-1} dx}{x^{2n}}$ , farà integrabile, e farà

l'integrale  $\int \frac{nx^r dx}{x^{2n}} = ey^{\frac{nc}{c}} \pm b$ .

8. È stato detto da me al num. 17. dell'antecedente libro, che ogni qual volta il numeratore d'una frazione composta di una sola indeterminata, e delle costanti, sia il differenziale preciso del denominatore, o pure un proporzionale di esso differenziale, l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o il proporzionale di esso logaritmo. Ciò vale per tante anche quando la formola contenga due indeterminate fra se mille coi loro differenziali. L'integrale adunque di  $\frac{dx + dy}{x + y} = dz$  ( $dz$  è in qualunque modo data per  $x$ , o

per



per  $y$ ) farà  $\int \frac{dx + dy}{2x + 2y} = dz$

farà  $\int \frac{4xdx - 4ydy}{xx - yy} = dz$

farà  $\int \frac{2lxx - yy}{2xy - 2yy} = z \pm b$ . L'integrale di

$\int \frac{xdy + ydx - 2ydy}{2xy - 2yy} = dz$  farà  $\int \frac{l \sqrt{xy - yy}}{2xy - 2yy} = z \pm b$ . E

generalmente l'integrale di

$\int \frac{my^n x^{m-1} dx + nx^m y^{n-1} dy - m-n \sqrt{xy^{m+n-1}} dy}{r \sqrt{x^m y^n - y^{m+n}}} = dz$

farà  $\int \sqrt{x^m y^n - y^{m+n}} = z \pm b$ ; e così di qualunque altra equazione, che abbia la assegnata condizione.

9. Molte equazioni però, sebbene non anno la necessaria condizione, possono facilmente con gli ajuti dell'algebra ridursi ad averla. Così l'equazione  $\frac{xdy + ydx}{x} = -\frac{dy}{y}$

non à nel primo membro la condizione, che si ricerca; l'avrà però, se si divida per  $y$ , onde sia

$\frac{xdy + ydx}{xy} = -\frac{dy}{y}$ , e però integrando,  $\int \frac{xdy + ydx}{xy} = \int -\frac{dy}{y} = \pm lb$ .

Sia l'equazione  $axdy + 2aydx = xydy$ ; la divido per  $axy$ , e farà  $\frac{xdy + 2ydx}{xy} = \frac{dy}{y}$ , la quale sarebbe integrabile, se nel secondo termine del primo membro non

vi fosse il coefficiente 2, sottraggo adunque la quantità  $ydx$  dall'uno, e dall'altro membro, e farà  $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{a} - \frac{ydx}{xy}$ , cioè  $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{a} - \frac{dx}{x}$ , e però integrando,  $\int xy = \frac{y}{a} - \int x \pm \int b$ .

Sia l'equazione  $yx dx = \frac{xx y dy + y^3 dy}{y} \vee y - yy dy$ , la divido per  $y$ , e farà  $x dx = \frac{xx dy + yy dy}{y} \vee y - y dy$ , cioè  $x dx + y dy = \frac{xx dy + yy dy}{y} \vee y$ , e di nuovo dividendo per  $xx + yy$ ,  $\frac{x dx + y dy}{xx + yy} = dy \vee y$ , ed integrando,

$$\int \frac{dx}{xx + yy} = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \pm b.$$

10. Dalli numeri 31., e 32. dello stesso sopra citato libro terzo si ricava, che una qualunque formola composta di una sola variabile, se farà il prodotto di qual si sia quantità complessa elevata a potestà positiva, o negativa, intera, o rotta nel differenziale preciso, o nel proporzionale del differenziale de' termini della quantità, sarà sempre integrabile, e l'integrale farà la stessa quantità, il di cui esponente sia quello di prima, ma accresciuto dell'unità, e moltiplicato nello stesso esponente così accresciuto, ma inversamente preso; cioè, che è lo stesso, per esso divisa; o pure esso integrale farà un proporzionale di questo. Nulla meno vale la

regola , quando le formole differenziali sieno ancora composte di due variabili , e loro differenziali promiscuamente , purchè abbiano la notata condizione .

L'integrale adunque di  $\overline{dx + dy} \sqrt{x+y} = dz$  (  $dz$  è in qualunque modo data per  $x$  , o per  $y$  ) farà

$\frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$  . L'integrale di

$\frac{1}{2} \overline{dx + \frac{1}{2} dy} \sqrt{x+y} = dz$  farà  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$  ,

cioè  $\frac{1}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$  . L'integrale di  $\frac{z adx + z bdy}{\sqrt{ax + by}} = dz$

farà  $4\sqrt{ax + by} = z \pm b$  . L'integrale di

$\frac{p^3 dq + 3qppdp + 3pqqdq + q^3 dp}{2\sqrt{p^3 q + q^3 p}} = dz$  farà  $\sqrt{p^3 q + q^3 p} = z \pm b$  .

L'integrale di  $\overline{xdy + ydx + 2ydy} \times b \times \overline{xy + yy}^{\frac{n}{m}} = dz$  farà  $\frac{mb}{m+n} \times \overline{xy + yy}^{\frac{m+n}{m}} = z \pm b$  . L'integrale di

$\frac{xdy + ydx + 2ydy}{b \times \overline{xy + yy}^{\frac{n}{m}}} = dz$  farà  $\frac{m \times \overline{xy + yy}^{\frac{m-n}{m}}}{m-n \times b} = z \pm b$  .

E così di mille altre di simil sorta .

Tal

Tal ora però avranno le equazioni bisogno prima di qualche preparazione. Sia l'equazione  $xxdx + xydy + yydx = dz$ , ( $dz$  è data in qualunque modo per  $x$ ) la moltiplico per  $x$ , e farà  $x^3dx + xxxydy + yyxdx = xdz$ , cioè  $xdx \times \overline{xx + yy} + ydy \times xx = xdz$ , che non à la condizione necessaria; l'avrebbe però, se  $ydy$  fosse altresì moltiplicata in  $yy$ , aggiungo adunque all'uno, ed all'altro membro il termine  $y^3dy$ , e farà  $xdx \times \overline{xx + yy} + ydy \times xx + y^3dy = xdz + y^3dy$ , cioè  $\overline{xdx + ydy} \times \overline{xx + yy} = xdz + y^3dy$ , capace d'integrazione, e però integrando,

$$\frac{xx + yy}{4} = \frac{y^4}{4} \pm b + \int xdz.$$

Ma non è così facile a riconoscere, quale quantità debba aggiungerfi, o sottrarfi, o quale altra alterazione possa farsi alle equazioni, a fine di renderle capaci del suddetto metodo, così che quando le equazioni sieno alquanto composte, l'arrivare in questo modo al fine si potrà dire una fortuna, un caso; quindi in tali incontri bisognerà ricorrere ai metodi della separazione delle indeterminate, e però sia

## C A P O I I.

*Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado per mezzo della precedente separazione delle Indeterminate .*

II. **DI** alcune equazioni , quantunque pochissime , succede la separazione delle indeterminate con le sole operazioni prime dell'algebra ordinaria . Tale sarebbe l'equazione  $xxdx^2 + xydx dy = aady^2$  , in cui osservo , che il primo membro è una formola di quadratica affetta dal lato , che sarebbe un quadrato , se vi fosse di più la quantità  $yydy^2$  . Aggiungo per tanto all'uno , ed all'altro membro la quantità  $\frac{yvdy^2}{4}$  , e l'equazione farà  $xxdx^2 + xydx dy + \frac{yvdy^2}{4} = aady^2 + \frac{yydy^2}{4}$  , ed estraendo la radice ,  $xdx + \frac{ydy}{2} = dy \sqrt{\frac{yy}{4} + aa}$  , in cui sono separate le variabili , e però integrando ,  $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} = \int dy \sqrt{\frac{aa + yy}{4}} \pm b$  . L'integrale del secondo membro dipende dalla quadratura dell'iperbola .

12. Il più delle volte adunque conviene servirsi delle sostituzioni . Sia l'equazione  $aadx = xx dy + 2xy dy + yy dy$  . Si ponga  $x + y = z$  , ( la  $z$  è una nuova indeterminata ) e però  $dx + dy = dz$  , ed  $xx + 2xy + yy = zz$  . Fatte adunque le sostituzioni , farà  $aadz - aady = zz dy$  , cioè  $\frac{aadz}{aa + zz} = dy$  , equazione , in cui sono separate le variabili .

L'integrale del primo membro dipende dalla rettificazione del circolo .

Sia l'equazione  $\frac{xdy + ydx \sqrt{a^2 - xxyy}}{\sqrt{xx + yy} \sqrt{xx + yy}} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy} \sqrt{xx + yy}}$  . Osservo nel primo membro ,

che l'integrale di  $xdy + ydx$  si è  $xy$  , e che il quadrato di questo integrale si trova precisamente nella quantità  $\sqrt{a^2 - xxyy}$  ; adunque se porrò  $xy = z$  , nel primo membro faranno separate le variabili , e farà esso  $dz \sqrt{a^2 - zz}$  . Osservo in oltre , che nel secondo membro l'integrale di  $xdx + ydy$  è  $\frac{xx + yy}{2}$  , e che simili a questo integrale

sono le quantità nel denominatore ; adunque con la sostituzione di  $xx + yy = 2p$  si separeranno le indeterminate anche nel secondo membro , e l'equazione farà

$$dz \sqrt{a^2 - zz} = \frac{dp}{\sqrt{2p} \sqrt{2p}} .$$

Sia

Sia l'equazione  $\frac{2xdy - 2ydx}{x - y} = dz$  ( la  $dz$  è data in

qualsivoglia modo per  $x$ , o per  $y$  ). L'integrale di  $xdy - ydx$  si averà quando si divida per  $xx$ , e farà  $\frac{y}{x}$ .

Suppongasi adunque  $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$ , e però  $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dp}{a}$ , e

$2xdy - 2ydx = \frac{2xxdp}{a}$ . Fatta per tanto la sostituzione,

farà  $\frac{2xxdp}{a \times xx - 2xy + yy} = dz$ , e dividendo il numera-

tore, e denominatore del primo membro per  $xx$ , farà  $\frac{2dp}{a \times 1 - \frac{2y}{x} + \frac{yy}{xx}} = dz$ ; ma si è posto  $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$ , ed  $\frac{yy}{xx} = \frac{pp}{aa}$ ,

adunque farà  $\frac{2adp}{aa - 2ap + pp} = dz$ ; e giacchè l'integrale

di questa equazione è algebraico, anderò avanti per l'integrazione; e però sia  $a - p = q$ , adunque  $-\frac{2adq}{q} = dz$ ,

ed integrando,  $\frac{2a \pm b}{q} = z$ . Ma  $q = a - p$ , e  $p = \frac{ay}{x}$ ,

e però  $q = \frac{ax - ay}{x}$ ; restituito per tanto questo valore,

farà  $\frac{2x \pm b}{x - y} = z$ , che è la curva dell'equazione diffe-

renziale proposta. Se in luogo di fare  $a - p = q$ , si avesse fatto

fatto  $p - a = q$ , averebbesi trovato altro integrale, ma diverso solo ne' segni.

13. La sopra scritta equazione mi porge occasione di fare una importante avvertenza; ed è, che le curve non solo mutano tal ora natura nel prendere le sommatorie, o semplicemente, o coll'addizione della costante, il che è stato notato fino dalla prima origine delle quantità infinitesime, ma alle volte ci si presentano pure formole tali, che ammettono integrazioni affatto diverse, e ci somministrano curve di vario genere anche senza aggiungere costante alcuna, il che merita qualche riflesso.

Per mezzo della supposizione  $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$  è stata integrata l'equazione  $\frac{2xdy - 2ydx}{x - y} = dz$ , e l'integrale si è

trovato, essere  $\frac{2x}{x - y} = z$ , ommessa la costante. Faccio

ora la supposizione di  $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$ , e tento l'integrazione; farà dunque  $\frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{dp}{a}$ , e però  $2xdy - 2ydx = -2yydp$ , e sostituendo, farà l'equazione

$$\frac{a \times \frac{xx - 2x + 1}{yy}}{y} = dz;$$

ma



ma  $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$ , dunque  $\frac{-2adp}{pp-2ap+aa} = dz$ ; e fatta

$p-a=q$ ,  $-\frac{2adq}{qq} = dz$ , ed integrando,  $\frac{2a}{q} = z$ ; quin-

di restituiti i valori,  $\frac{2y}{x-y} = z$ , integrale della proposta

equazione differenziale, e diverso dal primo.

Altro integrale della proposta formola diverso dai primi due si è  $\frac{x+y}{x-y} = z$ ; ed in fatti differenziando,

farà  $\frac{x dx - y dx + x dy - y dy - x dx - y dx + x dy + y dy}{x-y} = dz$ ,

e cancellati i termini, che si elidono,  $\frac{2x dy - 2y dx}{x-y} = dz$ ,

che è l'equazione da prima proposta.

Sia  $dz = dy$ , e la proposta equazione  $\frac{2x dy - 2y dx}{x-y} = dy$ .

Se mi servo del secondo integrale ritrovato, nasce l'equazione  $\frac{2y}{x-y} = y$ , e perciò  $2+y=x$ , luogo al triangolo.

Se poi mi servo del primo, e del terzo integrale ponendo  $\frac{2x}{x-y} = y$ , ovvero  $\frac{x+y}{x-y} = y$ , la curva è del

secondo grado.

Ge-

Generalmente sia  $\frac{2xdy - 2ydx}{x-y} = y^m dy$ . Adoperata

la prima, e la terza integrazione, la curva indinasciente monter  al grado  $m+2$ , mentre sia  $m$  numero positivo; fatto uso della seconda, la curva resterr  un passo addietro.

14. Ma oltre che n  meno il metodo delle sostituzioni   universale, la maggiore difficult  si  , che per lo pi    molto difficile il sapere, quale sostituzione debba farsi, per non operare a caso, e gittare molta fatica inutilmente. Tuttavia per  si procederr  con la totale sicurezza in tutte quelle equazioni, nelle quali la somma degli esponenti dell'incognite sia la stessa per ciascun termine, e succeder  sempre la separazione delle indeterminate; n  importa che sieno esse equazioni affette di radicali, o di frazioni, o di serie, e che i coefficienti, e segni sieno in qualunque maniera. La sostituzione da farsi in tutte queste equazioni far  col porre una delle variabili eguale al prodotto dell'altra in una nuova variabile di modo, che se l'equazione   data per  $x$ , ed  $y$ , si faccia  $x = \frac{yz}{a}$ , o pure  $y = \frac{xz}{a}$ ;

(per lo denominatore  $a$  si intenda una qualunque costante a piacere) e per   $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$ , e fatte le so-

stituzioni, si arriver  ad un'altra equazione, la quale  
k k
far 

farà sempre divisibile per tanta potestà dell' indeterminata  $x$ , quanta era la somma degl' esponenti di  $x$ , ed  $y$  in ogni termine dell' equazione proposta, quindi fatta la divisione, la lettera  $x$  non oltrepasserà la prima potestà, e farà sempre moltiplicata in  $dz$ , onde si ridurrà l' equazione in modo, che da una parte vi sia  $\frac{dx}{x}$ ,

e dell' altra  $dz$  con le sole funzioni di  $z$ , e così faranno separate le variabili. Imperciocchè chiamando  $A$  tutti que' termini, che sono moltiplicati nella  $dy$ , e  $B$  quelli, che sono moltiplicati nella  $dx$ , l' equazione sarà  $A dy = B dx$ , e le  $A$ ,  $B$  sono date promiscuamente per  $x$ , ed  $y$ . Ora poichè le dimensioni della lettera  $y$  assieme con le dimensioni della lettera  $x$  in ogni termine fanno lo stesso numero, se in luogo di  $y$  si porrà  $\frac{xz}{a}$ , ne verrà, che in ciascun termine delle quantità

$A$ ,  $B$  la lettera  $x$  abbia la stessa dimensione, che prima avevano  $x$ , ed  $y$  assieme; per lo che, se questa dimensione si chiamerà  $n$ , l' equazione sarà divisibile per  $x^n$ , rimanendo solo  $z$ ,  $a$ ,  $dy$ ,  $dx$ . Suppongasì, che dopo la sostituzione di  $\frac{xz}{a}$ , e dopo la divisione per  $x^n$

ciò, che rimane nella quantità  $A$ , sia  $C$ ; e ciò, che rimane nella quantità  $B$ , sia  $D$ ; farà l' equazione  $C dy = D dx$ , e le  $C$ ,  $D$  sono date per  $z$ , e per le costanti, ma

$dy =$

$dy = \frac{xdz + zdz}{a}$ ; adunque farà l'equazione  $\frac{Cxdz + Czdz}{a} = Ddx$ , cioè  $Dadx - Czdx = Cxdz$ , e però  $\frac{dx}{x} = \frac{Cdz}{Da - Cz}$ , e così le indeterminate coi loro differenziali faranno separate, e l'equazione costruibile, almeno per le quadrature.

E' indifferente il porre  $y = \frac{zx}{a}$ , o pure  $x = \frac{yz}{a}$ ,

poichè si nell'una, come nell'altra maniera si separano sempre le indeterminate; ma alle volte una sostituzione piuttosto, che l'altra ci darà l'equazione più semplice, e di minori termini, o la costruzione più facile, e più elegante; quindi non farà mal fatto il provarle tutte due, ed in fine appigliarsi a quella, che riuscirà la migliore.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione  $xxdy = yydx + xydx$ . Pongo  $y = \frac{xz}{a}$ ,

e però  $dy = \frac{xdz + zdz}{a}$ ; fatte le sostituzioni, farà

$$\frac{x^3 dz + zxxdz}{a} = \frac{xxzdx}{aa} + \frac{zxxdx}{a}$$

e riducendo al comun denominatore, e dividendo per  $xx$ , farà  $axdz + azdz = zdx + azdx$ , cioè  $axdz = zdx$ , e  $\frac{dx}{ax} = \frac{dz}{az}$ .

kk 2

ESEM-

## ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $xxdy = yydx + xx dx$ . Posta  $y = \frac{xz}{a}$ ,  
 $dy = \frac{x dz + z dx}{a}$ , e fatte le sostituzioni, farà  $\frac{x^3 dz + zxx dx}{a}$  =  
 $\frac{zxx dx + xx dx}{aa}$ , e riducendo al comun denominatore,  
e dividendo per  $xx$ , farà  $axdz + azdx = zdx + aadx$ ,  
cioè  $zdx - azdx + aadx = axdz$ , e però  $\frac{dx}{x} =$   
 $\frac{adz}{zz - az + aa}$ . Facendo poi l'altra sostituzione  $x = \frac{yp}{a}$ ,  
e  $dx = \frac{ydp + pdy}{a}$ , farà  $\frac{ppyydy}{aa} = \frac{y^3 dp + ppydy}{a} +$   
 $\frac{y^3 ppdp + p^3 yydy}{a^3}$ , e dividendo per  $yy$ ,  $appdy = aaydp +$   
 $aapdy + yppdp + p^3 dy$ , cioè  $appdy - aapdy - p^3 dy =$   
 $aaydp + yppdp$ , e però  $\frac{dy}{y} = \frac{aadp + ppdp}{app - aap - p^3}$ .

ESEM-

## ESEMPIO III.

Sia l'equazione  $dy \sqrt{xx + yy} = ydx$ . Posta  $y = \frac{xz}{a}$ ,  
e  $dy = \frac{xdz + zdz}{a}$ , e fatte le sostituzioni, farà

$$\frac{xdz + zdz}{a} \sqrt{\frac{xxzz + aaxx}{a}} = \frac{zxdx}{a}, \text{ cioè}$$

$$\frac{xxdz + zxdx}{a} \sqrt{aa + zz} = azxdx, \text{ e dividendo per } x,$$

$$xdz \sqrt{aa + zz} + zdz \sqrt{aa + zz} = azdx, \text{ o sia}$$

$$xdz \sqrt{aa + zz} = azdx - zdz \sqrt{aa + zz}, \text{ e però}$$

$$\frac{dz \sqrt{aa + zz}}{az - z \sqrt{aa + zz}} = \frac{dx}{x}. \text{ Se avessi posto } x = \frac{yp}{a}, \text{ avrei}$$

$$\text{avuta l'equazione } \frac{dy}{y} = \frac{dp}{\sqrt{aa + pp} - p}.$$

15. Ma alle volte i differenziali medesimi  $dx$ , e  $dy$  ascendono a dimensioni più alte, essendovi per altro nelle equazioni la condizione espressa di sopra. In questi casi la sostituzione, come prima, fatta di  $\frac{xz}{a}$  in

luogo della  $y$  (lasciando per ora intatta la  $dy$ ) renderà ogni termine dell'equazione divisibile per la stessa potenza di  $x$ , e vi resteranno solo nell'equazione  $z$ ,  $dx$ ,

e

e  $dy$  con le costanti date, ed assunte, ma non più la  $x$ .  
Ora perchè in luogo pure di  $dy$  si deve porre  $\frac{zdx + xdz}{a}$ ,

con che di nuovo si introduce la lettera  $x$ , si faccia  $\frac{x dz}{a} = dt$ , ed in luogo di  $dy$  si scriva  $\frac{zdx + a dt}{a}$ , e l'e-

quazione averà solamente  $x$ ,  $dt$ ,  $dx$  con le costanti date, ed assunte, ma non più  $x$ . Si faccia  $a, u :: dx, dt$ , ed in luogo di  $dt$  si ponga da pertutto  $\frac{u dx}{a}$ , ne

verrà un'equazione libera dalle quantità differenziali; in cui si avranno le sole  $u, z$ , e le costanti per una curva algebrica. Per mezzo di questa curva si troveranno i valori reali della  $u$ ; sieno adunque questi  $A, B, C$  ec. in modo, che sia  $u = A, u = B, u = C$  ec., faranno  $A, B$  ec. date solamente per  $z$ , e per le costanti, e farà  $dx = \frac{a dt}{A}, dx = \frac{a dt}{B}$  ec., e perchè  $dt =$

$\frac{x dz}{a}$ , farà  $dx = \frac{x dz}{A}, dx = \frac{x dz}{B}$  ec.; onde finalmente

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}, \frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$  ec., ed i logaritmi della  $x$  faranno di-

rettamente proporzionali agli spazj compresi dalle curve, delle quali le assisse essendo  $z$ , le ordinate sieno reciprocamente proporzionali ai valori di sopra ritrovati della quantità  $u$ , e tante faranno le curve, che soddisfaranno, quanti faranno i valori reali fra se diversi

della

della lettera  $u$ , avvertendo però, che l'aggiungere la costante nelle integrazioni delle equazioni  $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$ ,

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$  ec. può nuovamente diversificare le curve,

che soddisfanno al quesito, e raddoppiare spesse volte il numero loro. Sarà dunque  $1x =$  allo spazio di quella curva, che abbia per assisa  $z$ , e per ordinata  $\frac{1}{A}$ ,

$\frac{1}{B}$  ec., cioè eguale all'integrale di  $\frac{dz}{A}$ ,  $\frac{dz}{B}$  ec.; quindi

prendendo  $z$  arbitraria, il logaritmo della  $x$  sarà dato, e per conseguenza anche data la corrispondente  $x$  ordinata nella logaritmica. Data adunque la  $x$ , per mezzo dell'equazione  $y = \frac{xz}{A}$ , sarà anche data la  $y$ , cioè

ambe le coordinate dell'equazione differenziale proposta, o sia della curva, che si cerca. A misura de' diversi valori, che si daranno alla  $z$ , faranno anche diversi i punti della stessa curva cercata.

E S E M P I O .

Applicherò la regola ad un'esempio: sia l'equazione  $xxdy^2 + xydx dy = xx dx^2$ . Si faccia adunque  $y = \frac{xz}{A}$ , e collocato questo valore nell'equazione in luogo di  $y$ ,  
ave-



averemo  $axxdy^2 + xxzdx dy = axxdx^2$ , e fatta la divisione per  $xx$ , farà  $ady^2 + zdx dy = adx^2$ , onde si vede, che  $x$ , e le sue funzioni interamente spariscono, restandovi solo  $z$ ,  $dx$ ,  $dy$  con le loro funzioni. Ma perchè collocando in luogo di  $dy$  il suo valore  $\frac{zdx + xdz}{a}$

s'introdurrebbe di nuovo nell'equazione la  $x$ , si faccia  $\frac{xdz}{a} = dt$ , e però  $dy = \frac{zdx + a dt}{a}$ , e l'equazione farà

$$\frac{zzdx^2 + 2zdx dt + aadt^2}{a} + \frac{zzdx^2 + azdx dt}{a} = adx^2, \text{ cioè}$$

$zzzdx^2 + 3azdx dt + aadt^2 = aadx^2$ , in cui entrano le sole  $z$ ,  $dx$ ,  $dt$  con le loro funzioni. Di nuovo supposta  $dt = \frac{udx}{a}$ , e fatta la sostituzione, si arriva alla espressione puramente algebrica  $zzz + 3zu + uu = aa$ , adunque

averemo il valore di  $u$  dato algebricamente per  $z$ , e le costanti. Ma  $dt = \frac{udx}{a} = \frac{xdz}{a}$ , quindi  $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{u}$ ,

nella quale equazione essendo  $u$  data per  $z$ , sono separate le variabili. Descritte adunque le curve, delle quali le affisse essendo  $z$ , le ordinate sieno reciprocamente proporzionali ai valori di  $u$ , averemo la  $x$ , ed indi la  $y$ , per la sostituzione fatta di  $y = \frac{xz}{a}$ .

16. Di questa equazione però, che è presa per esempio, siccome d'altre ancora succede, che senza servirsì di questo metodo, si possano ridurre facilmente

al

al metodo del num. 14. Ed in fatti , se all'uno , ed all'altro membro della suddetta equazione  $xxdy^2 + xydx dy = xx dx^2$  aggiungasi il quadrato  $\frac{1}{4}yydx^2$ , essa sarà  $xxdy^2 + xydx dy + \frac{yydx^2}{4} = xx dx^2 + \frac{yydx^2}{4}$ , e ca-

vando la radice ,  $xdy + \frac{1}{2}ydx = dx \sqrt{xx + \frac{yy}{4}}$ , ed ec-

cola ridotta al suddetto metodo generale del num. 14. O pure trasponendo il termine  $xydx dy$ , ed aggiun-  
do il quadrato  $\frac{1}{4}yydy^2$ , onde sia  $xxdy^2 + \frac{1}{4}yydy^2 =$

$xx dx^2 - xydx dy + \frac{1}{4}yydy^2$ , ed estraendo la radice ,

$dy \sqrt{xx + \frac{1}{4}yy} = xdx - \frac{ydy}{2}$ , ridotta allo stesso metodo .

17. Le equazioni, che contengono differenziali fra loro misti , ed elevati a potestà qualunque, non solo possono costruirsi nel caso considerato al num. 15., che suppone eguale la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine; ma generalmente in qualunque modo sieno esse equazioni, purchè l'una delle due indeterminate  $x$ , o  $y$  manchi. Ciò si farà ponendo  $dx = \frac{zdv}{a}$ ,

se manca la  $x$ ; o  $dy = \frac{zdx}{a}$ , se manca la  $y$ , essendo la

$z$  una nuova indeterminata , ed  $a$  una costante qualun-

que . Imperciocchè con tale sostituzione , per esempio , di  $\frac{zdy}{a}$  in luogo di  $dx$  nella proposta equazione , è mani-

festo , che ne nascerà un' altra , la quale sarà divisibile per la potestà della  $dy$  per modo , che si troverà composta di sole quantità finite , e però si averà la  $z$  data per la sola  $y$  , e le costanti , e la relazione della  $y$  alla  $z$  sarà espressa da un' equazione , o sia curva algebrica . Nella equazione adunque  $dx = \frac{zdy}{a}$  posto in luogo di  $dy$

il valore , che si ricaverà da tale equazione algebrica , si averanno separate le variabili .

## E S E M P I O I.

Sia l' equazione  $ydy^3 dx = adx^4 + 2adx^2 dy^2 + ady^4$  .  
 Pongo  $dx = \frac{zdy}{a}$  ; fatte le sostituzioni in luogo di  $dx$  , e sue potestà , avremo l' equazione  $\frac{zydy^4}{a} = \frac{z^4 dy^4}{a^4} + \frac{2zzdy^4}{a} + ady^4$  , e dividendo per  $dy^4$  , sarà  $\frac{zy}{a} = \frac{z^4}{a^4} + \frac{2zz}{a} + a$  , e però  $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$  , e  $dy = \frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz}$  , adunque  $\frac{zdy}{a} = dx = \frac{3z^3 dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$  .

Si

Si faccia passaggio all'integrazioni, farà dunque  $x = \frac{3z^4 + zz - 1z}{4a^3 a}$ , preso il logaritmo nella logaritmica

della sottangente  $a$ . Quindi si hanno i valori delle due coordinate  $x, y$  della equazione differenziale proposta per mezzo di due curve, che hanno la comune indeterminata  $z$ . Per avere la costruzione si proceda così.

Nell'asse  $QE$  (Fig. 1.) prese le assisse, si descriva la curva  $DAH$  dell'equazione  $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$ , e la curva  $RIK$  dell'equazione  $x = \frac{3z^4 + zz - 1z}{4a^3 a}$ , faranno

le  $EH = y, EK = x$  le coordinate della proposta curva differenziale, per la costruzione della quale, fatta  $CM$  parallela ad  $EK$ , si produca  $KM$  in  $N$ , onde sia sempre  $MN = EH$ ; e la curva  $NBN$  farà la ricercata.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $y^3 dx^3 + aaydydx^4 = a^3 dy^3$ . Pongo  $dx = \frac{zdy}{a}$ ; fatte le sostituzioni, avremo  $\frac{z^3 y^3 dy^3}{a^3} + \frac{a^2 z^4 y dy^3}{a^4} = a^3 dy^3$ , e dividendo per  $dy^3$ ,  $z^3 y^3 + a^3 z^4 y = a^6$ ; farà adunque la  $z$  data per la sola  $y$ , e le costanti,

ti, e però nell'equazione  $dx = \frac{zdy}{a}$  faranno separate le variabili.

Per avere la curva della proposta equazione differenziale. All'asse  $CE$ , (*Fig. 2.*) si descriva la curva  $IK$  dell'equazione  $z'y' + a'z'y = a'$ , essendo le  $CM = y$ ,  $MK = z$ ; in  $KM$  prodotta si prenda  $MN$  eguale allo spazio  $CMKI$  diviso per  $a$ , farà  $MN = \int \frac{zdy}{a} = x$ , ed il punto  $N$  in curva.

18. Si può rendere più generale il metodo del num. 14. col trasformare le equazioni, che non hanno la condizione delle somme eguali degli esponenti, in altre, che abbiano esse somme eguali, e siano in conseguenza soggette al canone di esso numero. Ciò in due maniere si può fare. L'una farà di servirsi di congrue sostituzioni, delle quali però non v'è regola alcuna, ed i soli esempj possono farcene acquistare l'industria; L'altra alterando gli esponenti della proposta formola, o equazione a fine di determinare almeno, in quali casi, e con quale sostituzione possa riuscire di trasformarla in una equivalente, in cui si verifichi la condizione prescritta; così se non si potranno generalmente separare le variabili, si determineranno infiniti casi, ne quali la separazione succede.

ESEM-

ESEMPIO I.

E quanto alla prima maniera : sia l'equazione  $dx \sqrt{aaxx + az^3} = z dz$ , che non à la necessaria condizione. Faccio  $z^3 = ayy$ , e differenziando  $z dz = \frac{2ay dy}{3}$ ;

e però, fatte le sostituzioni,  $dx \sqrt{aaxx + aayy} = \frac{2ay dy}{3}$ ,

espressione, che può trattarsi col metodo del num. 14.

Si può avere l'intento anche ponendo  $\sqrt{aaxx + az^3} = au$ ,

e però  $aaxx + az^3 = aauu$ , e differenziando,  $2aax dx + 3azz dz = 2aau du$ , cioè  $z dz = \frac{2aau du - 2ax dx}{3}$ , e fatte

le sostituzioni,  $u dx = \frac{2udu - 2x dx}{3}$ .

ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $x^3 dx + \frac{xx dy}{\sqrt{a+y}} = dy$ . Faccio  $\sqrt{a+y} = z$ ,

e però  $a+y = zz$ , e  $dy = 2z dz$ , e sostituendo,  $x^3 dx + 2xx dz = 2z dz$ . Ma questa ricerca in oltre un'altra piccola riduzione; pongo per tanto  $xx = u$ , e però  $x^4 = uu$ ,

e

e  $4x^3 dx = zudu$ , quindi surrogati i valori, farà finalmente  $\frac{udu}{z} + zudz = zxdz$ , il che ec.

19. Passo alla seconda maniera con alterare gli esponenti, e però prendo l'equazione generale di tre termini  $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$ , in cui i segni possono essere, comunque si vuole, positivi, o negativi. Se fosse  $n + m = q + p = r + s$ , farebbe il caso del num. 14.; ma supposto, che fra le somme degli esponenti non vi sia questa eguaglianza, si ponga  $y = z^t$ , onde  $dy = tz^{t-1} dz$ ,  $y^q = z^{qt}$ ,  $y^s = z^{st}$ , e fatte le debite sostituzioni nella proposta equazione, farà

$az^n x^m dx + bz^{qt} x^p dx + tcx^r z^{st+t-1} dz = 0$ . Ma per la condizione del suddetto num. 14. fa di mestieri, che sia  $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$ ; dalla prima equazione adunque  $nt + m = qt + p$  caverassi il valore dell'esponente assunto  $t = \frac{p - m}{n - q}$ , il quale sostituito nella secon-

da  $qt + p = r + st + t - 1$ , o sia  $\frac{p - m}{n - q} \times t = p - r + 1$ , ci darà  $\frac{p - m}{n - q} \times \frac{p - m}{n - q} = p - r + 1 \times \frac{p - m}{n - q}$ , che è la condizione, che devono avere gli esponenti della proposta equazione, verificandosi la quale, farà sempre riducibile al canone del num. 14., e la sostituzione da

farfi farà  $y = z^{\frac{p - m}{n - q}}$ .

Se

Se in luogo di porre  $y = z^t$  avessi posto  $x = z^t$ , avrei trovata la medesima condizione da verificarsi negli esponenti, ma sarebbe  $t = \frac{n-q}{p-m}$ , e però la sostituzione

da farsi  $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$ .

Può darsi, che la sostituzione  $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$  divenga impossibile, cioè quando sia  $p = m$ , o  $n = q$ ; ma si avverta, che in questi casi le indeterminate sono separabili senza bisogno di riduzione.

Nella equazione canonica  $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$ , se oltre la supposizione di  $y = z^t$ , si porrà ancora  $x = u^i$ , fatte tutte le sostituzioni, si troverà l'equazione  $aiz^{nt} u^{im+i-1} du + biz^{qt} u^{ip+i-1} du + ctu^{ir} z^{st+t-1} dz = 0$ ; dal paragone degli esponenti del primo, e secondo termine caverassi  $nt + im + i - 1 = qt + ip + i - 1$ , cioè  $t = i \times \frac{p-m}{n-q}$ ; dal paragone di quell

del secondo, e terzo si troverà  $ir + st + t - 1 = qt + ip + i - 1$ , o sia  $t \times \frac{s-q+1}{n-q} = i \times \frac{p-r+1}{n-q}$ , e posto in luogo di  $t$  il suo valore,  $i \times \frac{p-m}{n-q} \times \frac{s-q+1}{n-q} = i \times \frac{p-r+1}{n-q}$ , che è la condizione, che devono avere gli esponenti dell'equazione proposta; ma la lettera  $i$  sparisce dalla condizione, dunque è stata affatto superflua la seconda sostituzione di  $x = u^i$ , dal che



che s'inferisce, che tutte le formole al canone del num. 14. non possono ridursi generalmente, ma solo quelle, in cui si verifichi la condizione  $\frac{p-m}{n-q} \times \frac{s-q+1}{p-r+1} =$

20. Crescendo il numero de' termini oltre il tre, cresce istessamente il numero delle condizioni, che devono avere gli esponenti delle equazioni, acciò sieno riducibili al metodo del num. 14. Prendo l'equazione canonica di quattro termini  $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx + cx^r y^s dy + fx^e y^u dy$ . Posta  $y = z^t$ ,  $dy = tz^{t-1} dz$ , e fatte le sostituzioni, sarà  $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + tcx^r z^{st+t-1} dz + fx^e z^{tu+t-1} dz$ . Deve adunque essere  $nt+m = qt+p$ , onde si caverà il valore dell'esponente assunto  $t = \frac{p-m}{n-q}$ . Deve essere pure  $r+st+$

$t-1 = qt+p$ , o sia  $st-qt+t = p-r+1$ , e posto il valore di  $t$ , sarà  $\frac{s-q+1}{n-q} \times \frac{p-m}{p-r+1} = \frac{p-r+1}{n-q}$ , prima condizione. Ma in oltre deve essere  $e+tu+t-1 = qt+p$ , o sia  $tu-qt+t = p-e+1$ , e posto il valore di  $t$ ,  $\frac{u-q+1}{n-q} \times \frac{p-m}{p-e+1} = \frac{p-e+1}{n-q}$ , seconda condizione. Se adunque gli esponenti d'una proposta equazione saranno tali, che ambe le ritrovate condizioni si verifichino, sarà essa riducibile al caso del num.

num. 14., e la sostituzione da farsi sarà  $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ .

Se le equazioni avranno cinque termini, le condizioni da verificarsi saranno tre, e così si vada discorrendo.

## E S E M P I O .

Sia l'equazione  $ay^s x dx + byy x^{\frac{1}{2}} dx = cxdy$ . Paragonata questa con la canonica, sarà  $n = 3$ ,  $m = 1$ ,  $q = 2$ ,  $p = \frac{1}{2}$ ,  $r = 1$ ,  $s = 0$ ; e perchè nel presente caso si verifica la condizione  $\overline{s-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-r+1} \times \overline{n-q}$ , dandoci  $-1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$ , che è una verità, sarà riducibile al metodo del num. 14. l'equazione, e la so-

stituzione da farsi sarà  $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$ . Pongo adun-

que  $y = z^{-\frac{1}{2}}$ ,  $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$ ,  $y^s = z^{-\frac{1}{2}}$ ,  $yy = z^{-1}$ ,

e fatte le sostituzioni, trovo  $az^{-\frac{3}{2}} x dx + bz^{-1} x^{\frac{1}{2}} dx =$

$-\frac{1}{2} c x z^{-\frac{3}{2}} dz$ , ed eccola ridotta al caso del suddetto

numero.

21. Ma senza riportare le particolari equazioni alle canoniche, tornerà forse più comodo il maneggiarle sole collo stesso metodo.

m m

ESEM-

## ESEMPIO I.

Sia adunque l'equazione  $ay^{\frac{1}{3}}x^{\frac{11}{6}}dx - \frac{bx^3dy}{y} = exxydy$ . Pongo  $x = z^t$ ,  $dx = tz^{t-1}dz$ ; fatte le sostituzioni, farà  $tay^{\frac{1}{3}}z^{\frac{11t}{6} + t - 1}dz - bz^{3t}y^{-1}dy = cz^{2t}ydy$ , ma deve essere  $\frac{1}{3} + \frac{11t}{6} + t - 1 = 3t - 1$ , quindi ricavo  $t = 2$ , il qual valore posto in luogo di  $t$  mi dà l'equazione  $2ay^{\frac{1}{3}}z^{\frac{14}{3}}dz - bz^6y^{-1}dy = cz^4ydy$ , che è appunto il caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque  $x = zz$ .

## ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $x^{\frac{1}{2}}dx + y^{\frac{4}{3}}dx + x^{\frac{3}{4}}ydy = y^3dy$ . Pongo  $y = z^t$ , e  $dy = tz^{t-1}dz$ , fatte le sostituzioni, farà  $x^{\frac{1}{2}}dx + z^{\frac{4t}{3}}dx + tx^{\frac{3}{4}}z^{t+t-1}dz = tz^{3t+t-1}dz$ . Ma deve essere  $\frac{1}{2} = \frac{4t}{3}$ , quindi ricavo  $t = \frac{3}{8}$ , il qual

valo-

valore posto in luogo di  $t$  mi dà l'equazione

$$x^{\frac{1}{2}} dx + z^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{8} x^{\frac{3}{4}} z^{\frac{1}{4}} dz = \frac{3}{8} z^{\frac{1}{2}} dz, \text{ che appunto}$$

è il caso del numero 14. La sostituzione da farsi è

$$\text{adunque } y = z^{\frac{3}{8}}.$$

## E S E M P I O III.

Sia l'equazione  $ayyx dx + bdx + cyx dx + fx^t yy dy = 0$ .

Pongo  $y = z^t$ ,  $dy = tz^{t-1} dz$ ; fatte le sostituzioni, fa-

rà  $az^{2t} x dx + bdx + cz^t x dx + tfx^t z^{2t+t-1} dz = 0$ .

Ma deve essere  $2t + 2 = t + 1$ , quindi ricavo  $t = -1$ ,

il qual valore posto in luogo di  $t$  mi dà l'equazione

$$\frac{axx dx}{zz} + \frac{bdx}{z} - \frac{fx^t dz}{z^t} = 0, \text{ che è appunto il}$$

caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque

$$y = \frac{1}{z}.$$

22. Refo più generale il metodo del num. 14., passo ad un' altro, che è pure generale nel suo genere. Comprende questo tutte quelle equazioni, nelle quali nè le indeterminate, nè i loro differenziali oltrepassano la prima dimensione.

Sia per tanto l'equazione differenziale generale, che abbraccia tutti i casi possibili, ne' quali le variabili, e loro

m m 2

dif-

differenziali non ascendono oltre la prima dimensione  $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + bdy = 0$ . I coefficienti  $a, b$  ec. possono essere affermativi, o negativi, ed anche zero, conforme portano le circostanze dell'equazione particolare, che si vuole costruire. Intorno a questa equazione osservo in primo luogo, che se sarà  $c = g$ , essendo  $c, e g$  ambe positive, o ambe negative, l'equazione potrà integrarsi; imperciocchè sarà  $\pm c \times \overline{ydx + xdy} = -axdx - bydy - fdx - bdy$ , ed integrando,  $\pm cxy = -\frac{axx}{2} - \frac{byy}{2} - fx - by$ . Ma non essendo  $c = g$ , fac-

cio  $x = p + A, y = q + B$ ; le  $p, e q$  sono due nuove indeterminate, e le  $A, B$  due costanti arbitrarie da fìsarsi nel progresso. Sarà dunque  $dx = dp, dy = dq, xdx = pdp + Adp, ydy = qdq + Bdq$ . Collocati questi valori nella equazione principale proposta, nascerà la seguente

$$\begin{aligned} apdp + aAdp + bqdq + bBdq + cqdp + gpdq \\ + cBdp + gAdq &= 0. \\ + fdp + bdq \end{aligned}$$

Se in questa equazione s'vanissero i termini secondo, e quarto, sarebbe essa il caso del num. 14., e si saprebbero separare le indeterminate, ma s'vanirà il secondo termine se sia  $aA + CB + f = 0$ , ed il quarto se sia  $bB + gA + b = 0$ ; quindi da queste due equazioni si determinano i valori dell'assunte  $A, B$ , talchè la nuova

equa-

equazione sia il caso del suddetto num. 14. Sarà per tanto

$$A = -\frac{cB-f}{a}, \quad B = -\frac{gA-b}{b}, \quad \text{cioè } A = \frac{bf-cb}{cg-ab}, \quad e,$$

$$B = \frac{ab-fg}{cg-ab}. \quad \text{Se adunque si faranno le sostituzioni}$$

$$x = p + \frac{bf-cb}{cg-ab}, \quad y = q + \frac{ab-fg}{cg-ab}, \quad \text{nascerà un' equazio-$$

ne da maneggiarsi col metodo del num. 14.

Se in una particolar equazione succedesse, che fosse  $bf=cb$ , ovvero  $ab=fg$  di modo, che o l'una, o l'altra delle costanti assunte fosse zero, farebbe indizio, potersi ottenere l'intento con una sola sostituzione. Sia per cagion d'esempio  $\frac{bf-cb}{cg-ab} = A = 0$ ; in tal caso, lasciata

la quantità  $x$  colle sue differenze, basterà in luogo di  $y$  sostituire  $q+B$ , e proseguire a norma di quanto è stato detto di sopra.

Che se fossero nulle ambe le grandezze  $A, B$ , in sì fatta ipotesi averebbesi  $bf=cb$ ,  $ab=fg$ , ed in conseguenza  $\frac{cb}{b} = \frac{ab}{g} = f$ ; dunque  $cg=ab$ , con che non

hanno più luogo le sostituzioni praticate. Ogni qual volta adunque sia  $cg=ab$ , si faccia la sostituzione  $ax+cy=z$ , e si tolga dall'equazione la  $y$ , e  $dy$ . Sarà adunque  $y = \frac{z-ax}{c}$ ,  $dy = \frac{dz-adx}{c}$ ; fatte le sostituzioni nella

equa-

equazione principale, si avrà  $axdx +$   
 $\frac{bx dz - abxdz - abzdx + aabxdx}{c} + zdx - axdx +$

$\frac{gx dz - agxdx}{c} + \frac{fx}{c} + \frac{bdz - abdx}{c} = 0$ , cioè elidendo

il primo termine col settimo, e riducendo al comun denominatore,  $bx dz - abxdz - abzdx + aabxdx + cczdx +$   
 $cgxdz - acgxdx + ccf dx + cbdz - acbdx = 0$ ; ma poichè  
 $cg = ab$ , il secondo termine elide il sesto, ed il quarto  
 il settimo, onde rimane  $bx dz - abzdx + cczdx + ccf dx +$   
 $cbd z = acbdx$ , cioè  $\frac{bx dz + cbdz}{abz - ccz - ccf + acb} = dx$

## E S E M P I O I.

Sia l'equazione  $axdx + 2aydx + bxdy - abdy = 0$ .  
 Faccio  $x = p + A$ ,  $y = q + B$ ,  $dx = dp$ ,  $dy = dq$ ; fatte le  
 sostituzioni, l'equazione sarà

$$apdp + aAdp + 2aqdp + bpdq + bAdq = 0,$$

$$+ 2aBdp \qquad \qquad \qquad - abdq$$

L'ultimo termine svanirà, se sia  $bA - ab = 0$ , cioè  
 $A = a$ ; svanirà il secondo, se sia  $2AB + aA = 0$ , cioè  
 $B = -\frac{a}{2}$ , le sostituzioni sono adunque  $x = p + a$ ,  $y = q - \frac{1}{2}a$ ,  
 e l'equazione si riduce al caso del num. 14.

Sva-

Svaniti i suddetti termini nell'equazione, si può essa integrare per mezzo del num. 4. senza servirsi del num. 14.

E S E M P I O II.

Sia l'equazione  $2axdx - zbydy - 4aydx + bxdy - aadx = 0$ . In questa il coefficiente  $2a$  corrisponde ad  $a$  della canonica,  $-zb$  alla  $b$ ,  $-4a$  alla  $c$ ,  $b$  alla  $g$ ; e si dà il caso, che sia  $cg = ab$  rispetto alle costanti della canonica; faccio adunque la sostituzione  $2ax - 4ay = z$ , e però  $y = \frac{2ax - z}{4a}$ ,  $dy = \frac{2adx - dz}{4a}$ ; quindi eliminate

le  $y$ , e  $dy$ , avremo  $2axdx -$

$$\frac{8aabxdx + 4abzdx + 4abxdz - zbzdz}{16aa} - 2axdx + zdx +$$

$$\frac{2abxdx - bxdz - aadx}{4a} = 0, \text{ cioè } 4abzdx - zbzdz +$$

$$16aazdx - 16a^2dx = 0, \text{ e però } dx = \frac{zbzdz}{4abz + 16aaz - 16a^2}$$

23. Si le notate equazioni, come quelle ancora di grado superiore, possono maneggiarsi per mezzo di una sola, ma più composta sostituzione. Ripiglio l'equazione canonica di sopra  $dx dx + by dy + cy dx + gx dy + fdx + bdy = 0$ , perchè quelle di grado superiore portano a calcoli troppo lunghi, e ciò, che dirò intorno a quella, ba-



basterà per far vedere , come debbano quelle trattarsi . Pongo adunque  $x = Ay + p + B$ , nella quale equazione sussidiaria la  $p$  è una nuova indeterminata , a cui non si prefigge costante alcuna , perchè sarebbe superflua , come si può conoscere , facendo l'operazione ; le  $A$  ,  $B$  sono due costanti da fissarsi nel progresso . Posta adunque  $x = Ay + p + B$ , sarà  $dx = A dy + dp$ ,  $x dx = A Ay dy + A p dy + AB dy + Ay dp + p dp + B dp$  , quindi surrogati questi valori nell' equazione canonica , sarà essa trasformata nella seguente

$$\begin{aligned}
 & aA Ay dy + aA p dy + aA y dp + a p dp + aAB dy + aB dp \\
 & \quad by dy + g p dy + c y dp + g B dy + f dp = 0 . \\
 & \quad c Ay dy + f A dy \\
 & \quad g Ay dy + b dy
 \end{aligned}$$

Convieni adunque procurare di fare svanire alcuni termini di questa equazione , fissando opportunamente le arbitrarie assunte  $A$  ,  $B$  , e con ciò renderla capace del fine , che si pretende ; quando però si verificchino alcune condizioni , che nascono da' valori delle  $A$  ,  $B$  . Se adunque mancassero i due termini secondo , e terzo , farebbero separate le variabili , ed integrabile l' equazione . Ma acciò sieno nulli essi due termini , bisogna , che sia  $aA + g = 0$  rispetto al secondo , ed  $aA + c = 0$  rispetto al terzo , ed in conseguenza  $g = c$  ; ma posto ciò , l' equazione principale era già integrabile senza l' ajuto d' alcuna operazione .

Se

Se fossero nulli i due ultimi termini, l'equazione farebbe ridotta al canone del num. 14., ma acciò essi spariscano, convien, che sia  $aB + f = 0$  rispetto all'ultimo, cioè  $B = -\frac{f}{a}$ , ed  $aAB + gB + fA + b = 0$  rispetto al quinto,

ma surrogato il valore di  $B$ , farà  $Af - \frac{gf}{a} + Af + b = 0$ , cioè  $ab = gf$ . Non possono adunque sparire gli ultimi due termini, e così per essi ridursi l'equazione, se non nel caso particolare, che si verifichi la condizione  $ab = gf$ .

Si procuri adunque di togliere il primo, e quinto termine, con che l'equazione farà ridotta al caso de' numeri 4., e 6. Adunque farà rispetto al primo termine  $aAA + b + cA + gA = 0$ , cioè  $AA + \frac{cA + gA}{a} = -\frac{b}{a}$ ,

da cui si ricaverà il valore dell'assunta  $A$ ; trovato questo, scoprirassi quello di  $B$  dal quinto termine, e farà  $B = -\frac{fA - b}{aA + g}$ , e la nuova equazione verrà ad essere

$\frac{aA + g}{aA + g} \times pdy + \frac{aA + c}{aA + g} \times ydp = -apdp - aBdp - fdp$ , che si costruirà per mezzo del num. 4., se i coefficienti de' due primi termini faranno ambi positivi, o negativi; e per mezzo del num. 6., se uno sia positivo, negativo l'altro.

n n

Ma

Ma per ottenere la bramata separazione, basterà far svanire il primo termine dall'equazione sussidiaria, ponendo  $aAA + cA + gA + b = 0$ , mentre posta  $= 0$  la costante assunta  $B$ , che in questo caso riesce superflua, resterà l'equazione  $-apdp - fdp = \overline{aA + g} \times pdy + \overline{fA + b} \times dy + \overline{aA + c} \times ydp$ , nella quale si separano le variabili col metodo, che prenderò a spiegare nel numero, che siegue; o pure con l'antecedente per mezzo di una facile preparazione, cioè facendo  $\overline{Aa + g} \times p + \overline{fA + b} = q$ , e differenziando  $\overline{Aa + g} \times dp = dq$ ; dunque sostituendo,  $-apdp - fdp = qdy + \overline{Aa + c} \times ydq$ . Si dee

$$\overline{Aa + g}$$

però riflettere, che nel fare uso di queste formole bene spesso s'insinuano le quantità immaginarie nascenti dalla equazione quadratica affetta dal lato  $aAA + cA + gA + b = 0$ ; ed esse non solo si rinvencono nelle grandezze coefficienti, ma passano talvolta negli esponenti; e perchè fin ora non si fanno maneggiare, fa d'uopo evitarle, e fra varj metodi valersi di quelló, che più cade in acconcio.

ESEM-

E S E M P I O.

Sia l'equazione  $abxxdx + bbyxdx + a^3ydx + aabydy + a^3xdy = 0$ . Pongo  $y = Ax + p + B$  (sostituisco in luogo della  $y$  piuttosto, che della  $x$ , perchè preveggo il calcolo più breve) adunque  $dy = Adx + dp$ . Fatte pertanto le sostituzioni, averassi l'equazione

$$abxxdx + bbyxdx + bbBxdx + a^3pdx + a^3Bdx + aabAxdp + aabpdp + aabBdp + aabAxdx + 2a^3Ax dx + aabApdx + 2abABdx + a^3x dp + aabAAxdx = 0.$$

Offervo, che se in questa equazione sparissero i termini 1, 3, 5, e 6., avrebbonli le indeterminate separabili, perchè sarebbe

$$bbpxdx + a^3pdx + aabpdp + aabBdp = 0,$$

$$+ aabApdx$$

e dividendo per  $p$ ,

$$bbxdx + a^3dx + aabAdx = -aabdp - \frac{aabBdp}{p}.$$

Adunque sparisca il primo, bisogna, che sia  $a + bA = 0$ , cioè  $A = -\frac{a}{b}$ , e con ciò spariscono pure il quinto, e

sesto senza, che nasca condizione alcuna. Acciò sparisca il terzo, conviene, che sia  $bbB + 2a^3A + aabAA = 0$ , e surrogato il valore di  $A$ ,  $bbB - \frac{2a^4}{b} + \frac{a^4b}{bb} = 0$ , cioè

nn 2

B =

$B = \frac{a^4}{b^3}$ . La sostituzione adunque farà  $y = -\frac{ax + p + a^4}{b}$ ,

e l'equazione, che indi nasce,  $bbx dx = -aabd p - \frac{a^6 dp}{bbp}$ ,

24. Consiste il metodo di questo numero nel disporre primieramente l'equazione proposta in maniera, che le quantità differenziali restino accompagnate rispettivamente dalle loro indeterminate, e si faccia, per così dire, una dimezzata separazione, rigettando ne' comuni moltiplicatori, o divisori quelle grandezze, che turbano l'operazione; indi presa la sommatoria della differenziale così preparata composta di due incognite, si deve porre eguale ad una variabile assunta, e col mezzo d'una equazione ausiliaria dare una nuova forma alla principale. Finalmente fatta osservazione a ciò, che succede, deve rinnovarsi l'operazione sino a tanto, che si conseguisca la bramata separazione, o si vegga essere la formola superiore alla nostra industria.

A di vantaggio questo metodo sopra degli altri, che valendosi noi delle sostituzioni, nel tempo stesso ci insegna, quali sieno le legittime, e quali le inutili. Si offervi però, esservi delle equazioni, che non ammettono l'artificio del presente metodo, se prima non vengano con qualche industria preparate. Il tutto s'intenderà meglio dagli esempi.

ESEM-

## E S E M P I O I.

Ci venga proposta l'equazione

$$\frac{x^3 dy + y^3 dx}{xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}} = dz, \text{ nella quale la } dz \text{ è una}$$

$$xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}$$

funzione qualunque di  $x$ , ovvero di  $y$ . Metto da parte

la quantità  $\frac{xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}}{xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}}$ , che è una affe-

zione comune a due termini, che compongono la pri-

ma parte dell'equazione, resterà la differenziale nuda.

$x^3 dy + y^3 dx$ . Divido  $dx$  per  $x^3$ ,  $dy$  per  $y^3$ , e però sa-

rà  $x^3 dy + y^3 dx = x^3 y^3 \times \frac{dy + dx}{y^3 x^3}$ , onde la proposta

equazione prenderà il nuovo aspetto

$$\frac{x^3 y^3}{xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}} \times \frac{dx + dy}{x^3 y^3} = dz. \text{ Ottenuta}$$

questa dimezzata separazione, in cui le flussioni  $dx$ ,  $dy$

vengono combinate semplicemente colle funzioni delle loro

fluenti, o sia variabili  $x^3$ ,  $y^3$ , e gli altri termini costituiscono

una quantità quasi estranea, che fa figura di moltiplicatore;

pongo  $\frac{dx + dy}{x^3 y^3} = -\frac{dp}{a^3}$ , e però integrando  $\frac{a^3}{2xx} + \frac{a^3}{2yy} = p$ ,

quindi ritrovato il valore, per esempio di  $x = \frac{y}{\sqrt{2yyy - a^3}}$ ,

e

e sostituito questo in luogo di  $x$ , e  $-\frac{dp}{a^3}$  in luogo di

$$\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} \text{ nell'equazione, farà essa } -\frac{dp \times a \sqrt{a}}{2pq \sqrt{2p-a^3}} = dz,$$

il che ec.

Raccoglasi, che presa ad arbitrio una quantità in qualsivoglia modo data per  $p$ , come  $p = \frac{a}{2qq}$ , farà  $\frac{a}{2qq} = \frac{a}{2xx} +$

$$\frac{a}{2yy}, \text{ cioè } q = \frac{xy}{\sqrt{xx+yy}}, \text{ con che in un batter d'occhio si}$$

scoprono le infinite sostituzioni, che servono alla bramata separazione. Tutte le altre possibili sono inutili, e lasciano le variabili più di prima confuse.

Si noti di più, che colle spiegate sostituzioni spesso volte accade, che in un membro dell'equazione ci resti qualche funzione dell'una, o dell'altra variabile  $x$ , o pure  $y$ ; nel qual caso se la  $dz$  fosse data per la variabile, di cui resta la funzione, una semplice divisione supplirebbe al bisogno.

### ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $\frac{2ydy + xdy + ydx}{a+x+y} = dz$ , in cui la  $dz$

sia data in qualsivoglia modo per  $y$ . Per ridurre al metodo

todo questa equazione, prendo l'integrale del numeratore della frazione, cioè  $yy + xy$ , e lo pongo  $= p$ , quindi fatta svanire dall'equazione la  $x$ , e  $dx$ , collocandovi il suo valore, ô la nuova equazione  $\frac{dp}{a + \frac{p}{y}} = dz$ ,

che si riduce alla seguente  $ydp - pdz = aydz$ ; e questa preparata secondo il metodo, si trova essere  $p \times \frac{dp}{p} - \frac{dz}{y} = adz$ .

Faccio  $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y} = \frac{dq}{q}$ , e però  $lp - \int \frac{dz}{y} = lq$ ; pongo

in oltre  $\int \frac{dz}{y} = ulm$ , ( $lm$  è un logaritmo costante) sarà

$lp - lq = ulm$ , e passando dalle quantità logaritmiche alle esponenziali,  $\frac{p}{q} = m^u$ . Fatte adunque nell'equazio-

ne ridotta le sostituzioni di  $\frac{dq}{q}$  in luogo di  $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}$ , e di

$m^u q$  in luogo di  $p$ , sarà  $m^u dq = adz$ , cioè  $dq = \frac{adz}{m^u}$ ,

in cui sono separate le variabili, per essere tanto  $dz$ , quanto  $m^u$  date per  $y$ , il che ec.

ESEM-



## ESEMPIO III.

$$\text{Sia l'equazione } \frac{2xxdx + xydy + yydx}{x^2 + xxy + a^2} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}.$$

Prima di tentare questa formola farà bene ridurla. Osservo, che il secondo membro è integrabile, e la sua sommatoria è  $\sqrt{xx + yy}$ . (num. 10.) Pongo per tanto  $\sqrt{xx + yy} = z$ , e fatta svanire la  $y$ , atteso che le sue funzioni montano al quadrato, collocando  $zz - xx$  in luogo di  $yy$ , e  $zdz - xdx$  in luogo di  $ydy$ , avremo l'equazione  $\frac{2xxdx + xzdz - xxdx + zzdx - xxdx}{xxzz + a^2} = dz$ ,

cioè  $\frac{xzdz + zdx}{xxzz + a^2} = dz$ , la quale preparata al solito farà

$$\frac{z}{xxzz + a^2} \times xdz + zdx = dz. \text{ Faccio } xdz + zdx = dp, \text{ ed}$$

integrando  $xz = p$ , e fatta svanire la  $x$ , avremo  $\frac{zdp}{pp + aa} = dz$ , e finalmente  $\frac{dp}{pp + aa} = \frac{dz}{z}$ , il che ec.

ESEM-

ESEMPIO I.V.

Sia l'equazione ultima dell' antecedente numero  
 $-apdp - fdp = aA + g \times pdy + fA + b \times dy + aA + c \times ydp$ ,  
 che è promesso di costruire. Preparata questa secondo  
 il metodo, e fatto per brevità  $aA + g = e$ ,  $fA + b = m$ ,  
 $aA + c = n$ , si riduce ad essere

$$-\frac{apdp - fdp}{ep + m} = y \times \frac{dy + ndp}{y \quad ep + m}$$

$\frac{ndp}{ep + m} = \frac{dq}{q}$ , ed integrando  $ly + \frac{n}{e} lp + \frac{m}{e} = lq$ , e però

$y = \frac{q}{p + \frac{m}{e}}$ , e fatta svanire la  $y$ , averassi

$$p + \frac{m}{e}$$

$$-\frac{apdy - fdp}{ep + m} = \frac{dq}{p + \frac{m}{e}}$$

cioè  $-\frac{apdp - fdp}{ep + m} \times p + \frac{m}{e} = dq$ ,

il che ec.

## ESEMPIO V.

Sia l'equazione già preparata

$$y^m \times \overline{xdx + ydy} = x^n \times \overline{ydx - xdy}, \text{ che scrivo così}$$

$$\frac{y^{m-2}}{x^n} \times \overline{xdx + ydy} = \frac{ydx - xdy}{yy}, \text{ a fine di rendere in-}$$

tegrabile il secondo membro. In questa farò uso d'una doppia sostituzione, e però pongo  $xdx + ydy = pdp$ , ed integrando,  $xx + yy = pp$ ; pongo in oltre  $\frac{ydx - xdy}{yy} = dq$ ,

ed integrando  $\frac{x}{y} = q$ . Fatte le sostituzioni, averassi

$$\frac{y^{m-2}}{x^n} \times pdp = dq; \text{ ma } yy = pp - xx, \text{ ed } xx = qqyy,$$

adunque farà  $yy = pp - qqyy$ , cioè  $yy = \frac{pp}{aa + qq}$ , ed

$$y^{m-2} = \frac{p^{m-2}}{aa + qq^{\frac{m-2}{2}}}, \quad x^n = \frac{q^n p^n}{aa + qq^{\frac{n}{2}}};$$

questi valori di  $y^{m-2}$ , e di  $x^n$ , averassi  $p^{m-n-1} dp = q^n dq \times \frac{aa + qq^{\frac{m-n-2}{2}}}{aa + qq^2}$ , il che ec.

## ESEMPIO VI.

Sia l'equazione  $\frac{2xdy - 2ydx}{x - y} = dz$ , in cui  $dz$  è data

in qualsivoglia modo per  $x$ , o per  $y$ . Osservo, che il numeratore del primo membro  $2xdy - 2ydx$  è integrabile quando si divida per  $xx$ , ed il suo integrale è  $\frac{2y}{x}$ , e però dispongo l'equazione così

$$\frac{1}{x - y} \times \frac{2xdy - 2ydx}{xx} = \frac{dz}{xx}; \text{ pongo } \frac{2y}{x} = p, \text{ onde}$$

farà  $\frac{2xdy - 2ydx}{xx} = dp$ , e l'equazione si muterà nella

$$\text{seguente } \frac{dp}{x - y} = \frac{dz}{xx}; \text{ ma } 2y = px, \text{ ed } yy = \frac{ppxx}{4},$$

dunque fatte le sostituzioni,  $\frac{dp}{xx - pxx + \frac{ppxx}{4}} = \frac{dz}{xx}$ ,

e moltiplicando per  $xx$ ,  $\frac{dp}{1 - p + \frac{pp}{4}} = dz$ , in cui sono

separate le variabili. Passo avanti all'integrazione, e

però sarà  $\frac{z}{1-p} + c = \int dz$ ; e posto il valore di  $p$ ,

$\frac{z}{1-y} + c = \int dz$ , e riducendo al comun denomina-

tore,  $\frac{zx + cx - cy}{x-y} = \int dz$ . Posta la costante  $c=0$ , avre-

mo  $\frac{zx}{x-y} = \int dz$ ; posta  $c=-z$ , sarà  $\frac{zy}{x-y} = \int dz$ , altro inte-

grale della proposta formola diverso dal primo; posta finalmente  $c=-1$ , nascerà il terzo integrale  $\frac{x+y}{x-y} = \int dz$ .

25. Il metodo, che ora prendo a spiegare, è però di grande uso ne' casi particolari. Con questo si separano le variabili nell'equazione canonica  $ady = y^p dx + by^n q dx$ , in cui le quantità  $p, q$  s'intendono date in qualunque modo per  $x$ ; le  $a, b$  sono costanti, i segni possono essere positivi, e negativi a piacere, e l'esponente  $n$  può essere intero, rotto, positivo, negativo, ed anco zero. Sia adunque l'equazione  $ady = y^p dx + by^n q dx$ . Si faccia  $y = zu$ , ( $z$ , ed  $u$  sono due nuove variabili) e differenziando,  $dy = zdu + u dz$ , e sostituendo in luogo di  $dy$ , di  $y$ , e di  $y^n$  i valori  $zdu + u dz$ ,  $uz$ ,  $u^n z^n$ , averassi l'equazione  $azdu + audz = uzp dx + bz^n u^n q dx$ , nella quale se due termini sparissero, si

si separerebbero le indeterminate . Per far ciò si finga un' equazione tra due termini  $adz = uzpdx$  , dunque

$$\frac{adz}{z} = pdx , \text{ ed integrando , } alz = \int pdx , \text{ e passando da'}$$

logaritmi alle quantità esponenziali ,  $z^a = m^{\int pdx}$  , o sia

$$z = m^{\frac{\int pdx}{a}} , \text{ supposta l' unità } = lm . \text{ Quest' ultima equazio-}$$

ne mi mostra il valore di  $z$  , e m' insegna , che per ridurre l' equazione proposta a due soli termini , e fare , che gl' altri due si distruggano , si doveva in vece di

$$y = zu \text{ porre } y = um^{\frac{\int pdx}{a}} , \text{ cioè } \frac{ly}{u} = m^{\frac{\int pdx}{a}} , \text{ o sia } ly - lu =$$

$$\int \frac{pdx}{a} , \text{ e differenziando , } \frac{ady}{y} - \frac{adu}{u} = pdx , \text{ e però } ady = ypdx + \frac{aydu}{u} .$$

Sostituisco adunque nell' equazione canonica  $ady = ypdx + by^n qdx$  in luogo di  $dy$  il valore ritrovato , e sarà  $ypdx + \frac{aydu}{u} = ypdx + by^n qdx$  , cioè  $\frac{aydu}{u} =$

$$by^n qdx , \text{ e però } \frac{adu}{u} = by^{n-1} qdx ; \text{ ma } y = zu , \text{ ed}$$

$$y^{n-1} = z^{n-1} u^{n-1} , \text{ onde finalmente } \frac{adu}{u^n} = bz^{n-1} qdx ,$$

equazione in cui sono separate le variabili , per essersi trovata la  $z$  data per  $x$  . Quando siasi giunto all' equazione  $alx = \int pdx$  , egli è certo , che se  $p$  data per  $x$

$x$  farà tale , che l'integrale  $\int p dx$  dipenda dalla quadratura dell'iperbola , o sia da' logaritmi , e la quantità  $a$  sia un numero qualunque , farà algebraica la relazione di  $z$  ad  $x$  , ed in ogni altro caso trascendente .

E qui si offervi , acciò una data equazione sia il caso della formola canonica , essere necessario , che si adempiano le seguenti condizioni , cioè che la differenza  $dy$  possa restar da se sola , o al più moltiplicata per una costante in una parte dell'equazione ; che nell'altra parte dell'equazione il primo termine contenga la differenza  $dx$  moltiplicata per qual si sia funzione di  $x$  espressa per  $p$  , e per l'indeterminata  $y$  , che nell'altro termine la quantità  $q dx$  data per  $x$  venga moltiplicata per una dignità di  $y$  ; in una parola , fatta la divisione per  $y$  , si richiede , che da una parte dell'equazione resti la flussione logaritmica  $\frac{ady}{y}$  , e nell'

altra il primo termine sia libero dall'indeterminata  $y$  , ed il secondo moltiplicato per la dignità  $y^{n-1}$  . Mancando l'uno de'premessi requisiti , non à più luogo questo metodo , come non lo avrebbe nelle seguenti equazioni  $ady = yypdx + by^n qdx$  ,  $ady = ypdx + \frac{ayy + y^3}{y} \times qdx$  .

Alcune formole però si riducono con tutta facilità al canone col solo prepararle . Per esempio sia l'equazione  $ady = ypdx + byqdx + yyqdx$  ; fatta riflessione , che  
la

la quantità  $pdx + bqdx$  viene moltiplicata per  $y$ , e che il binomio  $p + bq$  è dato per  $x$  di maniera, che si può in sua vece surrogare la quantità  $r$  data ugualmente per  $x$ , l'espressione si muterà nella seguente  $ady = yrdx + yyqdx$ , in cui trova luogo il metodo spiegato, e ciò basterà per indicare il modo d'operare in simili casi.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione  $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$ . Pongo  $y = zu$ ,

e però  $ady = azdu + audz$ ; e fatte le debite sostituzioni, avremo  $azdu + audz = \frac{fuzdx}{x} + zzuudx$ . Sia  $audz = \frac{fuzdx}{x}$ ,

cioè  $\frac{adz}{z} = \frac{fdx}{x}$ , integrando farà  $al z = flx$ , e però  $z^a = x^f$ .

Se le costanti  $a, f$  faranno numeri razionali interi, rotti, affermativi, o negativi, la  $z$  farà data algebricamente per  $x$ . Sia per esempio  $a = 1, f = 2$ , così che sia  $z = xx$ . Dunque dileguandosi i termini  $audz, \frac{fuzdx}{x}$ , resteranno i due  $azdu = zzuudx$ , ma  $z = xx$ , dunque farà  $\frac{adu}{uu} = xx dx$ , equazione, in cui sono separate le variabili.

Paffan-



Passando all'integrazione, farà  $-\frac{a}{u} + c = \frac{x^3}{3}$ , ma  
 $u = \frac{y}{z} = \frac{y}{xx}$ , adunque  $-\frac{axx}{y} + c = \frac{x^3}{3}$ , cioè  $3cy - 3axx = x^3y$ , che è l'equazione algebrica nascosta sotto la differenziale proposta.

## E S E M P I O II.

Sia l'equazione  $dy = \frac{aydx}{xx-aa} + \frac{y^3dx}{x^3}$ . Faccio, come sopra,  $y = zu$ , e  $dy = zdu + udz$ , e però fatte le sostituzioni, averassi l'equazione  $zdu + udz = \frac{azudx}{xx-aa} + \frac{z^3u^3dx}{x^3}$ , e supposto  $udz = \frac{azudx}{xx-aa}$ , cioè  $\frac{dz}{z} = \frac{adx}{xx-aa}$ , cioè  $z = m \int \frac{adx}{xx-aa}$ , averassi l'equazione  $zdu = \frac{z^3u^3dx}{x^3}$ , o sia  $\frac{du}{u^3} = \frac{zdx}{x^3}$ , in cui sono separate le variabili, essendo  $z$  data per  $x$ . Ma si osservi, che la quantità  $\frac{adx}{xx-aa}$  si può ridurre ad una flussione logaritmica ponendo  $x = \frac{a+n}{a-n} \times a$ , poichè fatte le sostituzioni debite, farà

 $adx$

$$\frac{adx}{xx-aa} = \frac{dn}{zn}, \text{ quindi } \frac{dz}{z} = \frac{dn}{zn}, \text{ e per\`o } zz = n =$$

$$\frac{a \times x - a}{x + a}, \text{ e posto questo valore in luogo di } zz \text{ nell'}$$

$$\text{equazione finale, averassi } \frac{du}{u^3} = \frac{axdx - aadx}{x^4 + ax^3}, \text{ il che ec.}$$

Senza fare la sostituzione di  $x = \frac{a+n \times a}{a-n}$ , si pu\`o

ridurre la quantit\`a  $\frac{adx}{xx-aa}$  ad una flussione logaritmica

per mezzo del num. 21. del Libro III., ed averassi

$$\frac{adx}{xx-aa} = -\frac{dx}{2 \times x+a} + \frac{dx}{2 \times x-a} = \frac{dz}{z}, \text{ ed in conseguen-}$$

$$za \quad zz = \frac{x-a}{x+a}.$$

E S E M P I O I I I.

Sia l'equazione  $dy = -\frac{ydx}{x} + y^m dx$ . Faccio  $y = zu$ ,

$$dy = zdu + udz; \text{ adunque sostituendo, } zdu + udz = -\frac{uzdx}{x} + u^m z^m dx. \text{ Suppongasi } udx = -\frac{uzdx}{x}, \text{ o sia}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}, \text{ ed integrando, } z = \frac{a}{x}; \text{ avrassi l'equazione}$$

p p

$$zdu =$$

$$xdu = x^m u^m dx, \text{ cioè } \frac{du}{u^m} = x^{m-1} dx, \text{ o sia } \frac{du}{u^m} = \frac{x^{m-1} dx}{x^{m-1}}$$

## E S E M P I O I V.

Qualche volta è necessaria una doppia operazione, come in certe equazioni, che hanno più di tre termini. Sia pertanto l'equazione  $xdy + ydx = adu + xdu$ , e s'intenda  $u$  data in qualunque modo per la  $y$ . Dispongo l'equazione nella seguente maniera  $adu + xdu - xdy = ydx$ , o pure  $\frac{adu}{y} + \frac{xdu}{y} - \frac{xdy}{y} = dx$ ; pongo  $x = pq$ , e  $dx = pdq + qdp$ , onde fatte le sostituzioni, farà  $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq + qdp$ . Chi volesse ridurre con una sola operazione la formola, bisognerebbe porre  $\frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq$ , cioè  $\frac{du}{y} - \frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$ , con che si scopre la  $q$  data per  $y$ ; ma più elegantemente si opererà nel seguente modo. Facciasi  $-\frac{pqdy}{y} = pdq$ , dunque  $-\frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$ , ed integrando,  $\frac{a}{y} = q$ ; presi pertanto gli altri termini dell'equazione  $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} = qdp$ , ed in vece di  $q$  posto il valore  $\frac{a}{y}$ , farà

farà  $\frac{adu}{y} + \frac{apdu}{yy} = \frac{adp}{y}$ , cioè  $du + \frac{pdu}{y} = dp$ . Sia  $p = mn$ , dunque  $dp = mdn + ndm$ , e fatta la sostituzione,  $du + \frac{mndu}{y} = mdn + ndm$ ; si supponga  $\frac{mndu}{y} = mdn$ , cioè  $\frac{du}{y} = \frac{dn}{n}$ , farà dunque  $n$  data per  $y$ , e nell'equazione restante, dopo essere svaniti i termini  $\frac{mndu}{y}$ ,  $mdn$ , cioè nell'equazione  $du = ndm$  faranno separate le variabili, e farà  $\frac{du}{n} = dm$ .

26. In altra maniera ancora si possono separare le variabili nell'equazione canonica  $dy = pydx + qy^n dx$ . Si faccia  $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$ ,  $dx = \frac{dz}{1-n \times pz}$ ; fatte le sostituzioni, farà  $dy = \frac{ydz}{1-n \times z} + \frac{qy^n dz}{1-n \times pz}$ , cioè  $dy =$

$$\frac{py^iz + qy^n dz}{1-n \times pz}, \text{ o sia } 1-n \times pz dy = pydz + qy^n dz, \text{ e}$$

$$\text{però } \frac{1-n \times z dy - y dz}{y^n} = \frac{q dz}{p}, \text{ dividendo per } py^n, \text{ e}$$

finalmente dividendo per  $zz$ , farà

$$\frac{1-n \times zy^{-n} dy - y^{1-n} dz}{zz} = \frac{q dz}{pzz}, \text{ ed integrando,}$$

$$\frac{y^{1-n}}{n} = \int \frac{q dz}{pzz}, \text{ cioè } y^{1-n} = z \int \frac{q dz}{pzz}; \text{ e poichè le } p,$$

e  $q$  si suppongono date per  $x$ , e la  $z$  pure, per la sostituzione  $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$ , è data per  $x$ , almeno

trascendentemente, faranno separate le variabili.

Ripresa adunque l'equazione dell'esempio primo  $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$ , vale a dire  $dy = \frac{fydx}{ax} + \frac{yydx}{a}$ , farà

$p = \frac{f}{ax}$ ,  $q = \frac{1}{a}$ ,  $n = 2$ ; quindi surrogati questi valori

nell'equazione finale  $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$ , farà essa  $\frac{1}{y} = z \int \frac{x dz}{fzz}$ , e la sostituzione  $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$  farà  $\frac{f dx}{az} =$

$-\frac{dz}{z}$ , e posta  $f = 2$ ,  $a = 1$ , avremo  $\frac{2dx}{x} = -\frac{dz}{z}$ ,

cioè  $z = \frac{1}{xx}$ , e però  $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \int -xx dx$ ; ed inte-

grando,  $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \times -\frac{1}{3} x^3 + c$ , cioè  $3cy - 3xx = x^3 y$ , come prima. Iteffamente si discorra degli altri esempj.

ESEM.

## E S E M P I O V.

Sia l'equazione  $ax^nydy - bx^nydy = ayyx^3dx - byyx^3dx + a^6dx - x^6dx$ , la quale divisa per  $ax^ny - bx^ny$ , si trova essere  $dy = \frac{ydx}{x} + \frac{a^6dx - x^6dx}{ax^ny - bx^ny}$ , che è il caso

dell'equazione canonica. Sarà adunque  $p = \frac{1}{x}$ ,  $q =$

$$\frac{a^6 - x^6}{ax^ny - bx^ny}, n = -1, \text{ e per la sostituzione } p dx = \frac{dz}{1-n \times z},$$

farà  $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{1-z}$ , quindi  $z = xx$ ; onde posti questi valori

nell'equazione finale canonica  $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$ , avere-

mo  $yy = xx \int \frac{a^6 - x^6 \times 2x dx}{ax^ny - bx^ny \times x^3}$ , in cui sono separate le

variabili.

27. Se l'equazione canonica fosse  $y^{n-1} dy = p dx + q y^n dx$ , essendo parimente le  $p$ , e  $q$  date in qualunque modo per  $x$ , si separano le indeterminate, ponendo  $q dx = \frac{dz}{nz}$ , e  $dx = \frac{dz}{nqz}$ ; imperciocchè fatte le sostituzioni;

farà

farà  $y^{n-1} dy = \frac{pdz}{nqz} + \frac{y^n dz}{nz}$ , cioè  $\frac{nzy^{n-1} dy - y^n dz}{z} = \frac{pdz}{qz}$ , e dividendo per  $z$ ,  $\frac{nzy^{n-1} dy - y^n dz}{zz} = \frac{pdz}{qzz}$ , ed integrando,  $\frac{y^n}{z} = \int \frac{pdz}{qzz}$ , cioè  $y^n = z \int \frac{pdz}{qzz}$ , equazione, in cui sono separate le variabili.

## E S E M P I O .

Sia l'equazione  $2aaxydy = aayydx + 2bx^3 dx$ , cioè  $ydy = \frac{bx dx}{ax} + \frac{yy dx}{ax}$ . Sarà  $n = 2$ ,  $p = \frac{bx^3}{ax}$ ,  $q = \frac{1}{ax}$ , e però avremo  $\frac{yy}{z} = \int \frac{2bx^3 dz}{aazz}$ ; ma  $qdx = \frac{dx}{ax} = \frac{dz}{ax}$ , ed  $x = z$ , adunque farà  $\frac{yy}{x} = \int \frac{2bx dx}{aa}$ , ed integrando,  $\frac{yy}{x} = \frac{bx^2}{aa} \pm c$ , curva algebraica.

Potevasi anche costruire la formola generale  $y^{n-1} dy = p dx + q y^n dx$ , ed in conseguenza la particolare dell'esempio per mezzo del metodo del num. 24.

28. Aggiungo una riflessione prima di finire questo Capo, cioè che tal volta si sviluppano le indeterminate miste, e confuse colle quantità differenziali, quando

do ci venga permesso di modificare le grandezze coefficienti, e ciò specialmente succede quando gli esponenti si formano dalli coefficienti, così portando il giro della riduzione. A principalmente luogo questo artificio ne' Problemi Fifico-Matematici, ne' quali accoppiandosi grandezze di genere affatto diverso, siamo in maggior libertà di servirsi di quelle quantità costanti, che meglio vengono al proposito.

Per un esempio mi propongo l'equazione  $x^m dx + \frac{by + yy}{x} \times \frac{cdx}{x} = ydy$ , la quale preparata giusta il metodo

del num. 24. farà  $x^m dx + \frac{bcydx}{x} = yy \times \frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x}$ . Faccio

adunque  $\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x} = \frac{dp}{p}$ , ed ô il valore di  $y = px^c$ ,

ed  $yy = ppx^{2c}$ . Questi valori opportunamente sostituiti mi danno l'equazione  $x^m dx + bcpx^{c-1} dx = x^{2c} pdp$ , e dividendo per  $x^{2c}$ , farà  $x^{m-2c} dx + bcpx^{-c-1} dx = pdp$ . Egli è evidente, che data l'eguaglianza fra gli esponenti della indeterminata  $x$ , cioè fra  $m - 2c$ , e  $-c - 1$ , le incognite sono separate, avendosi solamente a dividere l'omogeneo di comparazione  $pdp$  per il binomio  $1 + bcp$ . Ora posto  $m - 2c = -c - 1$ , ne segue, che sia  $m + 1 = c$ , quindi esposta la costante  $c$  per  $m + 1$ , abbiamo l'intento. Se la  $c$  fa figura di unità, il che non ci è vietato di supporre, farà  $m = 0$ ; e se  $c = 2$ ,  
 farà

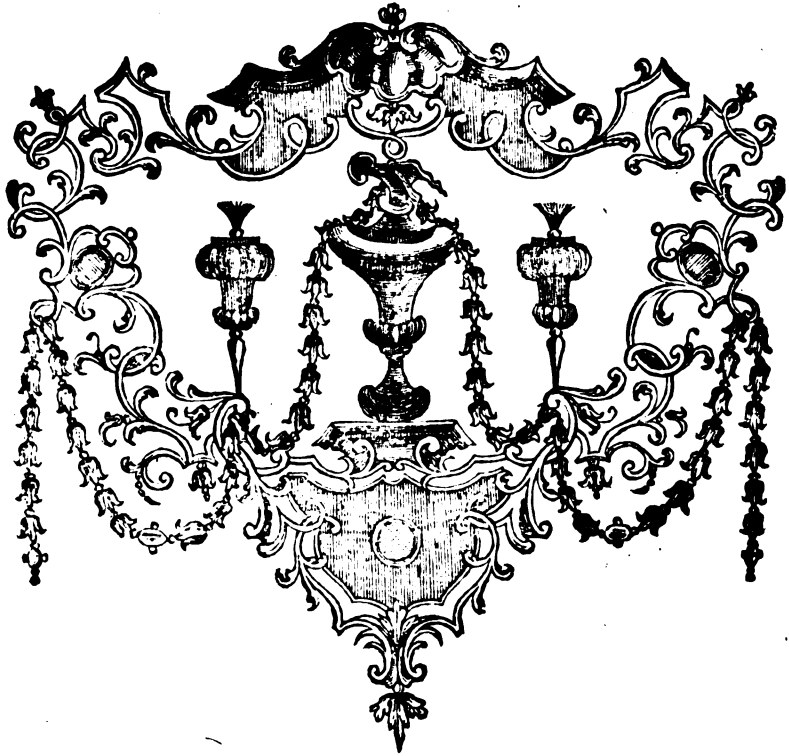


farà  $m = 1$ , e così vadasi discorrendo.

L'artificio spiegato si applichi a tutte le altre equazioni di simil genere, per esempio alla seguente

$$x^m dx + \frac{cby^n dx}{x} + \frac{gy^r dx}{x} = y^t dy, \text{ posto però } t = r - 1,$$

ovvero  $= n - 1$ , onde si possa abbreviare la formola usando i logaritmi.



CAPO

C A P O I I I.

*Della Costruzione d'altre Equazioni più limitate per mezzo di varie sostituzioni.*

29. **S**I separeranno sempre le indeterminate nell'equazione  $x^n dx \pm ay^n dy \times p = xdy - ydx \times q$ , nella quale le  $p$ , e  $q$  sono date promiscuamente per  $x$ , ed  $y$  in qualunque modo, purchè algebricamente, quando però in ogni termine della quantità  $p$  la somma degli esponenti di  $x$ , ed  $y$  sia la stessa, e così la stessa sia in ogni termine della quantità  $q$ ; non richiedendosi però, che sia la medesima in  $p$ , ed in  $q$ . Le sostituzio-

ni da farsi sono  $y = tz^{\frac{2}{n+1}}$ ,  $x = t \times \frac{1}{a^{\frac{2}{n+1}} \mp azz^{\frac{2}{n+1}}}$ . Surrogati i rispettivi valori in luogo di  $x$ ,  $dx$ ,  $y$ ,  $dy$ , e fatte le debite operazioni, arriverassi dopo lunghissimo calcolo alla seguente equazione

$$z^{n-2} dt = \frac{z^{\frac{1-n}{n+1}} dz \times q}{\frac{n}{a^{\frac{2}{n+1}} \mp azz^{\frac{2}{n+1}} \times p} .$$

Ma poichè si sa, che in ciascun termine di  $p$  la somma degli esponenti di  $x$ , ed  $y$  è eguale, ficcome

qq pure

pure in ciascun termine di  $q$ , fatte in essi ancora le sostituzioni de' valori dati per  $t$ , e per  $z$ , in ciascun termine di  $p$ , averà  $t$  la medesima potestà, siccome pure in ciascun termine di  $q$  una medesima potestà, vale a dire, che farà l'omogeneo di comparazione moltiplicato per una potestà positiva, o negativa di  $t$ , cioè farà per essa potestà diviso, o moltiplicato il primo membro, e però separate le variabili.

## E S E M P I O.

Sia l'equazione  $\frac{xdx + aydy\sqrt{y}}{t} = \frac{xdy - ydx\sqrt{a}}{t}$ ; farà  $n = 1$ ,  $p = \sqrt{y}$ ;  $q = \sqrt{a}$ , e però  $\frac{dt}{t} = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{a^3 - azz\sqrt{y}}}$ ;

ma  $y = tz^{\frac{2}{n+1}} = tz$ ; adunque farà  $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$ .

Nella stessa equazione si separano le indeterminate, quando anche sia negativo l'esponente  $n$ , cioè quando sia l'equazione  $\frac{x^{-n}dx \pm ay^{-n}dy \times p}{t} = \frac{xdy - ydx \times q}{t}$ , e le sostituzioni sono  $y = tz^{\frac{2}{1-n}}$ ,  $x = t \times \frac{1}{a^{\frac{1}{1-n}} \mp azz^{\frac{1}{1-n}}}$ ;

le

le quali ci danno l'equazione

$$t^{-n-2} dt = \frac{z^{1+n}}{1-n} dz \times \frac{q}{p} , \text{ la stessa di quella di}$$

$$\frac{a^2 \pm azz}{1-n}$$

sopra , mutati i segni alla  $n$  .

E poichè l'equazione è anche esprimibile così:

$$y^n dx \pm ax^n dy \times \frac{p}{x^n y^n} = xdy - ydx \times q , \text{ ne viene, che}$$

questa pure per la stessa sostituzione è costruibile.

30. Sia più generalmente l'equazione

$$x^n dx \pm ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy \times p = xdy + cydx \times q . \text{ Si separa-}$$

no sempre le variabili, fatte le sostituzioni di  $y = t^s z^{\frac{r}{n+1}}$ ,

$x = t^{\frac{-s}{c}} \times a \pm acz^{\frac{-r}{c} \frac{1}{n+1}}$  , (  $s$  , ed  $r$  sono numeri a piacere ) supposta però la condizione , che le quantità  $p$  ,  $q$  sieno date algebricamente, e in modo tale , che in ciascun termine della quantità  $p$  l'esponente della  $y$  preso tante volte , quanto è il numero  $c$  , superi , o sia superato dall'esponente della  $x$  col medesimo eccesso , e così in ciascun termine della quantità  $q$  , non importando poi , che l'eccesso in  $p$  sia lo stesso , che in  $q$  .

qq 2

Così,

Così, per esempio, essendo  $c = 3$ , sia  $p = byx^4 + fy^2x^{25}$  ec., e  $q$  sia  $= gy^{\frac{1}{2}}x^3 - by^{10}x^{\frac{63}{2}}$  ec. E' facile a vedere, che la  $c$  non può essere zero.

Fatte le debite sostituzioni in luogo della  $x$ , e della  $y$  nell'equazione proposta, avremo la seguente equazione

$$-\frac{s}{t} t^{\frac{-sn-c-cs}{c}} dt = \frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-n-1}{n+1}} dz \times \frac{q}{p}.$$

$$\frac{n}{-rn+1} \frac{1}{c}$$

$$a \pm acz$$

## ESEMPIO.

Sia  $\frac{xdx + ay^{-3}dy}{y} \times \frac{1}{y} = \frac{xdy + ydx}{x} \times x$ . E sia  $s = 1$ ,

$r = 2$ , farà  $n = 1$ ,  $c = 1$ ,  $p = \frac{1}{y}$ ,  $q = x$ , e fatte le sostituzioni nell'ultima equazione di sopra ritrovata, avremo  $-t^{-3} dt = \frac{dz \times xy}{a + az^{-2}}$ . Ma per le sostituzioni fat-

$$\frac{1}{a + az^{-2}}$$

te,  $x = t^{-1} \times \frac{1}{a + az^{-2}}$ , ed  $y = tz$ , dunque  $xy = z \times \frac{1}{a + az^{-2}}$ , onde avremo  $-\frac{dt}{t^3} = zdz$ , il che ec.

31. Ma più generalmente ancora sia l'equazione

$x^n dx \pm ay^c dy \times p = fx dy + cy dx \times q$ , la quale comprende come casi particolari le due canoniche dei numeri antecedenti, cioè quella del num. 30., quando sia  $f=1$ ; e quella del num. 29., quando sia  $f=1, c=-1$ .

Si separano le indeterminate per mezzo della sot-

tuzione  $y = t^{\frac{s}{f}} z^{\frac{r}{n+1}}$ , ed  $x = t^{-\frac{s}{c}} \times a \pm \frac{acz}{f}^{\frac{-r}{n+1}}$ ,

essendovi però la condizione circa le quantità  $p, e q$ , che in esse l'esponente della  $y$  moltiplicato per  $c$  superi, o sia superato dall'esponente della  $x$  moltiplicato per  $f$  col medesimo eccesso in ciascun termine. Le stesse quantità  $p, q$  possono anche essere frazioni, o miste di frazioni, ed interi razionali, o irrazionali, comunque sianfi; e faranno sempre nelle equazioni separabili le indeterminate, purchè le  $p, e q$  sieno in tal modo date per  $x$ , ed  $y$ , che fatte le sostituzioni assegnate, nascano in luogo loro quantità tali, che sieno il prodotto di due, una delle quali contenga la  $z$ , e non la  $t$ ; l'altra la  $t$ , e non la  $z$ .

Fatte le dette sostituzioni, avremo la formola

$$-\frac{s}{c} t^{\frac{-fc - fsn - sc}{cf}} dt = \frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r - fn - f}{fn + f}} dz \times \frac{q}{p} \times \frac{a \pm \frac{acz}{f}}{t^{\frac{-r}{n+1}}}$$

ESEM-

## ESEMPIO I.

Sia  $\frac{axdx + ay^2dy}{y} \times y = -\frac{3xdy + ydx}{ax} \times ax$ . E sia, come sopra,  $s = 1, r = 2$ , farà  $f = -3, c = 1, n = 2$ ,  $q = ax, p = y$ , e fatte le sostituzioni nell'ultima formola ritrovata di sopra, avremo

$$-t^{-\frac{8}{3}} dt = \frac{\frac{2}{3} z^{-\frac{11}{9}} dz \times \frac{ax}{y}}{\frac{a - az^{-\frac{2}{3}}}{3}}. \text{ Ma } y = t^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{2}{9}},$$

$$x = t^{-1} \times \frac{a - az^{-\frac{2}{3}}}{3}^{\frac{1}{3}}, \text{ dunque farà } -\frac{dt}{t}$$

$$\frac{2adz}{3z \times \frac{a - az^{-\frac{2}{3}}}{3}^{\frac{1}{3}}}, \text{ il che ec.}$$

$$3z \times \frac{a - az^{-\frac{2}{3}}}{3}^{\frac{1}{3}}.$$

## ESEMPIO II.

$$\text{Sia } \frac{x^{\frac{1}{2}} dx + ay^{-2} dy}{y^{\frac{1}{3}} x - yxx} \times ay^{\frac{1}{2}} x + yyx^{\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{2xdy + 3ydx}{y^{\frac{1}{3}} x - yxx}; \text{ e sia } s = 1, r = 1, \text{ farà } c = 3,$$

$c = 3, f = 2, n = \frac{1}{2}, p = ay^{\frac{1}{2}}x + yyx^{\frac{13}{4}}, q = y^{\frac{1}{3}}x - yxx$ , e fatte le sostituzioni, sarà

$$-\frac{1}{3} dt = \frac{2}{3} z^{-\frac{5}{9}} dz \times \frac{a + 3az^{-\frac{1}{3}}}{2} - \frac{2}{3} z^{-\frac{1}{3}} dz \times \frac{a + 3az^{-\frac{1}{3}}}{2},$$

$$\frac{19}{z^{12}} \frac{az^{\frac{1}{6}} \times \frac{a + 3az^{-\frac{1}{3}}}{2} + z^{\frac{2}{3}} \times \frac{a + 3az^{-\frac{1}{3}}}{2}}{z^{\frac{13}{6}}}$$

in cui sono separate le variabili, il che ec.

32. Nelle equazioni 1.  $pxy^{n-1} dy = py^n dx + qdx$

2.  $pxy^{n-1} dy = -py^n dx + qdx$

3.  $apxy^{n-1} dy = bpy^n dx + qdx$

4.  $apxy^{n-1} dy = -bpy^n dx + qdx$

essendo le  $p$ , e  $q$  date in qualunque maniera per  $x$ , si separano le indeterminate, ponendo rispetto alla prima  $y = xz$ ; rispetto alla seconda  $y = \frac{z}{x}$ ; rispetto alla terza

$y = x^{\frac{b}{a}} z$ ; rispetto alla quarta  $y = x^{-\frac{b}{a}} z$ .

**E S E M P I O.**

Sia l'equazione  $2bbxydy - 2x^3yydy = bx^4dx - 3bby^3dx + 3xxy^3dx$ , che scrivo così:  $bb - xx \times 2xydy = bx^4dx + bb - xx \times -3y^3dx$ . Riferita questa all'ultima delle



delle quattro canoniche, farà  $p = bb - xx$ ,  $a = 2$ ,  $n = 3$ ,  
 $b = 3$ ,  $q = bx^4$ . Adunque si dovrà porre  $y = \frac{z}{x^{\frac{3}{2}}}$ ,  $dy =$

$$\frac{\frac{3}{2} dz - \frac{3}{2} z x^{-\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad yy = \frac{zz}{x^3}, \quad y^3 = \frac{z^3}{x^{\frac{9}{2}}}, \quad \text{e fatte le sosti-}$$

tuzioni, averemo  $2bbx - 2x^3 \times \frac{\frac{3}{2} z z dz - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} z^3 dx}{x^6} =$

$$bx^4 dx + \frac{3bb - 3xx}{x^{\frac{9}{2}}} \times -\frac{z^3 dx}{x^{\frac{9}{2}}}, \quad \text{cioè}$$

$$\frac{2bb - 2xx}{x^{\frac{17}{2}}} \times x z z dz - \frac{3}{2} z^3 dx = bx^{\frac{17}{2}} dx + \frac{3bb - 3xx}{x^{\frac{17}{2}}} \times -z^3 dx, \quad \text{e facendo le attuali moltipliche, farà}$$

$$2bbx z z dz - 2x^3 z z dz = bx^{\frac{17}{2}} dx, \quad \text{cioè}$$

$$z z dz = \frac{bx^{\frac{17}{2}} dx}{2bbx - 2x^3}.$$

33. Sia l'equazione  $axy + bydx + cy^n x^{m-1} dx + fx^m y^{n-1} dy = 0$ . In questa generalmente si separano le indeterminate, ponendo  $x = u^{n-1} z^{n-1}$ , ed  $y = z^{\frac{1}{n-1} - m}$ , poichè fatte le dovute operazioni, si arriva all'equazio-

ne

$$\frac{n-1-m}{n-1} \times \frac{adz + fu^{mn-m-n+1} dz + n-1 \times bdz + cu^{mn-m-n+1} dz}{n-1 \times -bzu^{-1} du - czu^{mn-m-n} du}, \text{ cioè } \frac{dz}{z} =$$

$$\frac{n-1 \times -bu^{-1} du - cu^{mn-m-n} du}{1-m \times a + fu^{mn-m-n+1} + n-1 \times b + cu^{mn-m-n+1}}$$

ESEMPIO.

Sia l'equazione  $a^3 x dy - b^3 y dx = cyyx dx - fxx y dy$ . Sarà dunque  $n = 2, m = 2$ , quindi pongo  $x = \frac{uz}{a}$ , ed

$y = \frac{ay}{z}$ , cioè  $x = \frac{au}{y}$ , e però  $dx = \frac{ay du - audy}{yy}$ , onde

fatte le dovute sostituzioni, avremo

$$\frac{a^4 u dy}{y} - b^3 \times \frac{ay du - audy}{y} = \frac{caay u du}{y} - \frac{caau dy}{y} - \frac{faau dy}{y}$$

cioè  $a^4 u dy + ab^3 u dy + aacy u dy + faau dy = ab^3 y du + aacy u dy$ ,

e però  $\frac{dy}{y} = \frac{ab^3 du + aacy u}{a^4 u + ab^3 u + aacy u + aafuu}$ .

34. Sia l'equazione  $\frac{y dx}{bx^{\frac{1}{m}} + ay^n x^r} = dy$ ; e più

generalmente  $\frac{x^{m-1} y dx}{bx^{\frac{1}{m}} + ay^n x^r} = dy$ . Si separano le indetermi-

rr

nate

nate ponendo  $\sqrt[n]{bx^t + ay^n x^r} = zx^{mt}$ , quindi

$$y = \frac{z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ e per\`o } dy =$$

$$\frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1-n}{n} z^{\frac{1}{m}-1} dz + t-r \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + t-r \times -bx^{t-r-1} dx =$$

$$\frac{x^{-1} dx \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}} z}, \text{ posto nell'equazione}$$

generale proposta il valore di  $y$ , ed  $y^n$ , quindi divi-

$$\text{dendo per } \frac{z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ far\`a}$$

$$\frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} z^{\frac{1}{m}-1} dz + t-r \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + t-r \times -bx^{t-r-1} dx =}{z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}$$

$$\frac{x^{-1} dx}{z},$$

cio\`e

cioè  $\frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}} dz + t-r \times z^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx + t-r \times -bz x^{-1} dx =$   
 $nz^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx - nbx^{-1} dx$ , e però

$$\frac{z^{\frac{1}{m}} dz}{z^{\frac{1}{m}} dz} = \frac{dx}{x}$$

$$mnz^{\frac{1}{m}} + mr - mt \times z^{\frac{1}{m} + 1} + mr - mt \times -bz - mnb$$

Se vi fossero termini con segni negativi, si proceda nello stesso modo, e nell'equazione finale non vi farà altra differenza, che ne' segni stessi.

35. Anche presa l'equazione più universale così

$$\frac{y^u dx}{bx^t + ay^n x^r} = c x^{\frac{ut - mt - t + r + n - ur}{m}} dy$$

si separano le

indeterminate colla stessa sostituzione.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione  $\frac{aydx}{\sqrt{bbxx - a^3y}} = bdy$ . Pongo

$$\sqrt{bbxx - a^3y} = xz, \text{ e però } y = \frac{bbxx - z^2xx}{a^3}, \text{ e } dy =$$

$$\frac{2bbxdx - 2zxdz}{a^3}, \text{ e fatte le sostituzio-}$$

ni,

ni,

$$\text{ni, } \frac{aadx}{xz} \times \frac{bbxx - zzzx}{a^3} = \frac{2b^3 xdx - 2bz zxdx - 2bxxzdz}{a^3},$$

cioè  $aabbx dx - aazzx dx = 2b^3 x dx - 2bz^3 x dx - 2bxxz dz$ , o sia  $2bxxz dz = 2b^3 x dx - 2bz^3 x dx + aazzx dx - aabbx dx$ , e però

$$\frac{2bzz dz}{2b^3 z - 2bz^3 + aazz - aabb} = \frac{dx}{x}.$$

## E S E M P I O I I.

Sia l'equazione  $\frac{xy dx}{\sqrt{-bbx^4 + a^3 xyy}} = \frac{dy}{b}$ . Pongo

$$\sqrt{-bbx^4 + a^3 xyy} = zxx, \text{ e però } y = \sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}, \text{ e } dy =$$

$\frac{x^3 z dz + \frac{3}{2} z z x x dx + \frac{3}{2} b b x x dx}{a^3 \sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}}$ . Fatte pertanto le sostitu-

$$\text{zioni, averassi } \frac{x dx}{zxx} \sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}} =$$

$$\frac{x^3 z dz + \frac{3}{2} z z x x dx + \frac{3}{2} b b x x dx}{a^3 b \sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}},$$

cioè

cioè  $bzx\,x\,dx + b^3\,x\,x\,dz = x^3\,z\,z\,dz + \frac{3}{2}\,z^3\,x\,x\,dx + \frac{3}{2}\,bbz\,x\,x\,dx$ ,

o fia  $bzx\,x\,dx + b^3\,x\,x\,dx - \frac{3}{2}\,z^3\,x\,x\,dx - \frac{3}{2}\,bbz\,x\,x\,dx = x^3\,z\,z\,dz$ ,

e però  $\frac{dx}{x} = \frac{z\,z\,dz}{b\,z\,z - \frac{3}{2}\,z^3 - \frac{3}{2}\,bbz + b^3}$ .

36. Con la stessa sostituzione usata di sopra si separano le indeterminate anche nell'equazione

$$\frac{y^u\,dy}{bx^t + ay^n\,x^r} = cx^{\frac{tu - n - tmn - ru + t - r}{n}}\,dx. \text{ Pongo adun-}$$

que  $bx^t + ay^n\,x^r = x^{mt}\,z$ , farà  $y =$

$$\frac{x^{t-r}\,z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ e } dy =$$

$$\frac{x^{t-r}\,z^{\frac{1-m}{m}}\,dz + \frac{t-r}{n} \times z^{\frac{1}{m}}\,x^{t-r-1}\,dx + \frac{r-t}{n} \times bx^{t-r-1}\,dx \times x^{t-r}\,z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}},$$

e fatte le sostituzioni, averassi l'equazione

$$\frac{x^{t-r}\,z^{\frac{1-m}{m}}\,dz + \frac{t-r}{n} \times z^{\frac{1}{m}}\,x^{t-r-1}\,dx + \frac{r-t}{n} \times bx^{t-r-1}\,dx \times x^{t-r}\,z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{u+1}{n}}\,x^{tm}\,z} =$$

$cx^{\frac{tu - n - tmn - ru + t - r}{n}}\,dx$ . Dividendo pertanto il numero-  
rato-

ratore, e denominatore del primo membro dell'equazione per  $x^{tm}$ , e moltiplicandola tutta per  $a^{\frac{u+1}{n}} z$ , ed

in luogo di  $x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r} z^{\frac{u+1-n}{n}}$  scrivendo

$x^{\frac{tu-tn+t-ru+nr-r}{n}} \times z^{\frac{1}{m}} - b z^{\frac{u+1-n}{n}}$ , che è lo stesso, ed unendo le dimensioni della lettera  $x$ , troveremo esse-

re l'equazione divisibile per  $x^{\frac{ut-n-tmn-ru+t-r}{n}}$ , e divisa farà

$$\frac{xz^{\frac{1-m}{mn}} dz + \frac{t-r}{n} \times z^{\frac{1}{m}} dx + \frac{r-t}{n} \times bdx \times z^{\frac{1}{m}} - b z^{\frac{u+1-n}{n}}}{z^{\frac{1}{m}} - b} =$$

$ca^{\frac{u+1}{n}} z dx$ , e finalmente di nuovo dividendo per

$$\frac{z^{\frac{1}{m}} - b}{z^{\frac{1}{m}} - b}, \text{ farà}$$

$$\frac{xz^{\frac{1-m}{mn}} dz}{z^{\frac{1}{m}} - b} = \frac{r-t}{n} \times z^{\frac{1}{m}} dx + \frac{t-r}{n} \times bdx + ca^{\frac{u+1}{n}} z dx \times z^{\frac{1}{m}} - b z^{\frac{n-u-1}{n}}$$

$$\text{cioè } \frac{dx}{x} = \frac{z^{\frac{1-m}{mn}} dz}{mnca^{\frac{u+1}{n}} z \times z^{\frac{1}{m}} - b + \frac{n-u-1}{n} + \frac{mr-mt}{n} \times z^{\frac{1}{m}} + \frac{mt-mr}{n} \times b}$$

ESEM-

ESEMPIO.

Sia l'equazione  $\frac{y^3 dy}{\sqrt{bbxx - aaxy - abxy}} = \frac{xx dx}{c}$ . Pon-

go  $\sqrt{bbxx - aaxy - abxy} = xz$ , e però  $y = \frac{bbxx - zzzx}{aa + ab} =$

$\frac{bbx - zzx}{aa + ab}$ , e  $dy = \frac{bbdx - zzdxx - 2xzdz}{aa + ab}$ . Fatte dun-

que le sostituzioni, farà  $\frac{bbx - zzx}{aa + ab}^3 \times \frac{bbdx - zzdxx - 2xzdz}{aa + ab} =$

$\frac{xx dx}{c}$ , ed in luogo di  $\frac{bbx - zzx}{aa + ab}^3$  scrivendo  $x^3 \times \frac{bb - zz}{aa + ab}^3$ ,

e moltiplicando tutta l'equazione per  $\frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times xz$ ,  
averemo

$x^3 \times \frac{bb - zz}{aa + ab}^3 \times \frac{bbdx - zzdxx - 2xzdz}{aa + ab} = \frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{xx^3 dx}{c}$ ,

e dividendo per  $x^3 \times \frac{bb - zz}{aa + ab}^3$ , farà  $\frac{bbdx - zzdxx - 2xzdz}{aa + ab} =$   
 $\frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{bb - zz}{aa + ab}^{-3} \times \frac{z dx}{c}$ , cioè

$bbdx - zzdxx + \frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{bb - zz}{aa + ab}^{-3} \times -\frac{z dx}{c} = 2xzdz$ ,

c



e però  $\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{bb - zz - \frac{z}{c} \times \overline{bb - zz}^{-3} \times \overline{aa + ab}^4}$ .

37. Servirà la medesima sostituzione similmente

per l'equazione più generale  $\frac{\overline{bx^t + fy^n x^r}^i \times y^u dy}{\overline{bx^t + ay^n x^r}^m} =$

$\frac{cx}{n} \frac{dx}{x} .$  Anzi servirà pure anco per l'equazione  $\frac{y^{n-1} dy}{\overline{bx^t + cx^r + ay^n x^r}^m} = fx^{t-r-1-mt} dx,$

ponendo  $\overline{bx^t + cx^r + ay^n x^r}^m = x^{mt} z$ ; la quale, se sia  $m = 1$ , farà un caso particolare del num. 27., e se sia  $c = 0$ , farà un caso particolare del num. 36. Di più si potrà costruire anche l'equazione

$$\frac{\overline{gx^t + bx^r + ky^n x^r}^c \times y^{n-1} dy}{\overline{ax^t + bx^r + cy^n x^r}^m} = fx^{t-r-1+ct-mt} dx,$$

quando però sia  $cb = bk$ , usando della stessa sostituzione

$$\overline{ax^t + bx^r + cy^n x^r}^m = x^{mt} z.$$

Che se faranno in oltre  $b = 0$ ,  $c = 0$ , l'equazione farà un caso particolare della prima di questo numero.

38. Si costruiranno le equazioni

$$\frac{ady}{b + cy^n + fx^u} = gy^{1-n} dx,$$

$$\frac{ay^{n-1} dy}{b + cy^n + fx^m} = gy^{m-1} dx,$$

ponendo per la prima  $\frac{cy^n + fx^u}{c^n} = z$ , e per la seconda  $\frac{cy^n + fx^m}{c^n} = z$ . E quanto alla prima, farà dunque

$$y = \frac{z^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} - fx^{\frac{1}{n}}, \text{ e } dy = \frac{1}{n} \times \frac{z^{\frac{1}{n}-1} dz}{c^{\frac{1}{n}}} - f dx,$$

e però fatte le sostituzioni, avremo  $az^{\frac{1-n}{n}} dz = nbcgz dx + nucgz dx + auf dx$ , cioè

$$\frac{az^{\frac{1-n}{n}} dz}{nbcgz + nucgz + auf} = dx. \text{ Rispetto alla seconda avremo}$$

$$y = \frac{z^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} - fx^m, \text{ e però } dy =$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{z^{\frac{1}{n}-1} dz}{c^{\frac{1}{n}}} - mfx^{m-1} dx, \text{ e fatte}$$

ff le

le sostituzioni,  $x^{m-1} dx = \frac{az^{\frac{1-u}{n}} dz}{bcgnu + cgnuz + mafu}$ .

Ma anche se l'equazione più generalmente presa sia  $\frac{ay^{n-1} dy}{b + cy^n + p^u} = gqdx$ , essendo in qualunque modo

le  $p$ , e  $q$  date per  $x$ , e le costanti, purchè sia  $q = \frac{dp}{dx}$ , si separeranno le indeterminate ponendo simil-

mente  $cy^n + p^u = z$ , Imperciocchè sarà  $y = \frac{z^{\frac{1}{n}} - p}{c^{\frac{1}{n}}}$ , e

però  $dy = \frac{\frac{1}{n} \times z^{\frac{1}{n} - 1} dz - p \times \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1} dz - dp}{c^{\frac{1}{n}}}$ , e fatte le

sostituzioni, sarà l'equazione  $az^{\frac{1-u}{n}} dz = nbcguqdx + ncguzqdx + audp$ ; ma si suppone  $dp = qdx$ , adunque sarà

$$\frac{az^{\frac{1-u}{n}} dz}{nbcgu + ncguz + au} = qdx.$$

ESEM.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione  $a^3 dy = 6b^3 dx - 3bbdx \sqrt{cy + bx}$ ,  
 cioè  $\frac{a^3 dy}{2b - \sqrt{cy + bx}} = 3bbdx$ . Posta  $\sqrt{cy + bx} = z$ , farà  
 $y = \frac{zz - bx}{c}$ ,  $dy = \frac{2zdz - bdx}{c}$ , e fatte le sostituzioni,  
 $\frac{2a^3 z dz - a^3 b dx}{2bc - cz} = 3bbdx$ , o sia  $2a^3 z dz = 6b^3 c dx -$   
 $3bbcz dx + a^3 b dx$ , e però  $\frac{2a^3 z dz}{6b^3 c - 3bbcz + a^3 b} = dx$ .

ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $\frac{ayydy}{b + \sqrt[3]{y^3 + aax - bxx}} = aadx -$   
 $2bx dx$ . Pongo  $\frac{y^3 + aax - bxx}{3} = z$ , farà  $y =$   
 $\sqrt[3]{z^3 - aax + bxx}$ , e però  $dy =$   
 $\frac{1}{3} \times \frac{3zz dz - aadx + 2bx dx}{z^3 - aax + bxx}$ , quindi fatte le sostituzioni;  
 $\frac{1}{3} \times \frac{3zz dz - aadx + 2bx dx}{z^3 - aax + bxx} =$

f 1 2

farà

farà l'equazione  $\frac{a}{3} \times \frac{3zzdz - aadx + 2bx dx}{b+z} = aadx -$

$2bx dx$ , cioè  $3azzdz = a^3 dx - 2abx dx + 3aab dx - 6bbx dx + 3aaz dx - 6bzx dx$ , e dividendo per  $a + 3b + 3z$ , farà  $\frac{3azzdz}{a+3b+3z} = aadx - 2bx dx$ .

39. L'equazione, o formola canonica  $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$  non à generalmente separabili le indeterminate, qualunque siasi l'esponente  $m$ ; le à però separabili in infiniti casi, cioè infiniti sono i valori dell'esponente  $m$ , posti i quali, succede la bramata separazione.

Per determinarli mi servo di un metodo simile a quello del num. 23. Si ponga  $y = Ax^p + x^r t$ ; (la quantità  $A$ , e gli esponenti  $p$ ,  $r$  sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso, e la  $t$  è una nuova variabile) farà adunque  $dy = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$ , ed  $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r}t + tt x^{2r}$ , quindi sostituiti questi valori nella proposta formola, daranno la seguente  $ax^m dx + cAAx^{2p+n} dx + 2cAtx^{p+r+n} dx + ctt x^{2r+n} dx = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$ . Si supponga  $cAA = pA$ ,  $2p+n = p-1$ ,  $r = 2cA$ , cioè  $p = -n-1$ ,  $A = \frac{-n-1}{c}$ ,  $r = -2n-2$ , con

che in quest'ultima formola spariranno il secondo, terzo, quinto, e sesto termine, e si ridurrà ad esse-

re

re  $ax^m dx + ctt x^{-3n-4} dx = x^{-2n-2} dt$ , cioè dividendo per  $x^{-2n-2}$ ,  $ax^{m+2n+2} dx + ctt x^{-n-2} dx = dt$ , o sia (D)  $ax^K dx + ctt x^X dx = dt$ , fatto  $K = m + 2n + 2$ ,  $X = -n - 2$ .

Ripiglio la proposta equazione  $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$ , la quale ponendo  $y = \frac{1}{z}$ , si trasformi in quest'altra  $azzx^m dx + cx^n dx = -dz$ , in cui si ponga, come sopra,  $z = Bx^q + x^i u$  ( $B, q, i$  sono similmente costanti da determinarsi, ed  $u$  una nuova incognita) sarà dunque  $dz = qBx^{q-1} dx + iux^{i-1} dx + x^i du$ ,  $zz = BBx^{2q} + 2Bx^{q+i}u + uux^{2i}$ , e sostituiti questi valori, avremo  $aBBx^{2q+m} dx + 2aBux^{q+i+m} dx + auux^{2i+m} dx + cx^n dx = -qBx^{q-1} dx - iux^{i-1} dx - x^i du$ . Si supponga  $aBB = -Bq$ ,  $2q + m = q - 1$ ,  $-i = 2aB$ , cioè  $q + m = -1$ ,  $B = \frac{m+1}{a}$ ,  $i = -2m - 2$ ,

con che in quest'ultima formola spariranno il primo, secondo, quinto, e sesto termine, e si ridurrà ad essere  $auux^{-3m-4} dx + cx^n dx = -x^{-2m-2} du$ , cioè dividendo per  $x^{-2m-2}$ ,  $cx^{2m+n+2} dx + auux^{-m-2} dx = -du$ , o sia (G)  $cx^s dx + auux^v dx = -du$ , fatto  $s = 2m + n + 2$ ,  $v = -m - 2$ .

Ora nella proposta equazione sono separabili le indeterminate, quando sia  $m = n$ ; adunque anche nelle formole D, G saranno separabili le indeterminate, quando sia  $m + 2n + 2 = -n - 2$ ,  $2m + n + 2 = -m - 2$ ; dal

dal che si ricavano due valori di  $m$ , cioè  $m = -3n - 4$ ,  
 $m = -\frac{n-4}{3}$ , posti i quali, succede la separazione

delle indeterminate. Poichè adunque nella proposta  
 equazione si separano le indeterminate quando sia  
 $m = -\frac{n-4}{3}$ , si separeranno anche nelle formole  $D$ ,

G quando sia  $K = -\frac{X-4}{3}$ ,  $L = -\frac{Y-4}{3}$ , dal che si  
 ricavano altri due valori di  $m$ , cioè  $m = -\frac{5n-8}{3}$ ,  
 $m = -\frac{3n-8}{5}$ .

Ripetendo lo stesso discorso, si averanno infiniti  
 altri valori della  $m$ ; come a dire  $m = -\frac{7n-12}{5}$ ,  
 $m = -\frac{5n-12}{7}$ ,  $m = -\frac{9n-16}{7}$ ,  $m = -\frac{7n-16}{9}$  ec.,  
 vale a dire generalmente  $m = \frac{2b \pm 1}{2b \mp 1} \times -n - 4b$ , preso per

$b$  un qualunque numero intero positivo principiando  
 dall'unità; posti i quali valori nella proposta equazione,  
 ci daranno separabili le indeterminate.

Si aggiunga, essere in oltre separabili le indeter-  
 minate nella equazione proposta, quando l'esponente,  
 $m$  sia tale, che col metodo del num. 19. possa essa ri-  
 durfi ad essere il caso del num. 14.

Sa-

Sarebbe questo il luogo di fare uso di due dissertazioni del dottissimo Signor Eulero inserite negli Atti dell' Accademia di S. Pietro-Burgo Tomo 6., ma perchè la sottile maniera, con cui procede l'Autore, mi sembra oltrepassare i limiti, che io mi sono prefissa di una semplice Instituzione, lascerò, che a suo talento la veggano i Lettori nel citato libro,

P R O B L E M A I.

40. *Ritrovare la curva, la di cui sotttangente sia eguale al quadrato dell'ordinata diviso per una costante.*

Poste le assisse =  $x$ , le ordinate =  $y$ , la sotttangente è sempre  $\frac{y dx}{dy}$ , dunque deve essere eguale ad  $\frac{yy}{a}$ , e però avremo l'equazione  $\frac{y dx}{dy} = \frac{yy}{a}$ , onde  $adx = ydy$ , ed integrando  $ax = \frac{yy}{2}$ , o sia  $2ax = yy$ , Parabola apolloniana.

Se la sottotangente dovesse essere eguale alla doppia assissa, averebbesi l'equazione  $\frac{y dx}{dy} = 2x$ , e però  $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$ , ed integrando  $\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln a = \ln y$  (aggiungo la costante  $\frac{1}{2} \ln a$  per adempire la legge degli omogenei),  
cioè



cioè  $l\sqrt{ax} = ly$ , e togliendo i logaritmi,  $\sqrt{ax} = y$ ,  
cioè  $ax = yy$ , parabola pure apolloniana.

Debba essere costante la sottotangente, farà  $\frac{ydy}{dx} = a$ ,  
cioè  $ydy = adx$ , ed integrando  $\frac{yy}{2} = ax$ , o sia  $yy = 2ax$ ,  
parabola pure apolloniana.

Debba essere la sottotangente tripla dell'assissa, farà  
 $\frac{ydx}{dy} = 3x$ , cioè  $\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y}$ , ed integrando  $l\sqrt[3]{aax} = ly$ ,  
o sia  $aax = y^3$ , parabola prima cubica.

Debba essere la sottotangente multipla dell'assissa se-  
condo un qualunque numero  $m$ , farà  $\frac{ydx}{dy} = mx$ , cioè

$\frac{dx}{mx} = \frac{dy}{y}$ , ed integrando  $l\sqrt[m]{a^{m-1}x} = ly$ , o sia  
 $a^{m-1}x = y^m$ , curva del genere delle parabole.

Debba essere la sottotangente  $= \frac{2ax + xx}{a+x}$ , farà l'e-  
quazione  $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a+x}$ , cioè  $aydx + yxdx = 2axdy +$   
 $xxdy$ , o sia  $\frac{adx + xdx}{2ax + xx} = \frac{dy}{y}$ , ed integrando  $ly =$   
 $\frac{1}{2} l \frac{2ax + xx}{2ax + xx}$ , e però  $xx + 2ax = yy$ , equazione all'iper-  
bola.

Deb-

Debba essere la sottangente =  $\frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$ , farà

l'equazione  $\frac{ydx}{dy} = \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$ , cioè  $ayydx + 3yxxdx =$

$2axydy - 3x^3dy$ . Secondo ciò, che è stato detto al num. 18. procuro di ridurre questa equazione al caso del num. 14.; pongo adunque  $y = \frac{zx}{a}$ ,  $dy = \frac{zdz}{a}$ ,

fatte le sostituzioni, farà  $z^4dx + 3zzxxdx = 4xz^3dz - 6x^3zdz$ , ed eccola ridotta al suddetto caso; quindi si separeranno le indeterminate, se si porrà  $z = \frac{xp}{a}$ ,  $dz = \frac{xdp + pdx}{a}$ , e fatte le sostituzioni, farà

$$\frac{p^4x^4dx}{a^4} + \frac{3ppx^4dx}{aa} = \frac{4x^4p^3}{a^3} \times \frac{xdp + pdx}{a} -$$

$$\frac{6x^4p}{a} \times \frac{xdp + pdx}{a}, \text{ cioè } 9aapdx - 3p^3dx = 4xppdp - 6aaxdp, \text{ e però } \frac{dx}{x} = \frac{4ppdp - 6aaxdp}{9aap - 3p^3}, \text{ ed integrando,}$$

$$lx = \frac{lm}{\sqrt[3]{p^4 - 3aapp}}, \text{ e restituito il valore di } p, \text{ cioè}$$

$$a\sqrt[3]{ay}, \text{ farà } x = \frac{m}{\sqrt[3]{a^6yy - 3a^3yxx}}, \text{ cioè finalmente.}$$

$$a^6yy - 3a^3yxx = mx.$$

t t

Le

Le due sostituzioni fatte di  $y = \frac{zz}{a}$ , e di  $z = \frac{xp}{a}$ ,  
per separare le indeterminate, ci fanno vedere, che  
sul bel principio bastava farne una sola, cioè  $y = \frac{xxpp}{a^3}$ ,

Ma assai più speditamente si otterrà l'intento scri-  
vendo l'equazione così:  $3yxxdx + 3x^3dy = 2axydy -$   
 $ayydx$ , la quale divisa per  $xx$  farà  $3ydx + 3xdy =$   
 $\frac{2axydy - ayydx}{xx}$ , ed integrando,  $3xy = \frac{avy}{x}$ , cioè  $\frac{ay}{x} =$   
 $xx$ , parabola apolloniana, quando si ometta la co-  
stante  $m$ .

Debba esser la sottangente  $= \frac{4x^3 - axy}{3xx - ay}$ , farà l'e-  
quazione  $\frac{4x^3 - axy}{3xx - ay} = \frac{ydx}{dy}$ , cioè  $4x^3dy - axydy =$   
 $3xxydx - ayydx$ , che scrivo in quest' altra maniera:  
 $4x^3dy - 3yxxdx = axydy - ayydx$ . Osservo, che il se-  
condo membro farebbe integrabile se fosse diviso per  
 $xy$ ; divido adunque tutta l'equazione, onde sia  
 $\frac{4x^3dy}{y} - \frac{3yxxdx}{xx} = \frac{axydy}{y} - \frac{ayydx}{y}$ , pongo l'integrale di esso  
secondo membro  $\frac{ay}{x} = z$ , e fatta svanire dall'equazione  
la  $y$ , farà esser  $4x \times \frac{xdz + zdx}{xx} - 3zxdx = dz$ ,

cioè

cioè  $\frac{4xdz + zdx}{z} = dz$ , la quale si potrà costruire col

metodo del num. 14., o pure preparata giusta il metodo del num. 24., farà  $x \times \frac{4dz + dx}{z} = dz$ . Faccio

adunque  $\frac{4dz}{z} + \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$ , ed integrando  $lz^4x = la^4p$ ,

o sia  $z^4x = a^4p$ , e però fatta svanire dall'equazione finale la  $x$ , avremo finalmente  $\frac{a^4p}{z^4} \times \frac{dp}{p} = dz$ , cioè

$a^4dp = z^4dz$ , ed integrando,  $a^4p = \frac{z^5}{5}$ , in cui restitui-

to il valore di  $p$ , indi quello di  $z$ , farà  $xx = \frac{ay}{5}$ , parabola apolloniana.

Debba esser la fottangente  $= \frac{\overline{a+x} \overline{la+x}}{a+la+x}$ , farà

l'equazione  $\frac{\overline{a+x} \overline{la+x}}{a+la+x} = ydx$ , cioè  $\frac{dy}{y} = \frac{adx + dx \overline{la+x}}{a+x \overline{la+x}}$ .

Per passare all'integrazioni, pongo  $\overline{a+x} \overline{la+x} = z$ , e però  $dz = dx \overline{la+x} + adx$ ; (supposta la logaritmica della fottangente =  $a$ ) sostituiti i valori nell'equazione, farà  $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ , ed integrando  $y = z$ , cioè  $y = \overline{a+x} \overline{la+x}$ ,

curva trascendente, ma che facilmente si descrive, supposta la logaritmica.

## P R O B L E M A I I

41. Ritrovare la curva, il di cui spazio sia eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate .

La formola dello spazio è  $ydx$ , e però averaffi  $\int ydx = \frac{2}{3}xy$ , quindi  $ydx = \frac{2}{3}xdy + \frac{2}{3}ydx$ , cioè  $ydx = 2xdy$ , o sia  $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$ , ed integrando come sopra,

$\sqrt{ax} = ly$ , ed  $ax = yy$ , la stessa parabola .

Debba lo spazio esser eguale alla quarta potestà dell' ordinata divisa per un quadrato costante ; farà  $\int ydx = \frac{y^4}{aa}$ , cioè  $ydx = \frac{4y^3 dy}{aa}$ , o sia  $aadx = 4yydy$ , ed integrando ,  $\frac{3aax}{4} = y^4$ , parabola prima cubica .

Debba lo spazio esser eguale alla potestà  $m$  dell' ordinata divisa per una costante , farà  $\int ydx = \frac{y^m}{a^{m-2}}$ , cioè  $ydx = \frac{my^{m-1} dy}{a^{m-2}}$ , o sia  $a^{m-2} dx = my^{m-1} dy$ , ed integrando  $\frac{1}{m-1} \times a^{m-2} x = my^{m-1}$ , curva del ge-

nera

nera delle parabole, o dell' iperbole, secondo che sarà  $m-1$  positivo, o negativo.

P R O B L E M A I I I.

42. *Date infinite parabole del medesimo genere qualunque; ritrovare, quale sia quella curva, che tutte le taglia ad angolo retto.*

Sia l'equazione  $p^{m-n}x^n = y^m$ , la quale (considerando, come arbitraria la  $p$ , e suscettibile d' infiniti valori) esprime infinite parabole, e similmente considerando le  $m$ , ed  $n$ , esprime qualunque genere. E sieno esse in primo luogo tutte al medesimo asse  $AB$ , (*Fig. 3.*) vertice  $A$ , diverse solo nel parametro. Una di queste infinite parabole sia  $AC$ , in cui  $AB=x$ ,  $BC=y$ .

Da un qualunque punto  $C$  si conduca la tangente  $CT$ , e la normale  $CP$ ; già si sa, che sarà  $BT = \frac{mx}{n}$ .

La curva, che si cerca, sia  $DC$ ; e poichè questa deve normalmente tagliare la parabola nel punto  $C$ , per una porzione infinitesima dovrà confondersi con la normale  $CP$  nel punto  $C$ ; adunque  $CT$  tangente della parabola  $AC$  farà assieme normale alla curva  $DC$  nel punto  $C$ , ed in conseguenza  $BT$  sarà nello stesso tempo e sottotangente della parabola, e sottotangente della ricercata curva  $DC$ . Ciò che diceasi della parabola  $AC$ , conviene a qualunque

que altra del medesimo genere. Il problema adunque consiste a ritrovare, quale sia la curva  $DC$ , la di cui fottonormale sia  $= \frac{mx}{n}$ . L'espressione generale della

fottonormale è  $\frac{ydy}{dx}$ , che in questo caso deve prendersi

negativa, perchè nella curva  $DC$  crescendo  $AB(x)$ , cala  $BC(y)$ , e però farà l'equazione differenziale  $\frac{mx}{n} =$

$-\frac{ydy}{dx}$ , e separando le variabili,  $\frac{mxdx}{n} = -ydy$ , ed

integrando,  $\frac{mxx}{2n} = -\frac{yy}{2} + aa$ , o sia  $\frac{nyy}{m} = \frac{2naa}{m} - xx$ ,

equazione all'ellissi. E perchè in nessun modo ci entra il parametro  $p$ , la soluzione farà generale per le infinite parabole così descritte.

Se l'esponente  $n$  della equazione  $p^{m-n}x^n = y^m$  si supporrà negativo, onde l'equazione sia  $x^ny^m = p^{m+n}$ , in cui ora è positivo, farà essa all'infinito iperbole del medesimo genere fra gli asintoti, le di cui fottotangenti sono  $-\frac{mx}{n}$ , e deve pure essere a queste eguale la

fottonormale della curva  $DC$ ; adunque farà  $-\frac{mx}{n} =$

$-\frac{ydy}{dx}$ , cioè  $\frac{mxdx}{n} = ydy$ , ed integrando,  $\frac{mxx}{2n} = \frac{yy}{2} + aa$ ,

o sia  $xx - \frac{2naa}{m} = \frac{nyy}{m}$ , equazione all'iperbola.

Se

Se le infinite parabole  $AC$ ,  $QC$  ec. dell'equazione  $p^{m-n}z^n = y^m$  averanno tutte lo stesso parametro, ma ciascuna diverso il vertice sul medesimo asse, vale a dire, se una si muova sempre sull'asse parallela a se medesima; chiamando da un punto fisso  $A$  (*Fig. 4.*) una qualunque  $AB = x$ , e presa una qual si sia  $QC$ , la di cui affissa  $QB = z$ , ordinata  $BC = y$ , farà pure  $-\frac{ydy}{dx}$  la

sottonormale della ricercata curva  $DC$ , e però eguale alla sottotangente  $BT$  della parabola  $QC$ ; quindi l'equazione  $-\frac{ydy}{dx} = \frac{mz}{n}$ ; ma per l'equazione della parabola si

$$\hat{a} z = \frac{y^{\frac{m}{n}}}{p^{\frac{m-n}{n}}}, \text{ adunque } -\frac{ydy}{dx} = \frac{my^{\frac{m}{n}}}{np^{\frac{m-n}{n}}}, \text{ cioè } dx =$$

$$-\frac{n}{m} p^{\frac{m-n}{n}} y^{\frac{1-m}{n}} dy, \text{ ed integrando, } x =$$

$$-\frac{np^{\frac{m-n}{n}} y^{\frac{2n-m}{n}}}{m \times 2n - m}, \text{ equazione della ricercata curva } DC.$$

Le parabole sieno apolloniane, cioè  $m = 2$ ,  $n = 1$ ; l'equazione integrata non servirà in questo caso, perchè fatte le sostituzioni de' valori di  $m$ , ed  $x$ , averassi  $x = -\frac{p}{0}$ ; ma presa la differenziale, farà

$$\text{essa } dx = -\frac{1}{2} p \times \frac{dy}{y}, \text{ equazione alla logaritmica. La}$$

curva



curva adunque, che taglia le infinite parabole apollonia-  
ne ad angolo retto, farà la logaritmica  $MCN$ , la di cui  
fottangente è eguale alla metà del parametro delle para-  
bole .

Le parabole sieno prime cubiche, cioè  $m = 3$ ,  $n = 1$ ,  
farà  $x = -\frac{ppy^{-1}}{-3}$ , o sia  $xy = \frac{pp}{3}$ , e la curva  $DC$  farà  
l'iperbola fra gli asintoti .

Le parabole sieno le seconde cubiche; cioè  $m = 3$ ,  
 $n = 2$ , farà  $x = -\frac{4}{3}\sqrt{py}$ , o sia  $xx = \frac{16}{9}py$ , e la curva  
 $DC$  la parabola ordinaria . Presi altri valori per le  $m$ ;  
ed  $n$ , altre curve si averanno .

Se le parabole  $AC$ ,  $QC$  ec. oltre l'aver sul me-  
desimo asse diverso il vertice, averanno variabile il pa-  
rametro, cioè uguale in ciascuna alla rispettiva distanza  
del vertice dal punto fisso  $E$ , presa una qualunque  $QC$ ,  
sia  $EB = x$ , assisa della ricercata curva  $DC$ ,  $BC$  ordi-  
nata  $= y$ ,  $EQ = p =$  al parametro, farà  $QB = x - p$ ,  
e l'equazione delle infinite parabole  $p^{m-n} \overline{x - p}^n = y^m$ ,  
e la fottangente  $BT = \frac{m}{n} \times \overline{x - p}$ , e però l'equazione  
 $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \overline{x - p}$ .

Le parabole sieno apolloniae, cioè  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  
farà  $p = \frac{x \pm \sqrt{xx - yy}}{2}$ , quindi fatte le sostituzioni  
nell'

nell'equazione  $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \sqrt{x-p}$ , farà essa  $-\frac{ydy}{dx} =$

$x \mp 2 \sqrt{\frac{xx'}{4} - yy}$ , che si potrà ridurre col metodo del

numero 14. alla separazione, per indi passare all'integrale, che farà algebrico.

Se le infinite parabole  $AC, QC$  ec. dell'equazione  $p^{m-n} z^n = y^m$  averanno lo stesso parametro costante, gli assi paralleli, ed i vertici variabili nella perpendicolare agli assi, vale a dire, se una si muova in maniera, che ciascun punto di essa descriva delle perpendicolari agli assi. Presane una qualunque  $EC$  (Fig. 5.), e chiamata  $AM = EB = z, BC = y, MC = x$ , e condotta alla parabola  $EC$  la tangente  $CT$  prodotta in  $V$ , farà  $MV$  la sottonormale della ricercata curva  $DC$ ; ma poichè  $BT = \frac{mz}{n}$ , farà  $MV = \frac{mzx}{ny}$ ; quindi averassi l'equazione  $\frac{mzx}{ny} =$

$-\frac{xdx}{dz}$ , e sostituito in luogo di  $y$  il valore  $p^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}$

dato dall'equazione  $p^{m-n} z^n = y^m$ , farà finalmente

$$\frac{mzx}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = -\frac{xdx}{dz}, \text{ cioè } -\frac{mzdz}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = dx, \text{ ed in-}$$

u u

te-

tegrando,  $x = - \frac{mz^{\frac{2m-n}{m}}}{n \times 2m - n \times p^{\frac{m-n}{m}}}$ , equazione della

curva ricercata  $DC$ .

Le parabole sieno apolloniane, cioè  $m=2$ ,  $n=1$ , farà

$$x = - \frac{4z^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}}, \text{ o sia } \frac{9pxx}{16} = z^3, \text{ e però la curva } DC \text{ la}$$

seconda parabola cubica, il di cui lato retto farà a quello della parabola  $AC$ , come il 9. al 16.

Avvertasi, che in questo caso la posizione della curva  $DC$  non farà la segnata nella figura 5., ma averà il vertice in  $A$ , tagliando ad angolo retto la parte inferiore delle parabole apolloniane, cioè incontrando il convesso, come nella figura 6.

Fissato altro genere per le parabole  $AC$ , farà pure una parabola d'altro genere la curva  $DC$ .

PRO-

## P R O B L E M A I V.

43. Sulla retta AD (Fig. 7.) insista la retta AC in angolo semiretto, si ricerca l'equazione della curva AB, la di cui proprietà sia, che l'applicata BD. abbia alla sottotangente DF la ragione d'una costante  $a$  alla BC.

Chiamate  $AD = x$ ,  $DB = y$ , sarà  $CB = y - x$ , quindi per la condizione del Problema si averà  $y$ ,  $\frac{ydx}{dy} :: a, y - x$ , e però l'equazione  $adx = ydy - xdy$ .

Per separare le indeterminate mi servo del metodo del num. 23., pongo pertanto  $x = Ay + p + B$ , e  $dx = A dy + dp$ ; fatte le sostituzioni, sarà  $aA dy + adp = ydy - Aydy - pdy - Bdy$ , ma in questa equazione si separano le indeterminate, se spariscono il primo, e secondo termine dell'omogeneo di comparazione, cioè se sia  $A = 1$ , e  $B$  rimane arbitraria, che porrò per brevità  $= 0$ ; adunque la sostituzione da farsi è  $x = y + p$ ,  $dx = dy + dp$ , e l'equazione sarà  $adp = -ady - pdy$ , cioè  $\frac{adp}{a+p} = -dy$ , curva

trascendente, e che dipende dalla logaritmica.

## P R O B L E M A V.

44. Ritrovare la curva, la di cui area sia  $axy + bx^c y^e$ , chiamando al solito le affisse  $x$ , le ordinate  $y$ .

Deve adunque essere  $\int ydx = axy + bx^c y^e$ ; e però  $ydx = axdy + aydx + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy$ ; o sia, fatto  $a - 1 = m$ ,  $mydx + axdy + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy = 0$ . Per separare le indeterminate in questa equazione si potrebbe servirsi del metodo del num. 33. ponendo  $x = u^{e-1} z^{e-1}$ , ed  $y = z^{1-c}$ , onde  $dx = \frac{e-1}{e-1} \times z^{e-1} u^{e-2} du + \frac{e-1}{e-1} \times u^{e-1} z^{e-2} dz$ , e  $dy = \frac{1-c}{1-c} \times z^{-c} dz$ ; ma fatte le sostituzioni, ci si presenterebbe un'equazione molto composta, la quale richiederebbe un lunghissimo calcolo.

Per venirne a capo con brevità: ripresa l'equazione  $\int ydx = bx^c y^e + axy$ , pongo  $x^c y^e = q$ , onde l'equazione sia  $\int ydx = bq + axy$ , e però  $ydx = bdq + axdy + aydx$ . Ciò posto, mi servo del metodo del num. 24., a norma di cui scrivo l'equazione così:

$$axy \times \frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = bdq; \text{ indi pongo}$$

$$\frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}; \text{ e però integrando, } \frac{1-a}{a} \int \frac{dx}{x} = \ln p,$$

o

o sia  $x^{\frac{1-a}{a}} = p$ . Fatte per tanto le dovute sostituzioni,

averassi l'equazione  $\frac{ax^{\frac{1}{a}} dp}{pp} = bdq$ .

Ora per esprimere la  $x^{\frac{1}{a}}$  per le affunte  $p, q$ , si rifletta, che  $x^c y^e = q$ , cioè  $y^e = \frac{q}{x^c}$ , cioè  $y = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{c}{e}}}$ ;

ma si â pure  $x^{\frac{1-a}{a}} = p$ , dunque  $x^{\frac{1-a}{a}} = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{c}{e}}}$ , o sia

$$x^{\frac{e - ae + ac}{ae}} = q^{\frac{1}{e}} p, \text{ e finalmente } x^{\frac{1}{a}} =$$

$\frac{1}{q^{e - ae + ac}} p^{\frac{e}{e - ae + ac}}$ . Fatta adunque questa sostituzione

in luogo di  $x^{\frac{1}{a}}$ , avremo l'equazione

$$ap^{\frac{e}{e - ae + ac} - 2} dp = \frac{bdq}{q^{e - ae + ac}}, \text{ cioè } ap^{\frac{2ae - 2ac - e}{e - ae + ac}} dp =$$

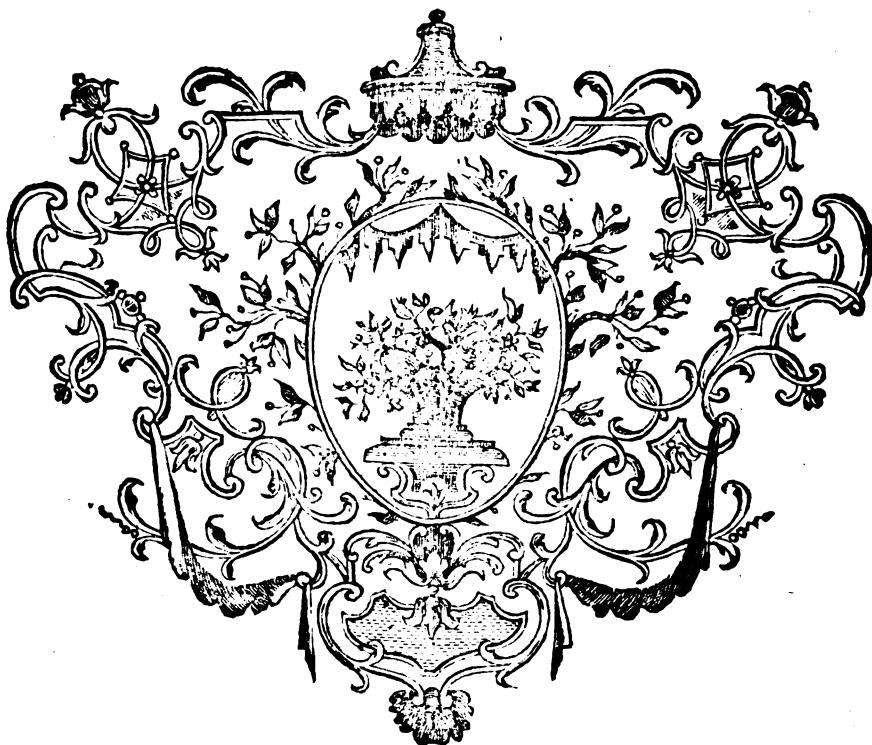
$bq^{\frac{-1}{e - ae + ac}} dq$ , ed integrando,

$$\frac{ae - aae + aac}{ae - ac} \times p^{\frac{ae - ac}{e - ae + ac}} = \frac{be - bae + bac}{e - ae + ac - 1} \times q^{\frac{e - ae + ac - 1}{e - ae + ac}} + g,$$

equazione della curva, che si cerca.

E'

E' manifesto , che questa curva sarà per lo più algebrica quando le quantità  $a, c, e$  saranno razionali , ed all'opposto trascendente quando una di esse sarà irrazionale. Dissi per lo più, perchè anche poste razionali le  $a, c, e$ , sarà però trascendente la curva , se sia  $e = c$  ; o pure  $a = \frac{1 - e}{c - e}$  ; o  $c = 1$  , ed assieme  $a = 1$  ; o  $a = 0$  , ed assieme  $e = 1$  , ed in diversi altri casi , che non serve tutti accennare .



CAPO

## C A P O I V.

*Della riduzione delle Equazioni differenziali  
del secondo grado .*

45. **Q**Uando le equazioni differenziali del secondo grado sono tali, che possano loro adattarsi le Regole spiegate dell'integrazioni sì ne' casi delle variabili separate, come in quelle, che sono miste, nulla occorre di più, che servirsi delle dette regole, e così per mezzo dell'integrazioni ridurle a' primi differenziali; e però intorno a ciò nient'altro fa d'uopo aggiungere. Che se poi le formole così ridotte al primo grado non averanno bene spesso separabili le indeterminate, nè saranno costruibili in verun modo, la colpa non farà della maniera, con cui si sviluppano le seconde differenze, ma piuttosto di quella, con cui si maneggiano le prime.

Dovrà adunque versare la nostra industria circa il ridurre le equazioni *differenzio-differenziali* ad essere atte per le assegnate regole dell'integrazioni, il che si può tentare in più modi.

46. Una maniera potrà essere di servirsi de' soliti ripieghi dell'Algebra volgare trasportando i termini, dividendoli, o moltiplicandoli per qualche quantità, ed altri simili. Ma prima d'ogn'altra cosa è necessario ricordarsi



cordarsi, o sapere, se nel passare dalle prime alle seconde differenze siasi presa qualche flussione per costante, e quale sia stata; ed in oltre, che siccome nell'integrazioni dalle prime differenze alle quantità finite si aggiunge sempre la costante, così nulla meno devesi aggiungere nelle integrazioni dalle seconde alle prime differenze. Ciò posto, sia

## E S E M P I O I.

Sia proposta l'equazione  $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{du}$ , in cui la  $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  è l'elemento della curva, e si suppone costante; la scrivo così  $\frac{by^m dydu}{c^m} = 2ayddx + adxdy$ .

Il primo membro, essendo costante  $du$ , è integrabile, quando anche si moltiplichi, o si divida per qualunque funzione di  $y$ ; ed osservo, che lo sarebbe pure il secondo, se si dividesse per  $2\sqrt{y}$ . Divido adunque tutta l'equazione per  $2\sqrt{y}$ , e farà  $\frac{by^m dvdu}{2c^m\sqrt{y}} =$

$\frac{2ayddx + adxdy}{2\sqrt{y}}$ , ed integrando farà  $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} =$

$adx\sqrt{y} + adu\sqrt{a}$ , equazione ridotta alle prime differenze.

Nell'integrare ô aggiunta la  $du$  appunto, perchè è costante, e l'ô moltiplicata in  $a\sqrt{a}$  per gli omogenei.

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $f = \frac{dx^2 - yddy}{y^3 dx^2}$ , in cui si è presa

$ydx$  per costante; la multiplico per  $2dy$ , e sarà  $2fdy = \frac{2dx^2 dy - 2ydyddy}{y^3 dx^2}$ , cioè  $2fdy = \frac{2dy}{y^3} - \frac{2dyddy}{yydx^2}$ , ed inte-

grando, per esser costante  $ydx$ , sarà  $\int 2fdy =$

$$-\frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} + nyydx^2.$$

ESEMPIO III.

Sia l'equazione  $f = \frac{du^2 - yddy}{y^3 dx^2}$ , in cui  $dx$  sia co-

stante, e  $du$  l'elemento della curva, cioè  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = du$ . Poichè dunque è costante  $dx$ , sarà  $dyddy = duddu$ , e però sostituendo il valore di  $ddy$  nell'equazione, sarà  $f = \frac{dydu^2 - yduddu}{y^3 dydx^2}$ , e moltiplicando per  $2y$ ,  $2fy =$

$$\frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^3 dydx^2}, \text{ cioè } 2fdy = \frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^4 dx^2},$$

x x

ed

ed integrando  $2 \int fdy = - \frac{du^2}{yydx^2} + ndx^2$ .

In quest'altra maniera ancora: posto nell'equazione in luogo di  $du$  il suo valore, sarà essa  $f = \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{y^3 dx^2}$ ,

e moltiplicando per  $2ydy$ ,  $2fydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^3 dx^2}$ ,

cioè  $2fydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^3 dx^2}$ , ed integrando,

$$2 \int fdy = - \frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + ndx^2.$$

## ESEMPIO IV.

Sia l'equazione  $adx = \frac{xyddy + xdy^2}{dx}$ , in cui  $dx$  sia costante; moltiplicata per  $dx$ , e divisa per  $x$  farà  $\frac{adx^2}{x} = yddy + dy^2$ , ed integrando, giacchè  $dx$  è costante,  $adx \ln x + Adx = ydy$ . Che se farassi la costante aggiunta  $A = a$ , averassi  $adx \ln x + adx = ydy$ , e passando avanti con l'integrazione,  $ax \ln x = \frac{yy}{2}$ .

ESEM-

E S E M P I O V.

Sia l'equazione  $f = \frac{dx dy du^2 + y du^2 dx - y dx du du}{y dx dy dt^2}$ ,

in cui  $du$  è l'archetto della curva,  $dt$  è data per  $x$ , e per  $y$ , e nessuna flussione prima è stata presa per costante; la divido per  $y^3 dx^3$ , e la moltiplico per  $z$ , e sarà  $\frac{2f}{y^3 dx^3} = \frac{2 dx dy du^2 + 2 y du^2 dx - 2 y dx du du}{y^4 dx^4 dy dt^2}$ , o sia

$$\frac{2 f dy dt^2}{y y dx^2} = \frac{2 y dx^2 dy du^2 + 2 y y du^2 dx dx - 2 y y dx^2 du du}{y^4 dx^4}$$

ed integrando,  $2 \int \frac{f dy dt^2}{y y dx^2} = - \frac{du^2}{y y dx^2} \pm n$ .

Ma si può ben dire, essere cosa impossibile, il fare uso di questo metodo nell'equazioni, le quali sieno alquanto composte, quando a un di presso già non si sappiano le integrazioni, che devono farsi, onde passerò ad altri metodi.

47. Nella soluzione de' Problemi passando dalle prime alle seconde differenze può tornare molto comodo il non assumere, qualora sia libero, flussione alcuna per costante, per potere quindi con la formola sotto l'occhio determinare quella tale costante, per cui l'espressione venga in tale modo ad abbreviarsi, che sia

xx 2

facil-

facilmente integrabile . Gli esempj faranno meglio intendere il metodo .

## E S E M P I O I.

Sia l'equazione  $f = \frac{dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3 dy^3}$ ,

la quale siasi avuta senza assumere alcuna flussione costante . Per abbreviare questa formola : considero , quale possa essere quella flussione , che presa per costante mi distrugga nell'omogeneo di comparazione due termini , due soli lasciandone , e trovo che due possono essere , cioè  $x dy$  , e  $\frac{dx}{x}$  .

Sia dunque  $x dy = c$  , e prese le differenze ,  $x ddy + dx dy = 0$  , e però anco moltiplicando per  $dx$  ,  $xdxddy + dx^2 dy = 0$  , con che spariscono nell'omogeneo di comparazione dall'equazione principale il secondo , e quarto termine così , che si avrà  $f = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3 dy^3}$  ; ma

essendo  $x ddy + dx dy = 0$  , sarà  $dy = -\frac{x ddy}{dx}$  , quindi

sostituendo , sarà  $f = -\frac{xdy^2 ddy}{2x^3 dx dy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3 dy^3}$  , cioè

$f = -\frac{xdy^2 ddy - xdx dy ddx}{2x^3 dx dy^3}$  , o sia  $f = -\frac{dyddy - dx ddx}{2xx dx dy^2}$  ,

ma

ma  $xy = c$ , adunque  $f = -\frac{dyddy - dxddx}{2c dx}$ , e final-

mente  $fdx = -\frac{dyddy - dxddx}{2c}$ , ed integrando,

$$\int f dx = -\frac{dy^2 - dx^2}{4cc} \pm n, \text{ o sia } \int f dx = -\frac{dy^2 - dx^2}{4xxdy^2} \pm n.$$

Quando si sia giunto all'equazione  $f = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3 dy^3}$ , si

può più brevemente passare all'integrazione moltiplicandola per  $dx$ , e disponendola così:  $fdx = \frac{dx}{2x^3} - \frac{dxddx}{2xxdy^2}$ ,

mentre essendo  $xy$  costante, sarà  $\int f dx = -\frac{1}{4xx} -$

$\frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n$ , come sopra.

Facciasi ora costante la quantità  $\frac{dx}{x}$ . Una tale supposizione dando  $\frac{xd dx - dx^2}{xx} = 0$ , e però anco —

$\frac{xyddy + dx^2 dy}{2x^3 dy^3} = 0$ , toglie il secondo, e terzo termine dall'equazione principale, e la muta in questa  $f = \frac{dy^3 + xdxddy}{2x^3 dy^3}$ , e moltiplicando per  $dx$ ,  $fdx =$

$\frac{dx dy^3 + xdx^2 ddy}{2x^3 dy^3}$ , il di cui integrale, a cagione di  $\frac{dx}{x}$ ,

o  $\frac{dx^2}{xx}$  costante, si trova essere  $\int f dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n,$

come sopra .

48. Ma per sapere a un di presso , quale flussione possa prendersi per costante , si osservi , se nell'equazione proposta vi sieno due , tre , o più termini , i quali moltiplicati , o divisi per una quantità a loro comune , possano ridursi ad essere integrabili ; indi fatta l'integrazione , la loro integrale si prenda per costante , e si proceda nel modo spiegato . Se non sempre , qualche volta almeno avremo l'intento .

Ripiglio l'equazione  $f =$

$\frac{dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3 dy^3}$  ; osservo , che i due

termini  $dx^2 dy + xdxddy$  divisi per  $dx$  rimangono  $dx dy + xddy$  , quantità integrabile , e che il suo integrale è  $x dy$  ; ecco adunque , per qual cagione dovevasi prendere questa quantità per costante . Similmente osservo , che i due termini  $dx^2 dy - xdyddx$  , se si dividono per  $-xxdy$  , ci danno  $-\frac{dx^2 + xddx}{xx}$  , quantità integrabile , il di cui

integrale è  $\frac{dx}{x}$  ; potevasi adunque prendere per costante anche la flussione  $\frac{dx}{x}$  .

ESEM.

## E S E M P I O .

Venga proposta la formola  $xy \times \overline{dxddy - dyddx} = ydydx^2 - yydzdy^2 - xdx^2dy$ , in cui la variabile  $z$  è in qualunque modo data per  $y$ .

La dispongo così:  $xydxddy + yydzdy^2 = yxdyddx + ydydx^2 - xdx^2dy$ , ed osservo, che se si divida per  $yydy$  l'omogeneo di comparazione, farà egli  $\overline{yxdx + ydx^2 - xdx^2dy}$ , il di cui integrale  $\frac{xdx}{y}$ . Pren-

do adunque per costante  $\frac{xdx}{y}$ , e però  $\frac{xdx}{y} = c$ , ed

$\overline{xyddx + ydx^2 - xdx^2dy} = 0$ , quindi la proposta equazio-

ne verrà ad essere  $xydxddy + yydzdy^2 = 0$ , cioè  $dz = -\frac{xdxddy}{ydy^2}$ , ed integrando, per essere  $\frac{xdx}{y}$  costante,

$$z = \frac{xdx}{ydy} \pm n.$$

49. Quando in una equazione del secondo grado manca l'una, o l'altra delle due indeterminate con tutte le sue funzioni, e non entrano nella formola se non le sue differenze prime, o seconde in qual si sia modo com-

poste



poste , ed a qualunque dignità elevate , l'integrazione , o riduzione alle prime differenze farà sempre in nostra mano per mezzo di una sostituzione . Questa farà di porre la prima differenza , che fluisce , eguale ad una nuova incognita moltiplicata nella flussione assunta costante , o che si assuma ad arbitrio in caso , che nessuna fosse stata fissata costante . Per esempio: in una data equazione sia stata supposta  $dx$  variabile , e  $dy$  costante ; si faccia  $dx = pdy$  , e prendendo le differenze nell'ipotesi di  $dy$  costante ,  $ddx = dpdy$  . Fatta questa sostituzione in luogo di  $ddx$  , e maneggiata l'equazione , col sostituire i valori presi dall'equazione  $dx = pdy$  , si ridurrà sempre alle prime differenze .

O pure se tornasse più comodo , si ponga la prima flussione della variabile , che manca dall'equazione , eguale ad una nuova indeterminata moltiplicata nella prima flussione dell'altra . Fatte le debite sostituzioni , avendo riguardo alla flussione , che sarà stata presa costante , avremo l'equazione proposta ridotta alle prime differenze .

## E S E M P I O I.

Sia di nuovo l'equazione dell'esempio primo del num. 46.  $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$  , in cui è supposta costante la  $du$  .

Fac-

Faccio pertanto  $dx = pdu$ , e differenziando,  $ddx = dpdu$ , quindi surrogato questo valore, avremo  $\frac{by^m}{c^m} =$

$$\frac{2aydp + apdy}{dudy}, \text{ cioè } \frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydp + apdy}{dy}, \text{ e però}$$

$$\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydp + apdy, \text{ la qual equazione divisa per } 2\sqrt{y}$$

è integrabile, e l'integrale si è  $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} = ap\sqrt{y} \pm g;$

ma  $p = \frac{dx}{du}$ , dunque  $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} = adx\sqrt{y} \pm gdu.$

ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $fyydydx^2 = -duddu$ . La  $f$  è data per  $y$ ,  $du$  è l'elemento della curva, ed  $ydx$  è la flussione presa costante. Faccio adunque  $du = pydx$ , e differenziando,  $ddu = ydpdx$ , e però fatte le sostituzioni, sarà  $fyydydx^2 = -yypdpdx^2$ , cioè  $f dy = -pdp$ ; onde integrando,  $2 \int f dy = -pp + 2m$ , ma  $pp = \frac{du^2}{yydx^2} =$

$\frac{dx^2 + dy^2}{yydx^2}$ ; fatte pertanto le sostituzioni, e la riduzione,  $yy$  ne,

$$\text{ne, averassi } dx = \frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$$

Riduco ora la stessa equazione per mezzo dell' altra sostituzione indicata, Pongo adunque  $dx = pdu$ , e  $ddx = dpdu + pddu$ , e però  $ddu = \frac{ddx - dpdu}{p}$ . Fatte le

sostituzioni, sarà l'equazione  $fyyppdydu^2 = -\frac{duddx + dpdu^2}{p}$ , ma è stata assunta costante la flussio-

ne  $ydx$ , quindi averemo  $yddl + dydx = 0$ , cioè  $ddx = -\frac{dx dy}{y}$ , o sia  $ddx = -\frac{pdudy}{y}$ , e surrogato questo va-

lore ancora nell'equazione, sarà  $fppyydy = \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p}$ . Ciò

posto: passo avanti, e faccio  $\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$ , onde  $py = q$ ,

e però  $fqqdy = \frac{dq}{q}$ , o sia  $f dy = \frac{dq}{q^2}$ , ed integrando,

$$\int f dy = -\frac{1}{2qq} + m; \text{ ma } qq = ppyy = \frac{yydx^2}{du^2} = \frac{yydx^2}{dx^2 + dy^2},$$

dunque sarà  $2 \int f dy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$ , da cui si ri-

cava, come sopra,  $dx = \frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$ .

$$\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}$$

ESEM.

ESEMPIO III.

Ripiglio l'equazione dell'esempio 3. del num. 46.  $fy^3 dx^2 = dx^2 + dy^2 - yddy$ , in cui è costante  $dx$ , e pongo  $dy = pdx$ , e però  $ddy = dpdx$ , fatta la sostituzione, farà  $fy^3 dx^2 = dx^2 + dy^2 - ydpdx$ , e fatta sparire la  $dx$  col valore  $\frac{dy}{p}$ , averemo  $\frac{fy^3 dy^2}{p} = \frac{dy^2}{pp} + \frac{dy^2}{pp} - \frac{ydvdp}{p}$ , cioè  $fy^3 dy^2 = dy^2 + ppdy^2 - ypdyp$ , e dividendo per  $y^3 dy$ , farà  $f dy = \frac{dy}{y^3} + \frac{ppdy}{y^3} - \frac{ydp}{y^3}$ , ed integrando,  $\int f dy = -\frac{1}{2yy} - \frac{pp}{2yy} + m$ , e fatta la sostituzione in luogo di  $p$  del valore  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\int f dy = -\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{2yydx^2} + m$ , cioè  $2 \int f dy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$ , e però  $dx = \frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$ .

50. Che se nella proposta equazione nessuna funzione sia stata presa per costante, una se ne prenda a piacere, e si operi come s'è fatto nel num. 48.

yy 2

ESEM-

## E S E M P I O .

Data l'equazione dell'esempio 5. num. 46., in cui nessuna flussione è assunta costante, cioè  $fy^3 dydx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx - y dx du ddu$  (posta  $y dx$  in luogo di  $dt$ ), se si prenda costante  $dx$ , sparirà il termine  $y du^2 ddx$ , e l'equazione farà  $fy^3 dydx^3 = dy du^2 - y du ddu$ , onde per ridurla dovrà porsi  $du = p dx$ , quindi  $ddu = p dx$ . Surrogati questi valori, avremo  $fy^3 dydx^3 = pp dy dx^2 - y p dp dx^2$ , cioè  $fy^3 dy = pp dy - y p dp$ , la quale equazione, per passare alle integrazioni, scrivo così:  $fy^3 dy = pp y \times \frac{dy}{y} - \frac{dp}{p}$ , quindi integrando col metodo del num.

24. dell' antecedente capo,  $\int f dy = -\frac{pp}{2yy} + m$ ; e re-

stituito il valore di  $p$ ,  $\int f dy = -\frac{du^2}{2yy dx^2} + m$ .

Se si prenda costante  $du$ , sparirà il termine  $y dx du ddu$ , e l'equazione farà  $fy^3 dydx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx$ , e però dovrà porsi  $dx = p du$ ,  $ddx = dp du$ . Sostituiti questi valori, avremo  $fy^3 dy \times p^3 du^3 = p dy du^3 + y dp du^3$ , cioè  $fy^3 dy = \frac{p dy + y dp}{p^3}$ , e però integrando, farà  $\int f dy = -\frac{1}{2ppyy} + m$ ,

e

e restituito il valore di  $p$ ,  $\int f dy = - \frac{du^2}{2yy dx^2} + m$ .

51. Il poterfi assumere una flussione a piacere per costante nelle equazioni, in cui nessuna sia già stata presa, può rendere capaci del metodo del num. 49. alcune equazioni, le quali, per avere ambedue le indeterminate finite, non lo sieno; e ciò assumendo tale flussione per costante, che faccia sparire tutti que' termini, ne' quali si trova l'una delle indeterminate finite, rimanendo quelli soli, che l'altra contengono.

E S E M P I O.

Sia l'equazione  $dx^3 - dx dy^2 = y dx ddx + 2x dy ddy$ , in cui nessuna flussione è presa costante.

Se faremo costante  $dx$ , sparirà il primo termine dell'omogeneo di comparazione, e se faremo costante  $dy$ , sparirà l'ultimo; e sì nell'uno, che nell'altro caso una sola delle indeterminate rimane. Fisso adunque costante  $dx$ ; farà l'equazione  $dx^3 - dx dy^2 = 2x dy ddy$ . Pongo  $dy = \frac{p dx}{a}$ ,  $ddy = \frac{dp dx}{a}$ ; fatte le sostituzioni, farà

$$dx^3 - \frac{pp dx^3}{aa} = \frac{2xp dp dx^2}{aa}, \text{ cioè } aadx - ppdx = 2xpdp,$$

o

o sia  $\frac{dx}{x} = \frac{zpdp}{aa-pp}$ ; integrando adunque, farà  $lx =$

$-\sqrt{aa-pp} + lm$ , e però  $x = \frac{m}{aa-pp}$ , e restituito in

luogo di  $p$  il suo valore  $\frac{ady}{dx}$ , farà  $x = \frac{m}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$ ,

cioè  $x = \frac{mdx^2}{aadx^2 - aady^2}$ , o sia  $mdx^2 = aaxdx^2 - aaxy^2$ .

52. Ma quando il prendere una flussione a piacere per costante non serve per eliminare una delle due indeterminate finite, o la flussione costante sia già stata fissata, sicchè nell'equazione rimangano ambedue le indeterminate, fin'ora non è stato scoperto alcun metodo generale per procedere avanti.

I metodi spiegati possono avere tal volta il loro uso, siccome pure i soliti artifizj dell'Algebra comune con le moltiplicazioni, divisioni ec., come per esempio nell'equazione  $xydy^2 = xddx - dx^2$ , la quale divisa per  $xx$  farà  $ydy^2 = \frac{xddx - dx^2}{xx}$ , e però integrabile (supposta  $dy$

costante) e l'integrale è  $\frac{yydy}{2} = \frac{dx}{x} + mdy$ .

Tal'ora una sostituzione può rendere la proposta equazione soggetta al metodo del num. 49. Ed in fatti l'equazione  $x^m ddx = ydy + dy^2 + yydy^2$ , che non è  
fog-

foggetta al canone del suddetto numero, lo farà però se si faccia  $ydy = dz$ , onde sia  $x^m ddx = ddz + dz^2$ .

53. In caso poi, che nelle equazioni sia già stata assunta la flussione costante, può essere di molto uso il mutare l'equazione proposta in un'altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante. Per far ciò: sia l'equazione generale  $dy = p dx$  (la  $p$  è una quantità data in qualunque modo per  $x$ , e per  $y$ ) e sia  $dx$  costante, differenziando farà  $ddy = dp dx$ ; ma è  $\dot{p} = \frac{dy}{dx}$ , dunque

differenziando senza alcuna flussione costante, farà  $dp = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$ , quindi surrogato questo valore in luogo

di  $dp$  nell'equazione  $ddy = dp dx$ , avremo  $ddy = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$ . Se pertanto in una qualunque proposta

equazione, in cui sia costante  $dx$ , si ponga in luogo di  $ddy$  il valore  $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$ , farà essa mutata in un'altra

equivalente, in cui nessuna flussione è costante.

Ma perchè frequentemente altre più composte flussioni si assumono, o sono state assunte per costanti, farà bene rendere più universale questo metodo.

Sia adunque l'equazione generale  $dy = m dx$ ; (la  $p$  è similmente data in qualunque modo per  $x$ , e per  $y$ , ed  $m$  è una funzione qualunque di  $x$ , o di  $y$ , o di ambe



be insieme) Sia costante  $mdx$ , differenziando farà  $ddy = m dx dp$ ; ma  $p = \frac{dy}{mdx}$ , e differenziando senza assumere

costante,  $dp = \frac{mdx ddy - dmdx dy}{m dx^2}$ , quindi sur-

rogato questo valore in luogo di  $dp$  nell'equazione  $ddy = m dx dp$ , avremo  $ddy = \frac{mdx ddy - dmdx dy}{mdx} - m dy ddx$ .

Se pertanto in una qualunque proposta equazione, in cui sia costante  $mdx$ , si ponga in luogo di  $ddy$  il valore ritrovato  $\frac{mdx ddy - dmdx dy}{mdx} - m dy ddx$ , farà essa mutata

in altra equivalente, in cui nessuna funzione è costante.

• Rese in questa guisa compite le equazioni, cioè tali, che non abbiano funzione costante, per passare alla riduzione sarà in nostro arbitrio di prendere per costante quella, mediante la quale ci verrà fatto di ottenere l'intento.

### ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione da ridurre  $dx^2 dy - dy^3 = adx ddy + x dx ddy$ , in cui è costante  $dx$ . Posto adunque in luogo di  $ddy$  il valore  $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$ ,

(poi-

( poichè in questo caso  $m = 1$  , e  $dm = 0$  ) farà  $dx^2 dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$  , in cui nessuna flussione è costante , quindi fatta costante la  $dy$  , si trova essere  $dx^2 + xddx + addx = dy^2$  , ed integrando ,  $x dx + adx = y dy$  , equazione all'iperbola .

E S E M P I O II.

Sia l'equazione  $\frac{xdy^2 - xyddy - ydydx}{ydy} =$

$\frac{adx - xdx}{aa + xx}$  , in cui sia stata presa costante la flussione

$ydx$  . Per trasformarla in un'altra , in cui nessuna flussione sia costante , poichè in questo caso  $m = y$  , il valore della  $ddy$  da sostituirsi farà  $\frac{ydxddy - dx dy^2 - ydyddx}{ydx}$  ,

e però l'equazione

$$\frac{xdy}{y} - dx - \frac{xydxddy + xdx dy^2 + xydyddx}{ydx dy} =$$

$\frac{adx - xdx}{aa + xx}$  . Per ridurla , fissa per costante la flussione

$x dy$  , in conseguenza di che farà  $xddy + dx dy = 0$  , cioè  $-ddy = \frac{dx dy}{x}$  , e però fatta la sostituzione ,

$$\frac{xdy}{y} - dx + dx + \frac{xdy}{y} + \frac{xddx}{dx} = \frac{adx - xdx}{aa + xx} ,$$

ZZ

cioè

cioè  $-\frac{dx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x^2}$ , ed integrando,  $-l dx =$

$\int \frac{aa + xx}{x} - l x dy$  (sottraggo  $l x dy$ , per essere quantità

costante), e togliendo i logaritmi,  $\frac{1}{dx} = \frac{aa + xx}{xxdy}$ , cioè

$$xxdy = aadx + xx dx.$$

## ESEMPIO III.

Sia l'equazione  $-\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$ , e

costante la funzione  $ydx$ . Pongo adunque in luogo di  $ddy$  il corrispondente valore  $\frac{ydxddy - dx dy^2 - ydydx}{ydx}$ ,

farà  $-\frac{dxddy}{dy} + \frac{dydx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$ , in cui nessuna funzio-

ne è costante, quindi presa costante  $dy$ , farà  $xddx = dx^2 + dy^2$ , la quale equazione è il caso del num. 49., e però si fa ridurre,

54. Il metodo spiegato nell'antecedente capo al num. 24. può avere uso anche nelle equazioni differenzio-differenziali, procedendo a un di presso nella maniera ivi adoperata. Eccone la pratica in alcuni esempj.

ESEM-

## E S E M P I O I.

Ripiglio la formola dell'esempio primo di questo capo  $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{du}$ , in cui  $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  è affunta costante, farà  $\frac{by^m dydu}{ac^m} = 2yddx + dxdy$ ; la pre-

paro nella seguente maniera:  $\frac{ddx + \frac{dy}{2y}}{dx} \times dx = \frac{by^m dydu}{ac^m \times 2y}$ ,

offervo, che le due quantità sotto la linea sono integrabili per via de' logaritmi; faccio adunque  $\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y} = \frac{dp}{p}$ ,

e però  $l dx + l \sqrt{y} = l p + l du$  (aggiungo il logaritmo di  $du$ , per essere  $du$  costante) cioè  $dx \sqrt{y} = pdu$ . Quindi sostituendo nella proposta equazione in luogo di  $\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y}$

il valore  $\frac{dp}{p}$ , ed in luogo di  $dx$  il valore  $\frac{pdu}{\sqrt{y}}$ , farà

$$\frac{dpdu}{\sqrt{y}} = \frac{by^{m-1} dydu}{2ac^m}, \text{ o sia } dp = \frac{by^{m-\frac{1}{2}} dy}{2ac^m}, \text{ ed integrando,}$$

$$b + p = \frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2} \times 2ac^m}, \text{ ma } p = \frac{dx \sqrt{y}}{du}; \text{ e però finalmen-}$$

ZZ 2

te

te  $bdu + dx\sqrt{y} = \frac{by^m + \frac{1}{2} du}{m + \frac{1}{2} \times 2ac^m}$ , come nel citato esempio.

## ESEMPIO II.

Sia l'equazione  $\frac{ddx \sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{ydx - xdy}{xx+yy}$ , in

cui è costante  $ydx - xdy$ .

La seconda differenza  $ddx$  divisa per la costante  $ydx - xdy$  ci dà quantità integrabile, e però scrivo l'equazione così: —  $\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{x \times \overline{ydx - xdy}}{xx + yy \sqrt{xx + yy}}$ . Ma

offervo, che nel secondo membro la quantità  $ydx - xdy$  è sommabile, quando si divida per  $yy$ , adunque preparo l'equazione secondo il metodo, e farà

—  $\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyy}{xx + yy \sqrt{xx + yy}} \times \frac{\overline{ydx - xdy}}{yy}$ . Pongo

$\frac{ydx - xdy}{yy} = dp$ , ed integrando,  $\frac{x}{y} = p$ , quindi fatta la

sostituzione, avremo —  $\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyydp}{xx + yy \sqrt{xx + yy}}$ ,

da cui si farà svanire la  $x$ , o la  $y$  per mezzo dell'equazione

zione

zione  $\frac{x}{y} = p$ . Facciasi sparire dal secondo membro la

$$x, \text{ collocando il suo valore } py, \text{ averassi } - \frac{ddx}{ydx - xdy} =$$

$$\frac{pdp}{aa + pp \sqrt{aa + pp}}, \text{ e passando all'integrazione, farà}$$

$$- \frac{dx}{ydx - xdy} = - \frac{1}{\sqrt{aa + pp}}, \text{ cioè } - \frac{dx}{ydx - xdy} =$$

$$- \frac{y}{\sqrt{aayy + xx}}, \text{ restituendo in luogo di } p \text{ il suo va-}$$

lore  $\frac{x}{y}$ .

In questa integrazione potevasi aggiungere la costante  $ydx - xdy$ , ma o si aggiunga, o si ometta, la integrazione dalle prime differenze alle quantità finite, nell'uno, e nell'altro caso ci dà sempre le sezioni coniche.

55. Dissi al num. 52., che quando le equazioni differenzio-differenziali contengano ambedue le variabili, non vi è metodo generale per ridurle; uno però se ne può assegnare, il quale sebbene non serve per tutte, è molto universale nel genere suo, ed abbraccia tutte le infinite equazioni, che a tre canoni si rapportano. Mediante questo metodo le date equazioni si trasmutano in altre, nelle quali manca l'una delle due variabili, e che

per

per conseguenza si fanno maneggiare col metodo del num. 49.

Il primo canone comprende quelle, che sono di due soli termini, e vengono espresse dalla formola generale  $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$ , in cui sia presa  $dx$  costante. Per ridurre questa equazione, pongo  $x = c^{bu}$ , ed  $y = c^u t$ ; la  $c$  è un numero, il di cui logaritmo sia l'unità,  $b$  è un arbitraria da fissarsi nel progresso, ed  $u, t$  sono due nuove variabili. Poichè  $x = c^{bu}$ , ed  $y = c^u t$ , per le regole del calcolo esponenziale farà  $dx = bc^{bu} du$ ,  $ddx = bc^{bu} \times ddu + bdu^2$ ,  $dy = c^u dt + c^u tdu$ ,  $ddy = c^u \times ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu$ . Ma posta costante  $dx$ , si à  $ddx = 0$ , e però  $bc^{bu} \times ddu + bdu^2 = 0$ , cioè  $ddu = -bdu^2$ , il che sostituito in luogo di  $ddu$  nel valore di

$ddy$ , farà  $ddy = c^u \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2$ . Sostituiti nella proposta equazione, in luogo di  $x$ , ed  $y$ , e fuoi differenziali, i rispettivi valori, si muterà essa in quest'altra  $ac^{bmu} \times b^p \times c^{bp} du^p =$

$$c^{nu} t^n \times c^{u dt + c^u tdu}^{p-2} \times c^u \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2,$$

$$\text{cioè } ac^{\frac{bu \times m+p}{b^p du^p} = c^{\frac{n+p-1 \times u}{t^n \times dt + tdu}^{p-2}} \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2.$$

Ma per liberare questa equazione dalle quantità esponenziali, cioè per togliere da essa la  $c$ , converrà che

·fia

sia  $n + p - 1 = bm + bp$ , con che si determina il valore dell'affunta  $b$ , cioè  $b = \frac{n + p - 1}{m + p}$ , quindi l'equazione

$$\text{sarà } a \times \frac{\frac{n + p - 1}{m + p} du^p}{p} =$$

$$t^n \times \frac{du^{p-2}}{dt + tdu} \times \frac{ddt + 2tdtdu + \frac{m - n + 1}{m + p} \times tdu^2}{m + p}, \text{ la}$$

quale, perchè contiene una sola delle variabili finite, cioè la  $t$ , viene ad esser soggetta alla regola del sopracitato num. 49.

Poichè adunque si trova il valore di  $b = \frac{n + p - 1}{m + p}$ ,

tosto apparisce, quali sostituzioni dovevano farsi da prin-

cipio, cioè  $x = c \frac{n + p - 1}{m + p} \times u$ , ed  $y = c^u t$  per ottenere l'intento.

Passando avanti con l'operazione, giusta il metodo del num. 49., pongo  $du = zdt$ , e però  $ddu = zddt + dzdt$ , ma la supposizione di  $dx$  costante ci â dato  $ddu = -bdu^2$ , cioè  $ddu = \frac{1 - n - p}{m + p} \times zzdt^2$ ; adunque

$$\text{averemo } \frac{1 - n - p}{m + p} \times zzdt^2 = zddt + dt dz, \text{ quindi } ddt =$$

$$\frac{1 - n - p}{m + p} \times zdt^2 - \frac{dt dz}{z}$$

zione,



zione , in luogo di  $du$ , e  $ddt$ , i rispettivi valori , farà

$$a \times \frac{\overline{n+p-1}^p}{\overline{m+p}^p} \times z^p dt^p =$$

$$t^n \times \overline{dt+zt}^{p-2} \times \frac{\overline{1-n-p}}{p+m} \times z dt^2 - \frac{dt dz + 2z dt^2 + \overline{m-n+1}}{z} \times \overline{zzdt}^{m+p},$$

o sia dividendo per  $dt^{p-1}$ , e moltiplicando per  $z$ ,

$$a \times \frac{\overline{n+p-1}^p}{\overline{m+p}^p} \times z^{p-1} dt =$$

$$t^n \times \overline{1+tz}^{p-2} \times \frac{\overline{1+2m-n+p}}{m+p} \times z z dt + \frac{\overline{m-n+1}}{m+p} \times tz^2 dt - dz,$$

la quale equazione è ridotta alle prime differenze. E' facile a vedere, che per ridurre sul bel principio l'equa-

zione, bastava porre  $x = c \frac{\overline{n+p-1}}{m+p} \times \int z dt$ , ed  $y = c \int z dt$ .

In questa generale equazione, che ô ridotta, ô supposta costante la flussione  $dx$ ; ciò non ostante però non farà difficoltà alcuna al metodo, che in una qualunque proposta equazione altra flussione diversa da  $dx$  sia presa costante, poichè col metodo del num. 53. si potrà mutare la proposta equazione in altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante, per indi poi fissare costante la suddetta  $dx$ .

ESEM-

## ESEMPIO I.

Sia l'equazione  $x dx dy = y ddy$ , in cui è costante  $dx$ ; la scrivo così:  $x dx = y dy^{-1} ddy$ . Paragonata questa con la canonica, farà  $a = 1$ ,  $m = 1$ ,  $p = 1$ ,  $n = 1$ , quindi surrogati questi valori nell'equazione generale differenziale del primo grado di sopra ritrovata, avremo

$$\frac{1}{2} z z dt = \frac{t}{1+tz} \times \frac{3}{2} z z dt + \frac{1}{2} t z^3 dt - dz.$$

## ESEMPIO II.

Sia  $p = 1$ ,  $n = -1$ ,  $m = -1$ , cioè l'equazione  $ax^{-1} dx = y^{-1} dy^{-1} ddy$ , o sia  $\frac{adx}{x} = \frac{ddy}{ydy}$ , in cui è co-

stante la funzione  $dx$ . Rispetto a questa farà inutile il metodo, poichè si avrà  $p + m = 0$ , ed in conseguenza infinito ciascuno de' termini dell'equazione generale differenziale del primo grado, a riserva dell'ultimo.

Ma in questo caso, senz'altro artificio, è facile la riduzione. Scrivo adunque l'equazione così:  $x ddy = ay dy dx$ , ma l'integrale del primo membro è  $x dy - y dx$ , quello del secondo è  $\frac{ayy dx}{2}$ ; dunque  $x dy - y dx = \frac{ayy dx}{2} \pm b dx$ .

56. Il secondo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali la somma degli esponenti delle indeterminate, e dei loro differenziali sia in ciascun termine la stessa. Supposte  $x$ , ed  $y$  le due indeterminate, e  $dx$  costante, si riducono queste al caso del num. 49. col porre  $x = c^u$ , ed  $y = c^u t$ , essendo parimente  $c$  un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, e le  $u$ ,  $t$  due nuove indeterminate. Per far vedere il metodo, prendo l'equazione  $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$ , la quale, sebbene è di una sola dimensione, e di tre soli termini, ciò nonostante il metodo è generale, e serve, quanti si sieno i termini, e qualunque la dimensione, purchè vi sia la condizione notata.

Pongo adunque  $x = c^u$ ,  $y = c^u t$ , farà  $dx = c^u du$ , e perchè  $dx$  è costante, averemo  $c^u ddu + c^u du^2 = 0$ , cioè  $ddu = -du^2$ ; farà pure  $dy = c^u dt + c^u t du$ ,  $ddy = c^u \times \frac{ddt + 2dudt + tdu^2 + tddu}{}$ , ma  $ddu = -du^2$ , adunque  $ddy = c^u \times \frac{ddt + 2dudt}{}$ . Sostituiti pertanto questi valori nella proposta equazione, farà ella

$$at^{-m-1} du^p \times \frac{ddt + 2dudt}{dt + tdu}^{2-p} + bt^{-n-1} du^q \times \frac{ddt + 2dudt}{dt + tdu}^{2-q} = ddt + 2dudt.$$

Perchè adunque manca in questa la indeterminata  $u$ , si potrà procedere avanti col metodo del suddetto num. 49.

Faccio

Faccio  $du = zdt$ , farà  $ddu = dzdt + zddt$ , ma  $ddu = -du^2 = -zzdt^2$ , adunque  $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$ ,

quindi furrogati questi valori, avremo

$$at^{-m-1}z^p dt^p \times \frac{dzdt + zdt^2}{z} + bt^{-n-1}z^q dt^q \times \frac{dzdt + zdt^2}{z} =$$

$$-\frac{dzdt}{z} + zdt^2, \text{ o sia } at^{-m-1}z^p dt \times \frac{dzdt + zdt^2}{z} +$$

$$bt^{-n-1}z^q dt \times \frac{dzdt + zdt^2}{z} = -\frac{dz}{z} + zdt, \text{ equazione dif-}$$

ferenziale del primo grado. Da ciò si vede, che dal principio potevasi ridurre la proposta equazione ponendo

$$x = c \int zdt, \text{ ed } y = c \int zdt t.$$

E S E M P I O.

Sia l'equazione  $x dx dy - y dx^2 = y y ddy$ .

Per rapportarla alla canonica, la scrivo così:  $xy^{-2} dx dy - y^{-1} dx^2 = ddy$ , farà dunque  $a=1, m=1, p=1, n=0, b=-1, q=2$ ; quindi furrogati questi valori nell'equazione canonica differenziale qui sopra ritrovata, avremo l'equazione ridotta  $t^{-2} z dt \times \frac{dzdt + zdt^2}{z} -$

$$t^{-1} z z dt = -\frac{dz}{z} + zdt, \text{ o sia } \frac{z dt + z z dt}{z} - \frac{z z dt}{z} =$$

$$-\frac{dz + z z dt}{z}, \text{ cioè } z z dt - z z t dt = -t dz.$$

Passando avanti per l'integrazione, farà  $\frac{t dt - dt}{t} =$

$\frac{dz}{z}$ , e però integrando,  $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + f$ , (la  $f$  è la

costante aggiunta per l'integrazione) cioè  $tz + z =$

$-t + ftz$ , ma per le sostituzioni  $z = \frac{du}{dt}$ ,  $x = c^u$ ,

$y = c^u t$ , farà  $du = \frac{dx}{x}$ ,  $t = \frac{y}{x}$ ,  $dt = \frac{x dy - y dx}{xx}$ , e però

$z = \frac{x dx}{x dy - y dx}$ , quindi surrogati i valori di  $t$ , e di  $z$ ,

averemo  $\frac{x dx + y dy}{y dx} = f$ .

57. Il terzo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali l'una delle due variabili, qualunque siasi, assieme con i suoi differenziali forma in ogni termine perpetuamente un medesimo numero di dimensioni. Ma bisogna distinguere due casi; l'uno quando sia costante il differenziale di essa variabile, che forma il medesimo numero di dimensioni; l'altro quando sia costante il differenziale dell'altra.

E quanto al primo caso: sia l'equazione canonica  $P x^m dy^{m+2} + Q x^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$ , in cui la somma degli esponenti di  $x$ , e di  $dx$  in ogni termine è la stessa;  $P$ ,  $Q$  sieno funzioni qualunque della  $y$ , e  $dx$  sia costante. Per ridurre questa equazione, si

fac-

cia  $x = c^u$ , essendo parimente  $c$  un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, ed  $u$  una nuova variabile. Sarà adunque  $dx = c^u du$ , e di nuovo differenziando, presa  $dx$  costante,  $c^u ddu + c^u du^2 = 0$ , cioè  $ddu = -du^2$ . Sostituiti questi valori nell'equazione, avremo  $P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m+1-n} = du^m ddy$ , la quale, perchè non contiene la  $u$ , farà soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque  $du = zdy$ , farà  $ddu = dzdy + zddy$ , ma  $ddu = -du^2$ , e  $du^2 = zzdy^2$ , adunque avremo  $zddy + dzdy = -zzdy^2$ , e però  $ddy = -\frac{zzdy^2 + dzdy}{z}$ .

Sostituiti pertanto nella ritrovata equazione questi valori di  $du$ , e  $ddy$ , farà

$$P dy^{m+1} + Q z^n dy^{m+1-n} = -z^{m+1} dy^{m+1-n} - z^{m+1} dy^{m+1} dz,$$

e dividendo per  $dy^{m+1}$ ,

$P dy + Q z^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m+1} dz$ , equazione del primo grado. Potevasi adunque sul bel principio porre

$x = c^{\int zdy}$ , e così in un sol colpo ridurre l'equazione.

ESEM-

## ESEMPIO.

Sia l'equazione  $zdx^2 dy + axdxddy = zxdx^2 dy^2 + zxxdyddy$ , in cui sia costante  $dx$ . Pongo adunque

$$x = c^{\int zdy}, \text{ e per\`o } dx = zdyc^{\int zdy}; \quad ddx =$$

$$c^{\int zdy} \times \frac{z^2 dy^2 + zddy + dydz}{z}, \text{ ma } dx \text{ \`e costante, dunque}$$

$$zzdy^2 + zddy + dzdy = 0, \text{ e per\`o } ddy = -\frac{zzdy^2 + dzdy}{z}.$$

Sostituiti adunque nell'equazione i valori di  $x$ , e di  $dx$ , averemo  $zazzdy^2 + azdyddy = zzdy^2 + zdyddy$ , e posto il

$$\text{valore di } ddy, \quad zazzdy^2 + azdy \times \frac{-zzdy^2 + dzdy}{z} =$$

$$zzdy^2 + zdy \times \frac{-zzdy^2 + dzdy}{z}, \text{ cio\`e dividendo per } dy^2,$$

$$az^2 dy - azdz = -zdz, \text{ o sia } ady = \frac{azdz - zdz}{z^2}, \text{ ed in-}$$

tegrando,  $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{z^2}$ , e finalmente restituendo il

$$\text{valore di } z \text{ dato dalla supposizione fatta di } x = c^{\int zdy},$$

$$\text{cio\`e } z = \frac{dx}{x dy}, \text{ averemo l'equazione ridotta}$$

$$aydx^2 = xxdy^2 - axdx dy.$$

58. Rispetto al secondo caso, sia l'equazione canonica  $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$ , in cui sia costante  $dy$ , e  $P, Q$  sieno funzioni qualunque di  $y$ .

Pongo, come sopra,  $x = c^u$ , e però  $dx = c^u du$ ,  $ddx = c^u ddu + c^u du^2$ . Fatte le sostituzioni nell'equazione canonica, avremo  $P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1} ddu$ , la quale, per non contenere la  $u$ , è soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque  $du = zdy$ , quindi essendo costante  $dy$ , sarà  $ddu = dzdy$ , e però fatte le sostituzioni, avremo  $P dy^{m+1} + Q z^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$ , e dividendo per  $dy^m$ ,  $P dy + Q z^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$ , equazione del primo grado, la quale potevasi in un sol colpo ridurre ponendo, come sopra,  $x = c^{\int zdy}$ .

E S E M P I O .

Sia l'equazione  $zdx dy = addx - yddx$ , in cui sia costante  $dy$ . Pongo adunque  $x = c^{\int zdy}$ , quindi  $dx = zdy \times c^{\int zdy}$ ,  $ddx = c^{\int zdy} \times \frac{z^2 dy^2 + zddy + dydz}{z}$ ; ma  
 fi



si suppone costante  $dy$ , dunque  $ddy = 0$ , e però  $ddx = \int zdy \times \overline{zzdy^2 + dzdy}$ . Fatte pertanto nella proposta equazione le sostituzioni, avremo  $zzdy^2 = azzdy^2 + adzdy - zzydy^2 - ydydz$ , e dividendo per  $dy$ ,  $zzdy = azzdy + adz - zzydy - ydz$ ; equazione differenziale del primo grado.

Per passare alla integrazione, divido l'equazione per  $az - yz$ , onde sia  $\frac{zdy}{a-y} = zdy + \frac{dz}{z}$ , o pure

$\frac{zdy}{a-y} - \frac{dz}{z} = zdy$ , quindi facendo uso del metodo del

num. 24., se così piace, ed integrando, avremo  $-\frac{1}{a-y} = -\frac{1}{a-y} + m$ , e finalmente restituendo  $\frac{1}{a-y} \times z$

il valore di  $z = \frac{dx}{xdy}$ , avremo l'equazione ridotta

$ydx + xdy = adx$ , trascurando la costante  $m$  aggiunta nell'integrazione.

A servito quest' esempio per l'applicazione del metodo, per altro erano superflue tante operazioni, mentre l'equazione  $zdx dy = addx - yddx$  si riduce in un batter d'occhio, trasportando il termine  $yddx$ , e scrivendo  $zdx dy + yddx = addx$ , poichè essendo costan-

te

te  $dy$ , l'integrale del primo membro è  $ydx + xdy$ , come è chiaro.

59. Oltre a ciò, che è stato detto intorno alle equazioni differenzio-differenziali, nelle quali nessuna prima flussione sia stata presa costante, si può aggiungere un'altro metodo più universale, il quale serve per tutte quelle, che sono comprese sotto la formola canonica  $x^{m+1} dx^m ddx + \frac{dx dy^{m+1}}{z} = dy^m ddy$ , in cui la  $z$

è in qualunque modo data per le funzioni di  $x$ , e di  $y$ .

Per ridurre questa, si determini per costante la flussione  $\frac{dx}{q}$ , e sia pure la  $q$  in qualunque modo data

per le funzioni di  $x$ , e di  $y$ ; indi si ponga  $\frac{dx}{q} = dp$ .

Poichè  $\frac{dx}{q}$  è costante, farà differenziando,  $q ddx =$

$dx dq = 0$ , cioè  $ddx = \frac{dx dq}{q}$ , o sia, posto in luogo di

$\frac{dx}{q}$  il valore  $dp$ ,  $ddx = dq dp$ . In oltre si ponga

$dy = u dp$ , e prese le seconde differenze nell'ipotesi di  $dp$  costante, per esser eguale alla costante  $\frac{dx}{q}$ , farà

$ddy = du dp$ . Sostituiti adunque nell'equazione canonica i valori così determinati in luogo di  $dx$ ,  $ddx$ ,  $dy$ ,

bbb c.

e  $ddy$ , avremo l'equazione  $z^{m+1} q^m dq dp^{m+1} + u^{m+1} dz dp^{m+1} = u^m du dp^{m+1}$ , e dividendo per  $dp^{m+1}$ ,

farà  $z^{m+1} q^m dq + u^{m+1} dz = u^m du$ , o sia  $q^m dq = \frac{u^m du - u^{m+1} dz}{z^{m+1}}$

, ed integrando,  $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{z^{m+1}}$

, e però  $u = z \times q^{m+1} + m+1 \times g^{m+1}$ .

$m+1 \times z^{m+1}$

Ma  $u = \frac{dy}{dp} = \frac{qdy}{dx}$ , adunque  $\frac{qdy}{dx} =$

$z \times q^{m+1} + m+1 \times g^{m+1}$ , equazione ridotta alle prime differenze.

60. Intorno a quest'ultima equazione è da osservarsi, che se la quantità  $z$  farà in tal modo data per  $x$ , e per  $y$ , che possa assegnarsi alla quantità  $q$  un valor tale, dato pure per  $x$ , e per  $y$ , onde in essa equazione sieno separabili le indeterminate, e però costruibile, o algebricamente, o almeno per le quadrature, avremo la curva, da cui dipende l'equazione differenzio-differenziale. E perchè molti possono essere i valori da assegnarsi alla  $q$ , molte potranno essere le curve, e ciascun valore della  $q$  ci somministrerà una diversa curva, o trascendente, o algebrica, la quale soddisfa alla questione. Sia

Sia l'equazione

$$x^2 y d x d d x + 2 a a y d x d y + a a x d y^2 = a a d y d d y .$$

Riferendo questa alla canonica, farà  $m = 1$ ,  $z = \frac{xxy}{y}$ ,

aa

e però la ridotta  $\frac{qdy}{dx} = \frac{xy}{aa} \times \frac{qq + 2gg}{y^2}$ ,

Prenda la  $q = x$ ; farà  $\frac{xdy}{dx} = \frac{xy}{aa} \sqrt{xx + 2gg}$ , cioè

$\frac{aady}{y} = \frac{xdx}{y} \sqrt{xx + 2gg}$ , il di cui integrale dipende in

parte dalla quadratura dell'iperbola, e la curva farà trascendente.

61. Nel fare passaggio dalle prime alle seconde differenze, o non si assume flussione alcuna per costante, o si assume quella, che più si vuole, come è stato detto; quindi nel ricercare le sommatorie delle formole del secondo grado, poichè si fa qual partito sia stato preso, si fa altresì come governarsi, e ne sono state spiegate le regole.

Ma vi sono infiniti Problemi, che portano alle seconde differenze senza, che si sappia quali costanti involvano le formole indi nascenti. Accade tal volta, che all'espressione analitica arrivare non si possa senza valersi delle costanti, e succede altresì talora, che l'e-

bbb 2

qua-

quazione si sviluppi senza ricorrere alle costanti. Questi due casi adunque devono essere esaminati, e devesi procurare qualche criterio per distinguere l'uno dall'altro. E perchè meglio di ogni altra cosa possono servire gli Esempj, prendo il seguente.

Si dimanda una curva tale, che la di lei assissa elevata a qual si sia dignità sia direttamente, come la seconda differenza dell'ordinata, e reciprocamente come la seconda differenza dell'assissa medesima. Avremo dunque l'analogia  $x^m, \frac{ddy}{ddx} :: a, b$ ; e per conse-

guenza l'equazione  $bx^m ddx = addy$ . In questa equazione offervo ambe le differenze seconde dell'assissa, e dell'ordinata; ma non so, quale costante sia stata assunta, o se non siasi assunta alcuna, e perciò non so la strada, per cui incamminarmi.

Nel caso della premessa equazione dico, che nessuna curva fra le possibili soddisfa al Problema, mentre si faccia passaggio dalle prime alle seconde differenze senza valersi delle costanti. All'opposto, determinate le costanti, si ritroveranno le curve, che adempiono le condizioni del Problema, ma infinite di numero, e differenti di natura, siccome quelle, che variano al mutarsi della costante arbitraria, che si assume.

Per distinguere l'una dall'altra specie di queste equazioni

zioni si può far uso della maniera, o canone, che nascerà da' seguenti esempj, e servirà in tutti que' casi, nei quali il calcolo integrale non ci abbandona.

## E S E M P I O I.

Venga proposta l'equazione

$$z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} = dy^m ddy; \text{ dico essere que-}$$

sta una di quelle tali formole, alle quali si può giugnere senza pigliare quantità alcuna in figura di costante. La variabile  $z$  sia data in qualunque modo per  $x$ , ed  $y$ .

La dimostrazione si renderà generale, per quanto si può, pigliando come costante la flussione  $\frac{dx}{q}$ , in cui  $q$  è

una funzione di  $x$ , ed  $y$  in qualunque modo combinate. Pongo per tanto  $\frac{dx}{q} = dp$ , e giacchè il primo mem-

bro di questa equazione è costante, sarà tale anche il secondo  $dp$ ; per lo che essendo  $dx = qdp$ , se si passi alle seconde differenze, sarà  $ddx = dqdp$ .

Appresso facciasi  $dy = udp$ , e prese le seconde differenze nell'ipotesi di  $dp$  costante, averassi  $ddy = dudp$ ; Quindi surrogati nella equazione principale i valori così

de-

determinati, nascerà l'equazione  $z^{m+1} q^m dq p^{m+1} + u^{m+1} dz dp^{m+1} = u^m du dp^{m+1}$ , e dividendo per  $dp^{m+1}$ ,

nascerà l'equazione libera dall'incognita  $p$ , e dalle sue funzioni, cioè  $z^{m+1} q^m dq + \frac{u^{m+1}}{z} dz = u^m du$ . Sommando

adunque, per le spiegate regole, non ommessa l'addizione della costante  $g$ ,  $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{m+1 \times z^{m+1}}$ , la qua-

le equazione ci dà  $u = z \times \frac{q^{m+1} + gm + g^{m+1}}{m+1}$ . E poichè  $dy = u dp = \frac{u dx}{q}$ , fatte le opportune sostituzioni, ci si presenta

l'equazione al più semplice stato ridotta, cioè

$$dy = \frac{z dx}{q} \times \frac{q^{m+1} + gm + g^{m+1}}{m+1}, \text{ il che ec.}$$

Dalla premissa maniera d'operare si deducono i seguenti Corollarj.

I. Se determinata la grandezza  $z$ , l'ultima equazione si costruirà, almeno per le quadrature, mentre ciò possa eseguirsi è manifesto, che infinite curve rispondono alla nostra formola, le quali cangiano natura alla mutazione della funzione costante assunta  $\frac{dx}{q}$ , ed ogni valore della

quan-

quantità  $q$  ci somministra una nuova equazione locale o algebrica, o trascendente.

II. Benchè alterato il valore della spezie  $q$ , nascano curve diverse, certo è però, che se pongasi la costante aggiunta  $g = 0$ , averassi sempre l'equazione  $dy = z dx$ . In questo caso nulla rileva, quale differenza  $\frac{dx}{q}$  siasi presa per costante; conciosiacchè collo sparire della data  $g$ , anche la variabile  $q$  si dilegua.

III. Ed ecco il segno, onde si conosce, che alla nostra equazione primaria si perviene senza assumere costante flussione alcuna, e che in tale supposizione la sua sommatoria si è  $z dx = dy$ . Di fatto richiamata sotto gli occhj la nostra espressione  $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} -$

$dy^m ddy = 0$ , e di bel nuovo differenziando l'integrale  $z dx = dy$ , senza assumere alcuna costante, onde si abbia  $z ddx + dz dx = ddy$ , se con il mezzo di queste due ultime equazioni farassi svanire nella formola principale, prima la  $dy$ , poscia la  $dx$  con le loro funzioni, si scoprirà

$$z^{m+1} dx^m ddx + z^m dz dx^{m+1} - z^{m+1} dx^m ddx - z^m dz dx^{m+1} = 0,$$

$$dy^m ddy - \frac{dz}{z} dy^{m+1} + \frac{dz}{z} dy^{m+1} - dy^m ddy = 0.$$

IV. Maneggiata la formola primaria, come sopra, ed essendosi ritrovata l'equazione ridotta al primo grado, cioè



cioè  $dy = \frac{z dx}{q} \times \frac{1}{q^{m+1} + g^{m+1}}$ , si dovrebbe fare

transito alle integrazioni, le quali alle volte sono superiori alla nostra industria, secondo i varj valori dell'esponente  $m$  della frazione  $z$  data per  $x$ , e per  $y$ , e della quantità  $\frac{dx}{q}$ , che si piglia per costante. Comunque vada la facen-

da, determinati in infiniti casi particolari i predetti valori, e scoperta l'equazione locale della curva in termini finiti, quando si passi alle prime, indi alle seconde differenze, tenuta ferma la costante  $\frac{dx}{q}$ , ci si presenterà la nostra

formola principale. Ma mutata costante, altre, ed altre formole si troveranno. Non mi fermo di più, perchè ciò è manifesto tornando indietro per le vestigia dell'Analisi.

V. Interviene lo stesso, tolta per costante la prima flussione  $\frac{dy}{q}$ ; conciosiacchè fatta l'operazione a norma

del metodo, la quale io tralascio per brevità, arriverassi all'equazione ridotta  $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \frac{1}{mg + g^{m+1}}$ ,

in cui parimente si noti, che fatta  $g = 0$ , torna a restituirsi l'equazione  $dx = \frac{dy}{z}$  espressa per le prime differenze.

VI.

VI. Adoperate alcune limitazioni più semplici , cioè  $m = 1$  ,  $z = xx$  , e  $q = x$  , se si farà uso della costante  $\frac{dx}{q}$  , come nel Corollario IV. , la formola

$$dy = \frac{zdx}{q} \times \frac{1}{q^{m+1} + gm + g^{m+1}}$$

si muta nella se-

guente  $dy = xdx \sqrt{xx + 2g}$  , la quale ammette integrazione analitica . Fatto poi uso della espressione contenuta

nel Corollario V.  $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \frac{1}{mg + g^{m+1}}$  na-

scente dalla costante assunta  $\frac{dy}{q}$  , tenute ferme le mede-

sime limitazioni di  $m = 1$  ,  $z = xx$  , e  $q = x$  , risulta l'espressione  $\frac{xxdx}{1 - x \sqrt{2g}} = dy$  , che senza l'ajuto de' lo-

garitmi non è sommabile , ed in conseguenza ci dà curve trascendenti .

Egli è adunque manifesto , che alla formola differenziale del secondo ordine  $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} dy^{m+1} =$

$dy^m ddy$  si poteva arrivare senza prendere alcuna costante , nel qual caso à luogo l'integrale  $zdx = dy$  ; ovvero fissando per costanti , a cagion d'esempio , le flussioni  $\frac{dx}{q}$  ,  $\frac{dy}{q}$  , ed allora ci si fanno avanti le sommatorie ,

ccc

che

che in tali supposizioni si sono ritrovate.

## E S E M P I O I I.

Abbiafi l'equazione  $x^m ddx = ddy + dy^2$ . Dico, che ad essa non si può arrivare, senza prendere una qualche costante, salvo l'unico caso, in cui sia  $m = -1$ . Per vederlo chiaramente; maneggio la formola nel seguente modo.

Primieramente prendo per costante  $dx$ , e però  $ddx = 0$ , dunque  $-\frac{ddy}{dy} = dy$ , ed integrando  $\int \frac{dx}{dy} = y$ , ovvero  $\frac{dx}{dy} = c^y$ . Pongasi  $c^y = z$ , farà  $ylc = lz$ , e però  $dy = \frac{dz}{z}$ , e sostituendo in luogo di  $dy$  questo valore, avrassi  $\frac{zdx}{dz} = c^y$ , ma  $c^y = z$ , dunque  $dx = dz$ , ed  $x = z = c^y$ ; e però  $\frac{dx}{x} = dy$ , equazione alla logaritmica.

Secondariamente mi faccio ad investigare, cosa succeda nell'ipotesi di un'altra costante, per esempio  $dy$ , e però  $ddy = 0$ . Pongo  $dx = sdy + cdy$ ; la  $s$  è una nuova variabile; e la  $c$  una quantità data. M'inoltro

alle

alle seconde differenze, farà  $dix = dsdy$ , e fatta la sostituzione,  $x^m dsdy = dy^2$ , o sia  $x^m ds = dy$ ; ma  $dy = \frac{dx}{s+c}$ ,

dunque  $sds + cds = x^{-m} dx$ , e sommando, ommessa l'aggiunta della costante,  $\frac{ss + cs}{2} = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$ , ovvero

$$s+c = \sqrt{\frac{2x^{-m+1} + cc}{-m+1}}. \text{ Ma } dx = s+c \times dy =$$

$$dy \sqrt{\frac{2x^{-m+1} + cc}{-m+1}}, \text{ dunque } \frac{dx}{\sqrt{\frac{2x^{-m+1} + cc}{-m+1}}} = dy.$$

Profeguisco, e cerco, se stia per avventura nascosta sotto l'ultima formola la logaritmica, che essendosi di sopra ritrovata nell'ipotesi della costante  $dx$ , può essere, che abbia luogo anche nell'altra supposizione della costante  $dy$ . Fatta  $c = 0$ , è d'uopo, che si verifichi l'uguaglianza

$$\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1}} = x, \text{ o pure } 2x^{-m+1} =$$

$-\frac{m+1}{2} \times xx$ . E perchè stia salda l'egualità, la stessa quantità  $-\frac{m+1}{2}$  deve essere, tanto nel coefficiente, quanto nell'esponente,  $= 2$ ; onde ne segue, che ciò s'ottiene, determinato l'indice  $m = -1$ .

Nella formola adunque  $x^m dx = ddy + dy^2$ , limitando il valore dell'esponente  $m = -1$ , si perviene all'equazione differenziale del secondo grado senza assumere costante, la di cui sommatoria è l'espressione logaritmica  $\frac{dx}{x} = dy$ . In ogni altro caso non si può ottenere la premessa espressione, se non fissando qualche grandezza infinitesima del primo ordine, siccome costante.

## E S E M P I O III.

Rimane, che si proponga per ultimo una equazione differenziale dell'altra classe, a cui non si possa mai giungere senza assumere una costante.

Ripiglio il Problema: Costruire una curva, in cui qualsivoglia dignità dell'assisa sia in ragione diretta della seconda flussione dell'ordinata, ed inversa della seconda flussione dell'assisa.

L'equazione è  $bx^m dx = addy$ . Facciasi  $dx = qdp$ ,  $dy = udp$ ; e praticate le operazioni, come nell'Esempio primo, avremo, prese le seconde differenze,  $ddx = dpdq$ ,  $ddy = dudp$ , e surrogati i valori,  $bx^m dq = adu$ ,

e sommando ,  $\int bx^m dq = au \pm g$  . Ma  $dy = u dp = \frac{u dx}{q}$  ,

dunque  $dy = \frac{dx}{q} \int x^m dq \pm \frac{g dx}{q}$  . In questo caso , fatta

$g = 0$  , qual si sia valore della spezie  $q$  ci dà una curva differente , se pure non si ponesse l'esponente  $m = 0$  ; con che si distrugge l'ipotesi , e si cangia problema . Lo stesso dicasi , fatta costante la frazione  $\frac{dy}{q}$  , e da ciò

si conchiuda , non esser possibile un'equazione differenziale del primo grado , che senza il beneficio della costante restituisca la nostra formola , quando di bel nuovo venga differenziata ; conciosiacchè , se vi fosse , avrebbe a manifestarsi in qualunque assunzione di costante , e pure l'analisi ci dimostra il contrario .

P R O B L E M A I .

62. *Dato il raggio osculatore in qual si sia modo per l'ordinata dalla curva , ritrovare la curva .*

Siccome , data la curva , il ritrovare il di lei raggio osculatore si chiama il problema , o metodo diretto de' raggi osculatori , di cui si è trattato al Capo V.

del

del Libro secondo; così, dato il raggio osculatore, ritrovare, quale sia la curva, a cui egli appartiene, si chiama il problema inverso de' raggi osculatori. Sia pertanto il raggio osculatore  $= r$  dato in qualsivoglia modo per la ordinata  $y$  della curva; presa quella, che si vuole, delle formole de' raggi osculatori per le curve in primo luogo riferite al fuoco, per esempio

$$\frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}, \text{ in cui } dx \text{ è costante, e la } ds \text{ è}$$

l'elemento della curva, avremo l'equazione

$$r = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}, \text{ o pure essendo } ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

e  $dsdds = dyddy$ , perchè  $dx$  è costante,  $r =$

$$\frac{ydyds^2}{dxdyds - ydxdds}$$

Per ridurre questa equazione mi servo del metodo del num. 49., e però pongo  $ds = p dx$ , onde  $dds = dp dx$ , quindi fatte le sostituzioni nell'equazione, farà  $r =$

$$\frac{ppydy}{pdy - ydp}, \text{ o sia } \frac{pdy - ydp}{pp} = \frac{ydy}{r}, \text{ e però integrando,}$$

giacchè  $r$  è data per  $y$ ,  $y = \int \frac{ydy}{r} \pm b$ , ma

$$p = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx}}, \text{ dunque la curva sa-}$$

rà

rà  $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$ ; equazione ridotta alle prime differenze, perchè essendo  $r$  data per  $y$ , l'integrale  $\int \frac{ydy}{r}$  si potrà sempre avere, almeno trascendentemente.

In altro modo.

Scrivo l'equazione  $r = \frac{yds^2}{dxds^2 - ydxddy}$  così:

$\frac{yds^2}{r} = dxds^2 - ydxddy$ , indi dal punto  $B$ , (Fig. 8.)

da cui partono le ordinate  $BE$  della ricercata curva  $AEC$ , conduco normale ad  $EB$  la  $BF$  terminata al raggio osculatore  $EQ$ , e chiamate  $BF = p$ ,  $EF = q$ , per le note formole della normale, e sottornale, farà  $q = \frac{yds}{dx}$ ,  $p = \frac{ydy}{dx}$ , o sia  $dy = \frac{pdx}{y}$ , e differenziando

nell'ipotesi di  $dx$  costante,  $ddy = \frac{ydpdx - pxdy}{yy}$ , e

fatta la sostituzione nell'equazione principale, farà  $\frac{yds^2}{r} = dxds^2 - \frac{dpdx^2 + pdx^2dy}{y}$ , ma  $ds = \frac{qdx}{y}$ , dunque

$\frac{q^2 dx}{r} = qqdx - yydp + pydy$ , ed essendo  $dx = \frac{ydy}{p}$ ,

farà



farà  $\frac{q^2 dy}{r} = qqdy + ppdy - ypdp$ . Ma, per l'angolo retto

$EBF$ , è  $pp = qq - yy$ , e  $pdp = qdq - ydy$ , quindi fatta la sostituzione, si averà  $\frac{qqdy}{r} = 2qdy - ydq$ , e multipli-

cando per  $y$ , indi dividendo per  $qq$ , farà  $\frac{ydy}{r} =$

$\frac{2qydy - yydq}{qq}$ , ed integrando,  $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{yy}{q}$ , ma

$q = \frac{yds}{dx}$ , dunque  $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ .

Più semplicemente ancora, sfuggendo le seconde differenze, si potrà fare così:

Preso l'archetto infinitesimo  $EC$ , sia  $CED$  la corda prodotta, a cui sia normale  $BD$ , se ora si chiami  $BD = p$ , per le cose dette al numero 115. del Capo V. del secondo Libro,  $QE$ , cioè  $r = \frac{ydy}{dp}$ , e però  $\frac{ydy}{r} = dp$ ,

ed integrando, per essere  $r$  data per  $y$ ,  $\int \frac{ydy}{r} \pm b = p$ ;

ma nello stesso citato luogo  $p = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , dun-

que

que  $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ .

Sia  $r = \frac{y}{b} \sqrt{aa + bb}$ , adunque farà

$$\int \frac{b dy}{\sqrt{aa + bb}} \pm b = \frac{y dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ ed integrando attual-}$$

mente, ommessa per maggiore semplicità la costante  $b$ ,  $\frac{b}{\sqrt{aa + bb}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , e però  $bbdx^2 + bbdy^2 =$

$aadx^2 + bbdx^2$ , cioè  $b dy = a dx$ , logaritmica spirale dell' Esempio V. num. 128. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio  $QE$ , ci venga dato in qualunque modo per l'ordinata  $y$  il co-raggio  $HE$ , che chiamo  $= z$ . Per la similitudine de' triangoli  $EBD$ ,  $QEH$ , farà  $EB, BD :: QE, EH$ , cioè  $y, p :: \frac{ydy}{dp}$ ,

$z$ , e però  $z = \frac{pdy}{dp}$ , o sia  $\frac{dy}{z} = \frac{dp}{p}$ , ed integrando,

$$\int \frac{dy}{z} \pm b = lp. \text{ Sia } z = y, \text{ farà } \int \frac{dy}{y} \pm b = \frac{dp}{p}, \text{ ed in-}$$

tegrando,  $ly = lp + \int \frac{m}{b}$ , cioè  $y = \frac{pm}{b}$ ; ma  $p =$

$$\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ dunque } b \sqrt{dx^2 + dy^2} = mdx, \text{ e pe-}$$

ddd

rò

rò  $b dy = dx \sqrt{mm - bb}$ , logaritmica spirale, e la stessa della citata di sopra, quando sia  $b = b$ ,  $m = \sqrt{aa + bb}$ .

63. Per le curve riferite all'asse la formola del raggio osculatore è  $\frac{ds^3}{-dxddy}$ , posta  $dx$  costante, e

però l'equazione  $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$ .

Pongo  $dy = qdx$ , e però  $ddy = dqdx$ , onde fatte le sostituzioni,  $r = \frac{dx^2 + dy^2}{-dx^2 dq}$ , e posto il valore  $\frac{dy}{q}$  in

luogo di  $dx$ ,  $r = \frac{dy \times \sqrt{1 + qq}}{-qdq}$ , cioè  $\frac{dy}{r} = \frac{-qdq}{\sqrt{1 + qq}}$ ,

ed integrando,  $\int \frac{dy}{r} \pm b = \frac{1}{\sqrt{1 + qq}}$ , ma  $q = \frac{dy}{dx}$ ,

dunque  $\int \frac{dy}{r} \pm b = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ .

Sia  $r = \frac{2aay + aa^2}{4yy + aa^2}$ , adunque farà

$\int \frac{2aady}{4yy + aa^2} \pm b = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , ed integrando attual-

mente,

mente, ommessa la costante  $b$ ,  $\frac{2y}{\sqrt{4yy+aa}} =$

$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ , cioè  $2ydy = adx$ , ed integrando,  $yy = ax$ ,

parabola dell' Esempio primo num. 122. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio, che chiamo  $= z$ , la di cui formola, supposta  $dx$  costante, è  $\frac{dx^2+dy^2}{-dy} = z$ , e posta

$dy = qdx$ ,  $ddy = dqdx$ , e fatte le sostituzioni de' valori di  $ddy$ , e di  $dx$ , farà  $\frac{dy \times 1 + qq}{-qdq} = z$ , cioè  $\frac{dy}{z} =$

$\frac{-qdq}{1+qq}$ , ed integrando,  $\int \frac{dy}{z} \pm b = -l\sqrt{1+qq}$ ,

quindi se la  $z$ , cioè il co-raggio farà in tal modo dato per  $y$ , che  $\int \frac{dy}{z}$  sia logaritmico, avremo l'equazio-

ne differenziale del primo grado espressa nella solita ordinaria maniera, in altro caso farà espressa con quantità logaritmiche.

Sia  $z = \frac{4y^2+aa}{aa}$ , avremo l'equazione

$\int \frac{aady}{4y^2+aa} \pm b = -l\sqrt{1+qq}$ , ed integrando attual-

mente,

mente, ommessa la costante  $b$ ,  $\int \frac{y}{\sqrt{yy + \frac{aa}{4}}} =$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+qq}}$ , e però  $\frac{yy}{yy + \frac{aa}{4}} = \frac{1}{1+qq}$ , e posto il

valore di  $q$ ,  $2ydy = adx$ , ed integrando,  $yy = ax$ , la parabola sopra citata.

64. Il raggio osculatore, o co-raggio sia in secondo luogo dato in qualsivoglia modo per l'assisa  $x$ , egli è chiaro, che in questo caso non possono servire le riduzioni avute nel primo, poichè le sommatorie  $\int \frac{dy}{r}$ ,  $\int \frac{dy}{z}$  non si averanno mai, se  $r$ , e  $z$  sieno date per  $x$ .

Presa adunque la formola del raggio osculatore in cui è costante  $dx'$ , cioè  $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{3}{2}}$  per le curve riferite all'asse (giacchè in quelle riferite al fuoco il raggio, o co-raggio non può esser dato per l'assisa) sarà  $r = \frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{3}{2}}$ ; e però istessamente, come sopra, pon-

go  $dy = qdx$ , onde  $ddy = dqdx$ ,  $dy^2 = qqdx^2$ , e fatte le

fosti-

sostituzioni,  $r = \frac{dx^2 + qdx^{\frac{3}{2}}}{-dx^2 dq}$ , cioè  $\frac{dx}{r} = \frac{-dq}{\frac{1+qq^{\frac{3}{2}}}{r}}$ ,

ed integrando,  $\int \frac{dx}{r} \pm b = \frac{-q}{\frac{1}{1+qq}}$ , equazione ri-

dotta alle prime differenze, perchè essendo  $r$  data per  $x$ , la sommatoria  $\int \frac{dx}{r}$  si potrà sempre avere, almeno

trascendentemente. E posto il valore di  $q$ ,  $\int \frac{dx}{r} \pm b = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ .

Sia  $r = 2\sqrt{4aa - 2ax}$ ; adunque farà  $\int \frac{dx}{2\sqrt{4aa - 2ax}}$

$\pm b = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , ed integrando attualmente, ommef-

fa la costante  $b$ ,  $\frac{-\sqrt{4aa - 2ax}}{2a} = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , e

quadrando, e riducendo al comune denominatore,  $4aadx^2 - 2axdx - 2axdy^2 = 0$ , cioè  $dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$ ,

equazione alla cicloide del num. 131. Capo V. Libro II.

In

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio. Dunque  $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ , e posta istessamente  $dy = qdx$ ,

onde  $ddy = dqdx$ ,  $dy^2 = qqdx^2$ , e fatte le sostituzioni in luogo di  $ddy$ , e di  $dy^2$ , farà  $z = \frac{dx^2 + qqdx^2}{-dqdx}$ , cioè

$$\frac{dx}{z} = \frac{-dq}{1+qq}, \text{ ed integrando, } \int \frac{dx}{z} \pm b = \int \frac{-dq}{1+qq};$$

ma l'integrale dell'omogeneo di comparazione è arco di circolo; dunque se il co-raggio farà in tal modo dato, che anche  $\int \frac{dx}{z}$  sia arco circolare, e questi archi

si corrispondano come numero a numero, avremo l'equazione ridotta alle prime differenze, ed espressa in quantità ordinarie.

Sia  $z = 2\sqrt{2ax - xx}$ , adunque farà

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{2ax - xx}} = \int \frac{-dq}{1+qq};$$

ma l'integrale del primo membro è l'arco di circolo, la di cui tangente sia  $\sqrt{2ax - xx}$ , e del secondo è l'arco di circolo, la di cui tangente sia  $q$ , dunque farà  $\sqrt{\frac{2ax - xx}{x}} = q = \frac{dy}{dx}$ , e però  $dy = dx \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$ , equazione alla stessa cicloide.

PRO-

## P R O B L E M A II.

65. Dato il raggio osculatore in qualunque modo per la curva riferita all'asse, ritrovare la curva stessa.

La formola del raggio osculatore, posto costante  $ds$  (elemento della curva) si è  $\frac{dxds}{ddy}$ , e però sarà l'e-

quazione  $r = \frac{dxds}{ddy}$ . Chiamo  $t$  la tangente della curva,

e  $p$  la sottotangente; sarà  $\frac{yds}{dy} = t$ , e differenziando

nell'ipotesi di  $ds$  costante,  $dt = \frac{dy^2 ds - ydsddy}{dy^2}$ , cioè

$ddy = \frac{dy^2 ds - dy^2 dt}{yds}$ , onde fatta la sostituzione, sarà

$r = \frac{ydxds^2}{dy^2 ds - dy^2 dt}$ . Ma poichè si è  $p = \frac{ydx}{dy}$ , e  $t = \frac{yds}{dy}$ ,

sarà  $dx = \frac{pdy}{y}$ ,  $ds = \frac{tdy}{y}$ ; onde sostituiti questi valori

nella equazione superiore, si averà  $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$ ;

ma



ma  $p = \sqrt{tt - yy}$ , dunque  $r = \frac{tds \sqrt{tt - yy}}{tdy - ydt}$ , cioè

$$\frac{ds}{r} = \frac{tdy - ydt}{t \sqrt{tt - yy}} .$$

Il primo membro di quest'ultima equazione è in nostra mano, almeno trascendentemente, poichè  $r$  è una funzione di  $s$ ; nel secondo poi facilmente si separano le indeterminate, se si faccia  $q = \frac{y}{t}$ , con che

$$\text{averassi la semplicissima equazione } \frac{ds}{r} = \frac{dq}{\sqrt{1 - qq}} .$$

Se nella formola  $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$  in luogo di  $t$  si

avesse preso il valore  $\sqrt{pp + yy}$ , averebbesi ritrovato  $r = \frac{pp + yy}{pdy - ydp} \times ds$ , e fatta  $\frac{y}{p} = z$ , l'equazione pure sem-

$$\text{plicissima } \frac{ds}{r} = \frac{dz}{1 + zz} .$$

Le due quantità differenziali  $\frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}$ ,  $\frac{dz}{1 + zz}$  so-

no l'espressione dell'elemento d'arco di circolo; quindi se l'integrale  $\int \frac{ds}{r}$  farà algebrico, o pure dipenderà

da'

da' logaritmi, o da quadrature più alte, la rettificazione delle ricercate curve, ed il valore del raggio osculatore supporrà la quadratura del circolo; ma all'opposto potrà l'uno, e l'altro esser algebrico, se l'integrale  $\int \frac{ds}{r}$  convenga con una formola d'arco circolare.

Ritenuta una delle due equazioni, per esempio, la seconda  $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$ ; poichè  $ds = tdy = \frac{dy}{y} \sqrt{pp+yy}$ , e  $p = \frac{y}{z}$ , farà  $ds = \frac{dy}{z} \sqrt{1+zz}$ , onde. posto questo valore nell'equazione, averassi  $dy = \frac{rzdz}{1+zz\sqrt{1+zz}}$ .

Essendo  $ds = \frac{dy}{z} \sqrt{1+zz}$ , farà anche  $ds^2$ , cioè  $dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2 + zzdy^2}{zz}$ , e però  $dx = \frac{dy}{z}$ .

Il dato raggio osculatore  $r$  sia  $= 1 + ss$ ; l'equazione  $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{r}$  si muterà in questa  $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{1+ss}$ , da cui si ricava  $z = s$ , e però  $r = 1 + zz$ . Pongo questo valore nella equazione  $dy = \frac{rzdz}{1+zz\sqrt{1+zz}}$ ; e farà  $dy = \frac{zdz}{\sqrt{1+zz}}$ ; ed integrando, ommessa la co-

e e e

stante,

stante,  $y = \sqrt{1 + zz}$ , quindi  $z = \sqrt{yy - 1}$ . Adunque perchè  $\delta$  ritenuto  $dx = \frac{dy}{z}$ , farà finalmente  $dx =$

$\frac{dy}{\sqrt{yy - 1}}$ , equazione della ricercata curva nella suppo-

sizione assunta del raggio osculatore. La costruzione dipende dalla quadratura dell'iperbola.

Prendo la formola del raggio osculatore  $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dxds}$ , in cui nessuna funzione prima è costan-

te. Dispongo l'equazione così:  $\frac{dy}{dx} \times \frac{ddy - dds}{dy ds} = \frac{ds}{r}$ .

L'integrale di  $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$  si è  $l dy - l ds$ , che pongo =

$l p$ ; dunque farà  $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{dp}{p}$ , e  $\frac{dy}{ds} = p$ , e però fa-

rà l'equazione  $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p}$ ; ma  $p = \frac{dy}{ds}$ , e  $\frac{dy^2}{pp} =$

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ , dunque  $dx = \frac{dy \sqrt{1 - pp}}{p}$ ; e sostit-

tuendo questo valore, farà  $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1 - pp}}$ , equazione

in cui sono separate le variabili, e che per conseguenza può trattarsi con la maniera di sopra usata.

Sia

Sia la formola del raggio osculatore  $\frac{ds}{r} = -\frac{dydds}{dsdx}$ ,

in cui è costante  $dy$ . Pongo  $ds = qdy$ , e però  $dds = dqdy$ , dunque  $\frac{ds}{r} = -\frac{dy^2dq}{dsdx}$ ; ma  $ds^2 = dx^2 + dy^2 =$

$qqdy^2$ , onde ricavasi  $dx = dy \sqrt{qq - 1}$ , e  $dxds = qdy^2 \sqrt{qq - 1}$ . Fatta pertanto questa sostituzione, farà  $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq - 1}}$ .

Sia finalmente la formola del raggio osculatore  $\frac{ds}{r} = -\frac{dxddy}{ds^2}$ , in cui è costante  $dx$ . Pongo  $z = \frac{dx}{dy}$ , e però  $dz = -\frac{dxddy}{dy^2}$ ; dunque  $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2dz}{ds^2}$ , ma  $dx = zdy$ , e  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = zzdy^2 + dy^2$ , quindi  $\frac{ds}{r} =$

$$\frac{dz}{1 + zz}$$

In qualunque modo adunque si operi, l'integrale  $\int \frac{ds}{r}$  farà sempre riferito alla rettificazione, o quadratura del circolo.

Sia dato in qualunque maniera per la curva il co-raggio, che chiamo =  $u$ . Prendo una delle tre for-

eee 2

mo-

mole superiori, per esempio quella, in cui è stata presa costante  $dy$ , cioè  $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$ , dove è stato

posto  $ds = qdy$ . Sarà il raggio  $r = \frac{uds}{dx}$ , e posto questo

valore nella formola, avremo  $\frac{ds}{u} = \frac{-dsdq}{qdx\sqrt{qq-1}}$ ;

ma  $ds = qdy$ , e  $dx = dy\sqrt{qq-1}$ , quindi fatte le sostituzioni, farà  $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{qq-1}$ ; ma  $u$  è data per  $s$ , adun-

que ec.

Qui si offervi, che siccome la sommatoria  $\int \frac{ds}{r}$  è eguale all'espressione d'arco circolare, così l'altra sommatoria  $\int \frac{ds}{u}$  viene riferita alla quadratura dell'iperbolla, o sia a' logaritmi.

66. Con simili, o poco diversi artifizj e maniere si potranno ridurre a' secondi differenziali molte equazioni, o formole espresse con differenziali terzi, quarti ec. Ed in primo luogo il metodo del num. 49. si può estendere (dentro certe limitazioni però) alle equazioni differenziali del terzo ordine, del quarto, del quinto ec., vale a dire si ridurranno sempre al primo ordine le equazioni del terzo, purchè l'una, e l'altra

l'altra delle variabili finite  $x, y$  in esse manchi; si ridurranno quelle del quarto, purchè oltre l'una, e l'altra delle due variabili finite  $x, y$ , in esse manchi l'una, o l'altra delle prime flussioni  $dx, dy$  con le rispettive funzioni; si ridurranno quelle del quinto, purchè in esse manchino ambe le variabili finite, ed ambe le prime loro flussioni; quelle del sesto, purchè oltre tutto ciò, manchi l'una, o l'altra delle flussioni seconde, e così vadasi discorrendo.

Sia l'equazione  $dxddd y + dx^2 ddy = dx^4 + dy^4$ , in cui è stata presa costante  $dx$ . Faccio al solito  $pdx = dy$ , e però  $dpdx = ddy$ ,  $ddpdx = dddy$ ; fatte pertanto le sostituzioni, si averà  $dx^2 ddp + dx^3 dp = dx^4 + dy^4$ ; ma  $dy^4 = p^4 dx^4$ , dunque sarà  $ddp + dx dp = dx^2 + p^4 dx^2$ , equazione ridotta al secondo ordine. Pongo in oltre  $qdx = dp$ , ritenendo per costante  $dx$ , e però  $dqdx = ddp$ , onde sostituendo, sarà  $dqdx + dpdx = dx^2 + p^4 dx^2$ , cioè  $dq + dp = dx + p^4 dx$ ; ma  $dx = \frac{dp}{q}$ , dunque

$$dq + dp = \frac{dp}{q} + \frac{p^4 dp}{q}, \text{ equazione ridotta alle prime dif-}$$

ferenze.

Sia l'equazione differenziale del quarto ordine  $d^4 y + dxddd y - dx^2 ddy = 0$ , in cui sia costante  $dx$ . Faccio adunque  $pdx = dy$ , e però  $dpdx = ddy$ , e  $ddpdx = dddy$ , e  $dddpx = d^4 y$ ; fatte però le sostituzioni,

ni, si averà  $ddp + dxddp - dx^2 dp = 0$ , equazione, che è il caso del sopra posto esempio, onde si fa maneggiare, e facilmente si ridurrà alle prime flussioni.

Il metodo del num. 49. ritrovato già tempo fa dal Sig. Conte Jacopo Riccati prima d'ora mi era noto; ma la qui sopra posta estensione, siccome il problema secondo inverso de' raggi osculatori ora solamente gli ò appresi, che mi è venuto alle mani il secondo Tomo de' commentarj dello Istituto di Bologna; e certamente troppo tardi per me, perchè ritrovandomi già al termine dell'impressione di questa mia fatica, non sono più in tempo di prevalermi d'altre dottissime Dissertazioni, e del P. Vincenzo Riccati figlio del suddetto Sig. Conte Jacopo, e del Sig. Gabriello Manfredi ivi inferite. Basterà adunque averle indicate al Lettore, acciò voglia trarne profitto.

67. Veduta la suddetta estensione del metodo del num. 49., passo ad altre equazioni, e ad altri ripieghi; e però sia l'equazione  $pdyddy^2 = pdx^2 ddy - 2pdxddxddy - dpdx^2 ddy$ , in cui la  $p$  è in qualunque modo data per  $x$ , ed  $y$ , ed è stato preso per costante l'elemento  $ds$  della curva. Poichè  $ds$  è costante, farà  $dxddx = -dyddy$ , onde sostituito questo valore in luogo di  $dxddx$ , farà  $pdyddy^2 = pdx^2 ddy + 2pdyddy^2 - dpdx^2 ddy$ , cioè cancellato ciò, che si elide,  $dpdx^2 ddy = pdyddy^2 + pdx^2 ddy$ ,

o sia  $\frac{dp}{p} = \frac{dyddy}{dx^2} + \frac{ddy}{dy}$ , e posto in luogo di  $dyddy$

il valore  $-dxddx$ , farà  $\frac{dp}{p} = -\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy}$ , e final-

mente integrando con i logaritmi,  $lp = lddy - ldx - lds$ , essendo  $ds$  costante, e però  $p = \frac{ddy}{dxds}$ , equazio-

ne ridotta alle seconde differenze.

Sia l'equazione  $bdzdddz - 3bddzddz - dbdzddz = 0$ , in cui la  $b$  è in qualunque modo data per  $x$ , e  $z$ . Si finga la seguente equazione  $b^m dz^n ddx^r =$  ad una costante (le  $m, n, r$  sono potestà incognite da determinarsi nel progresso), dunque differenziando, sarà  $rb^m dz^n ddx^{r-1} dddz + nb^m ddx^r dz^{n-1} ddz + mb^{m-1} dbdz^n ddx^r = 0$ , la quale divisa per  $b^{m-1} dz^{n-1} ddx^{r-1}$  si riduce ad essere  $rbdzdddz + nbddzddz + mbdzddz = 0$ . Paragonata questa equazione termine per termine con la principale proposta, si à  $r = 1, n = -3, m = -1$ , adunque in vece dell'equazione finta  $b^m dz^n ddx^r =$  ad una costante, avremo la vera  $\frac{ddz}{bdz} =$  ad una costante, che è l'integrale

della proposta.

Per via di logaritmi ancora si può ottenere la stessa integrazione. Ripiglio l'equazione  $bdzdddz - 3bddzddz - dbdzddz = 0$ : divido per  $bdzddz$ , fa-

rà



rà  $\frac{d^3dx}{d^3x} - 3\frac{ddz}{dz} - \frac{db}{b} = 0$ , ed integrandò,  $l^3dx - l^3dz^3 - lb =$  ad un logaritmo costante, dunque  $\frac{ddx}{bdz^3} =$

ad una costante.

Finirò queste Instituzioni con una avvertenza, ed è, che deve l'accorto Analista procurare con tutta l'industria di scansare nella soluzione de' Problemi le seconde, e molto più le ulteriori flussioni per mezzo di certi ripieghi, che nascono opportunamente sul fatto. Tali artificj si vedono adoperati da illustri Matematici ne' Problemi delle *Curve Elastiche*, *Catenarie*, *Velarie*, in quello degl' *Isoperimetri*, ed in altri, le soluzioni de' quali pubblicate sì negli Atti di Lipsia, come in altre opere, si potranno leggere, a fine di acquistare quella avvedutezza e destrezza, che è necessaria.

F I N E.

610512



## T O M O S E C O N D O .

	ERRORI	CORREZIONI
Pag. 432 lin. 11	giungne	giunge
Pag. 435 lin. 22	lineeta	lineetta
Pag. 511 lin. 9	equaaione	equazione
Pag. 515 lin. 14	<i>NOPQR</i>	<i>NOPQMR</i>
Pag. 587 lin. 17	divegenti	divergenti
Pag. 697 lin. 1	queste frazioni	questa frazione
Pag. 727 lin. 13 ) lin. 20 )	<i>DCEB</i>	<i>DECB</i>
Pag. 745 lin. 14	<i>TS</i>	<i>TR</i>
Pag. 790 lin. 17	della	dalla
Pag. 795 lin. ult.	$-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$	$-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$
Pag. 844 lin. 10	incogoita	incognita
Pag. 901 lin. 10	$-\frac{apdy-fdp}{ep+m}$	$-\frac{apdp-fdp}{ep+m}$
Pag. 924 lin. 5	$\times \frac{-z^3 dx}{\frac{x^9}{2}}$	$\times \frac{-z^3 dx}{\frac{2}{x^2}}$
Pag. 929 lin. 1	$+ b^3 xxdz$	$+ b^3 xxdx$
Pag. 939 lin. 2	dottissimo	dottissimo



Fig. 2.

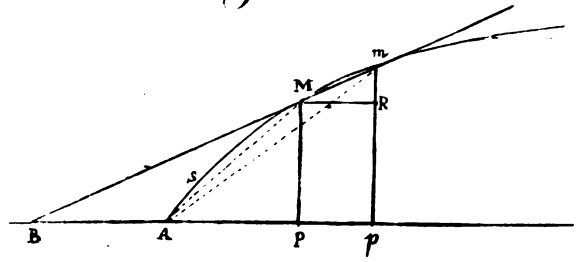


Fig. 4.

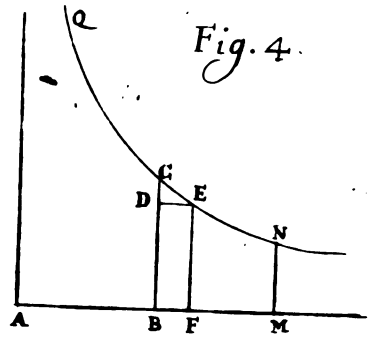


Fig. 6.

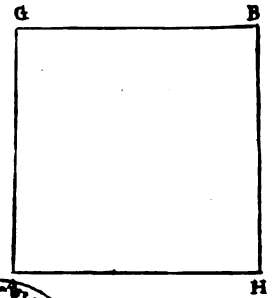
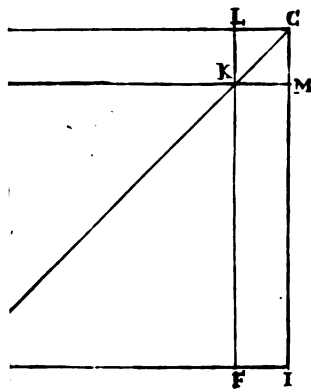




Fig. 8

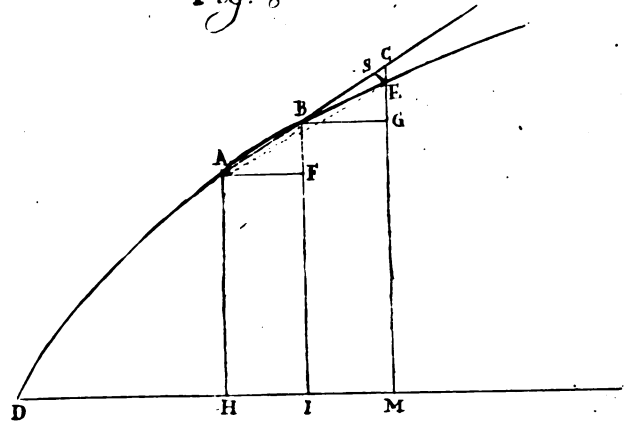


Fig. 10.

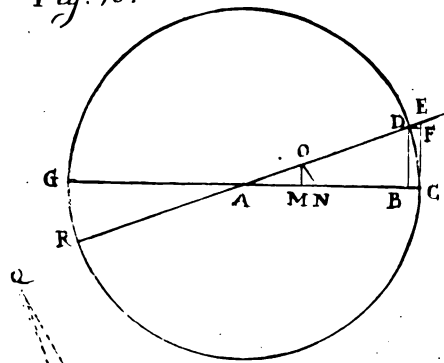
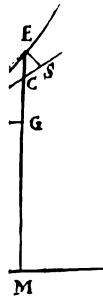


Fig. 12.

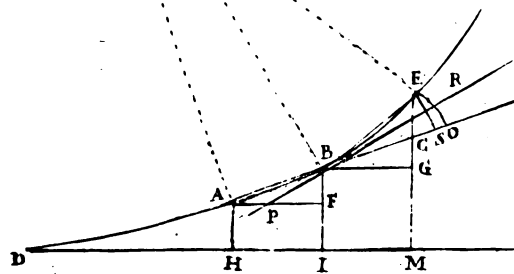




Fig. 13.

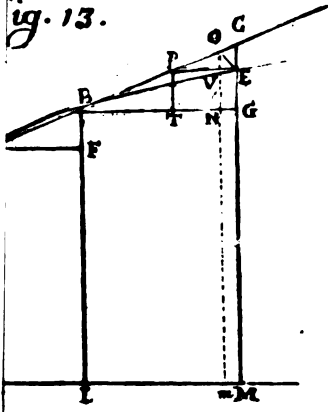


Fig. 14.

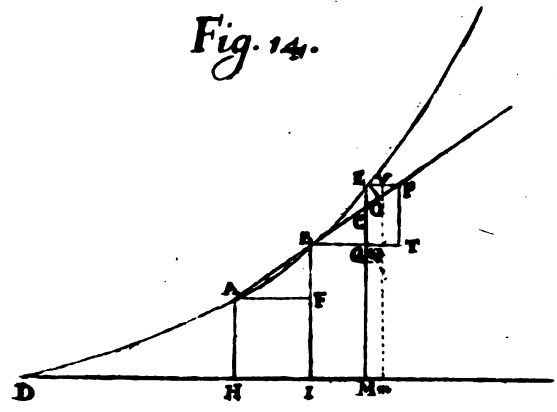


Fig. 15.

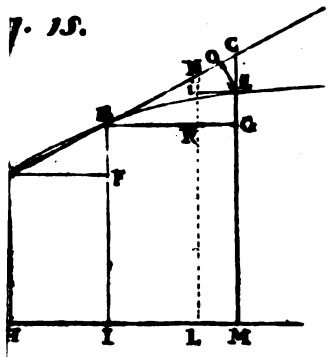


Fig. 16.

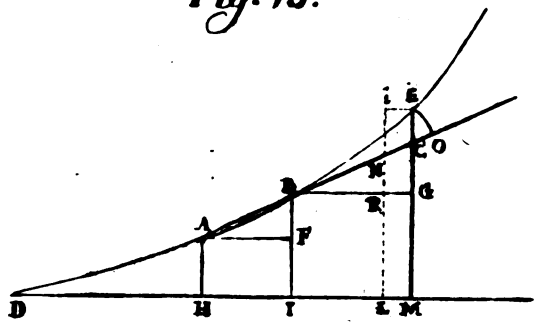


Fig. 17.

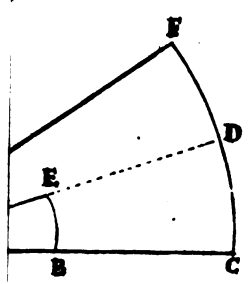
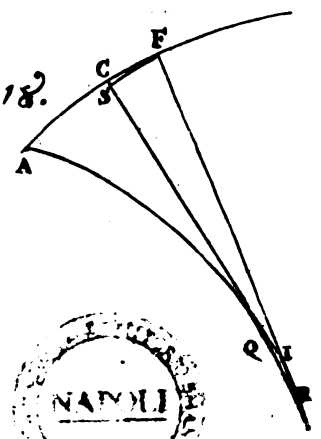


Fig. 18.





17

Fig. 19.

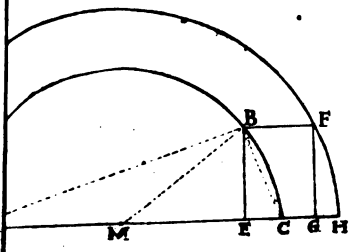


Fig. 20.

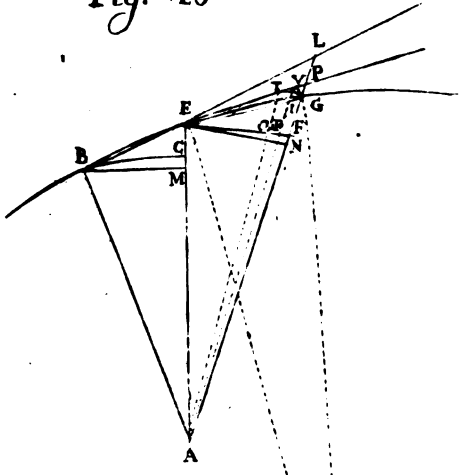


Fig. 22.

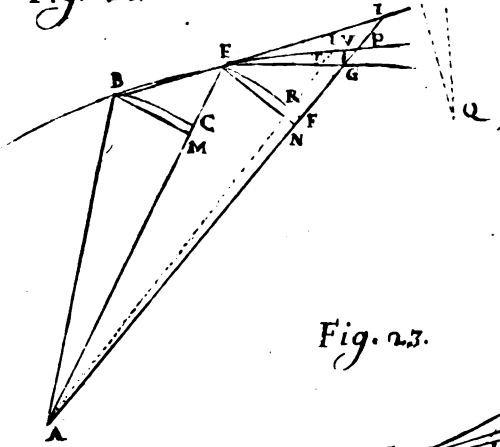


Fig. 23.

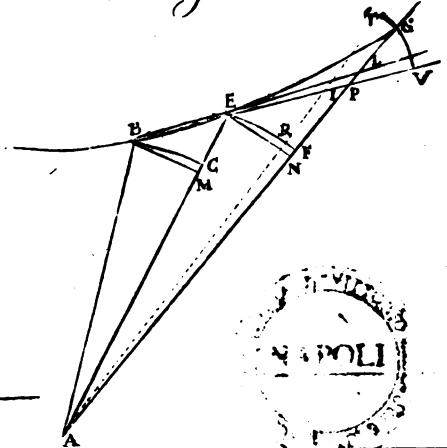
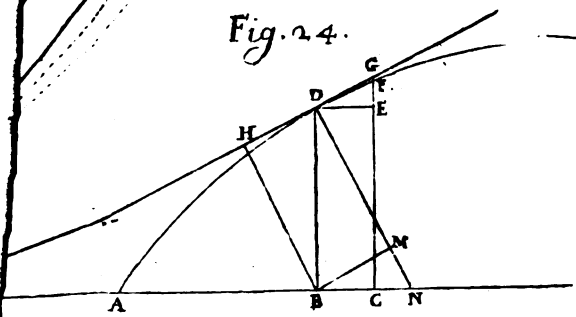


Fig. 24.





VI.

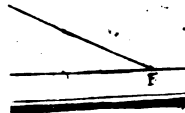
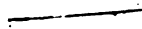
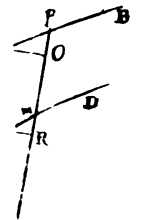
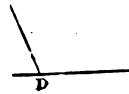
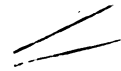




Fig. 33.

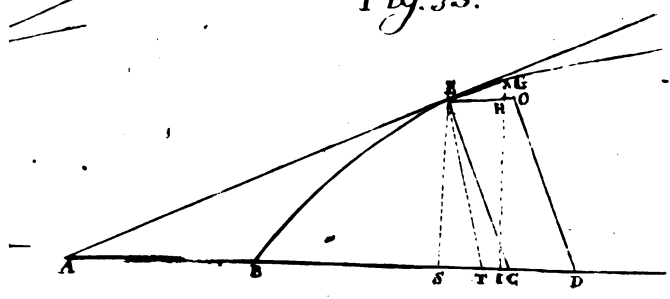


Fig. 37.

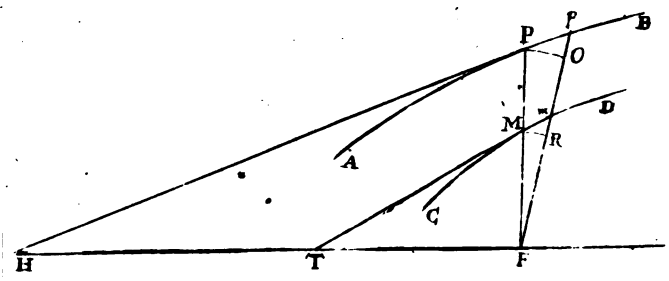


Fig. 35.

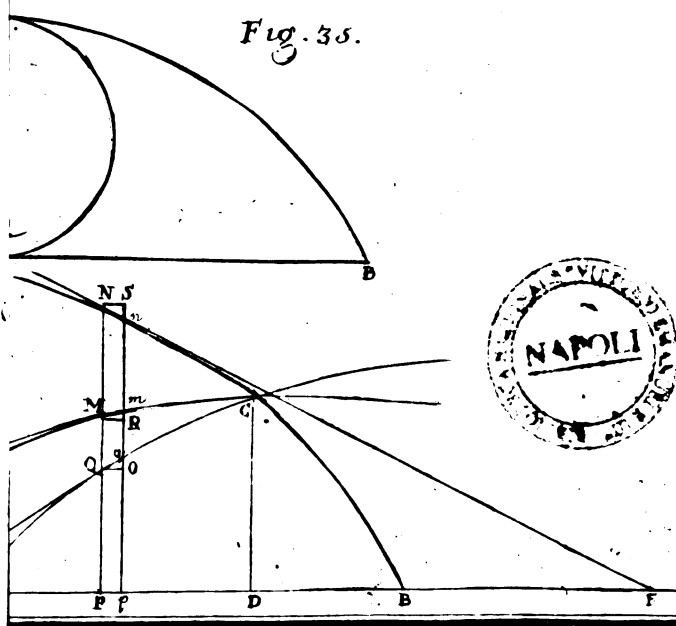




Fig. 39.

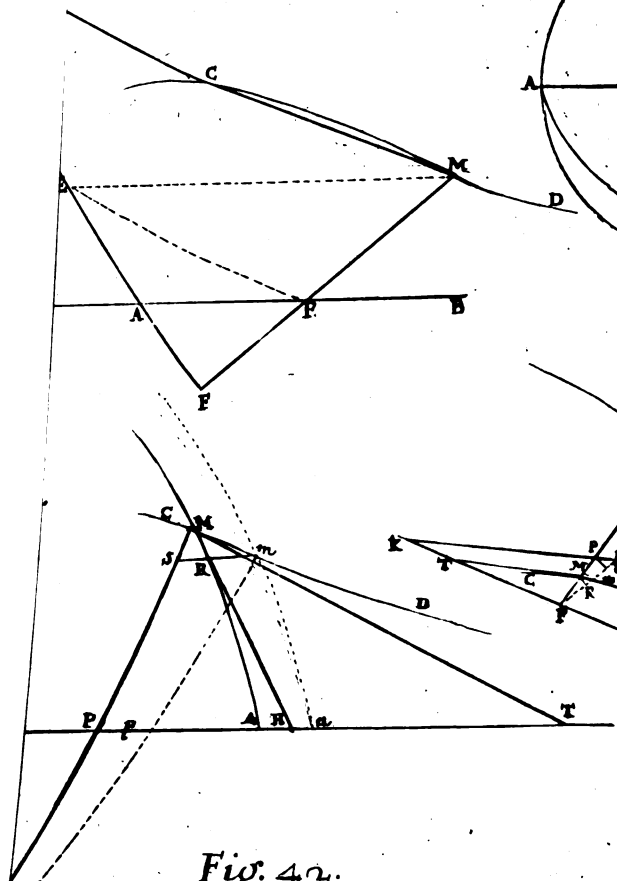


Fig. 38.

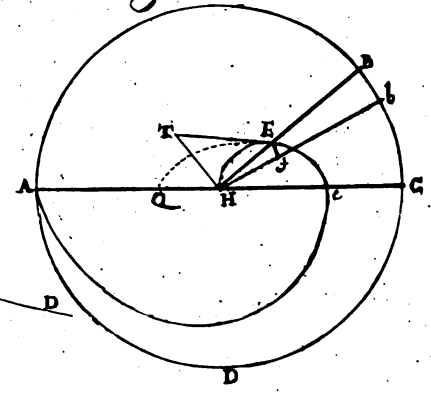


Fig. 41.

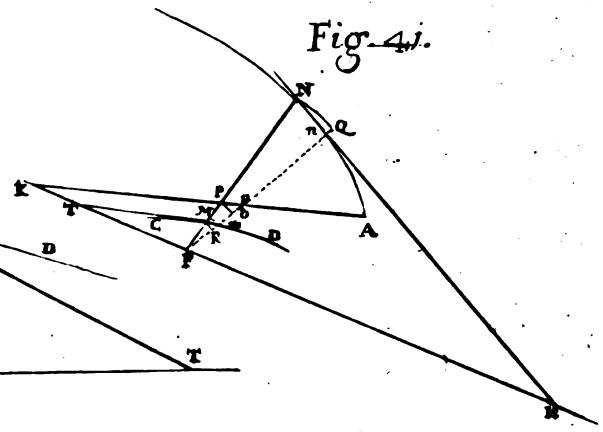


Fig. 42.

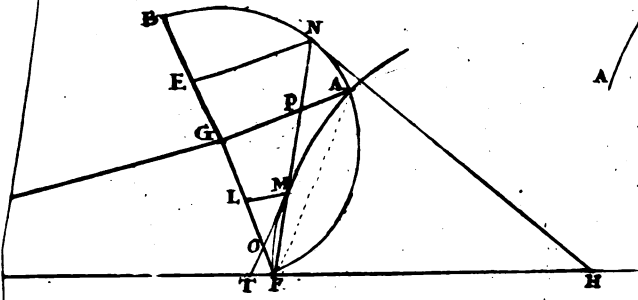


Fig. 43.

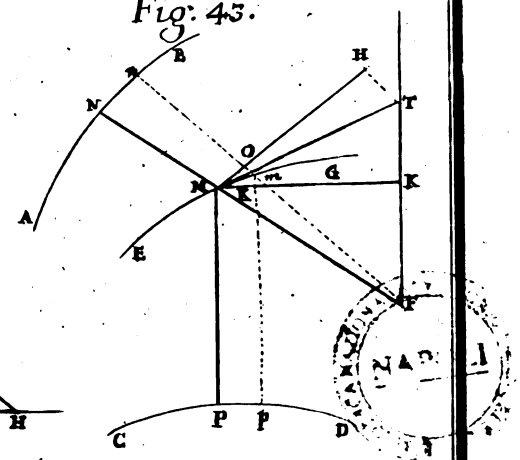






Fig. 45.

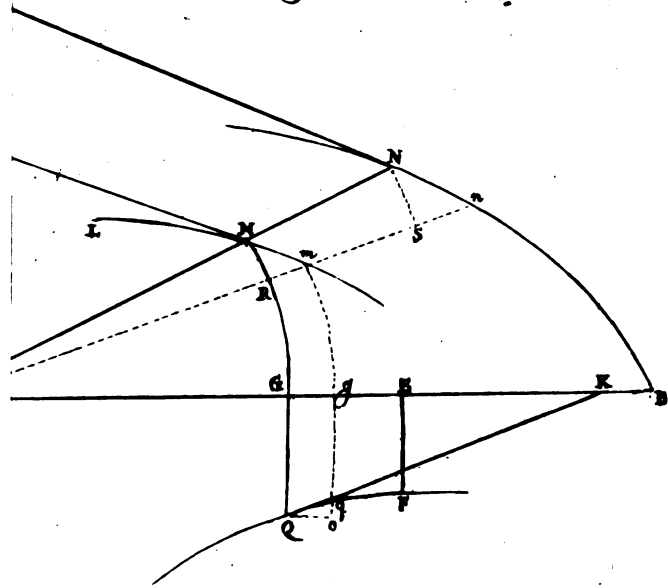


Fig. 46.

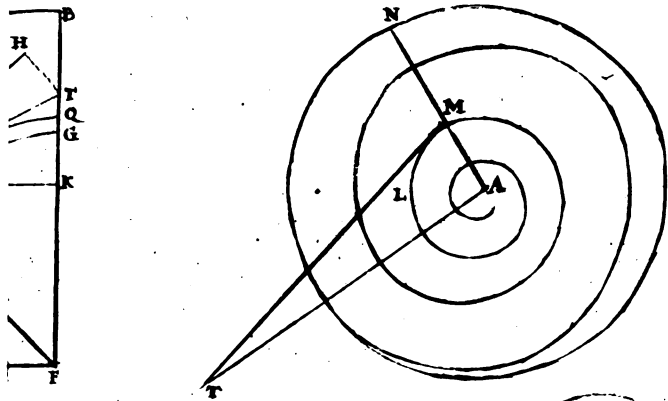




Fig. 47.

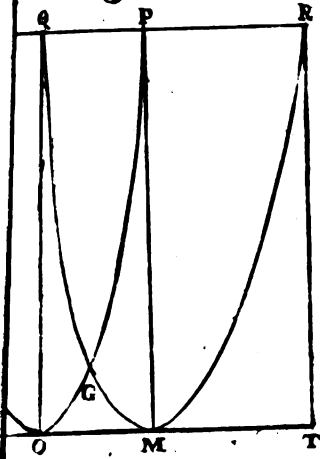


Fig. 48.

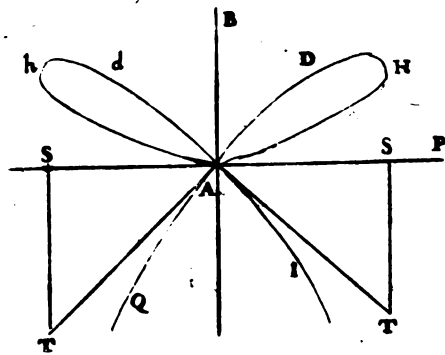


Fig. 49.

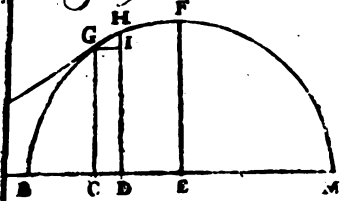


Fig. 50.

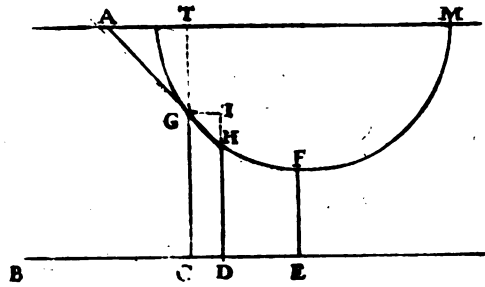


Fig. 51.

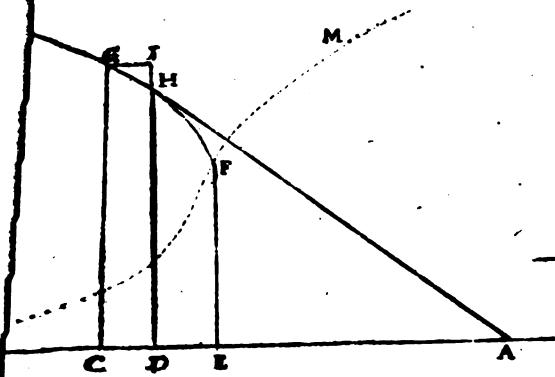


Fig. 52.

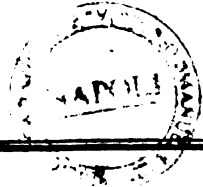
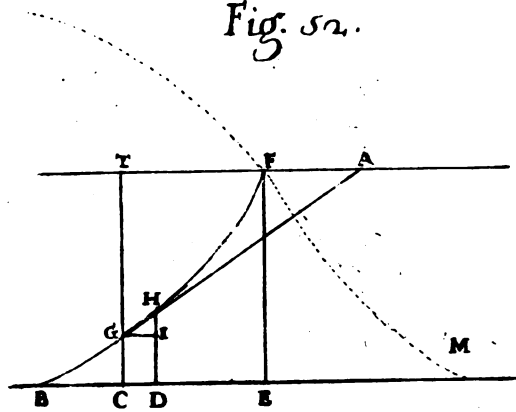




Fig. 54.

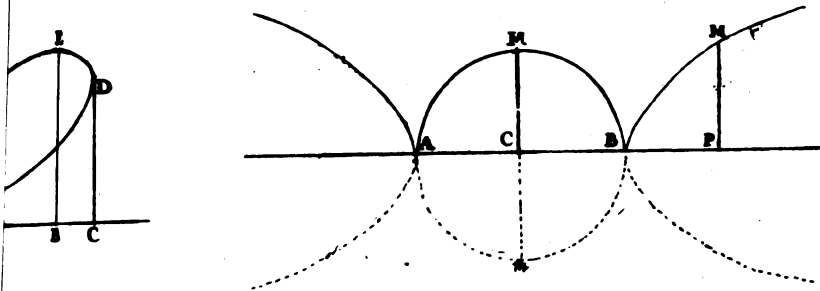


Fig. 56.

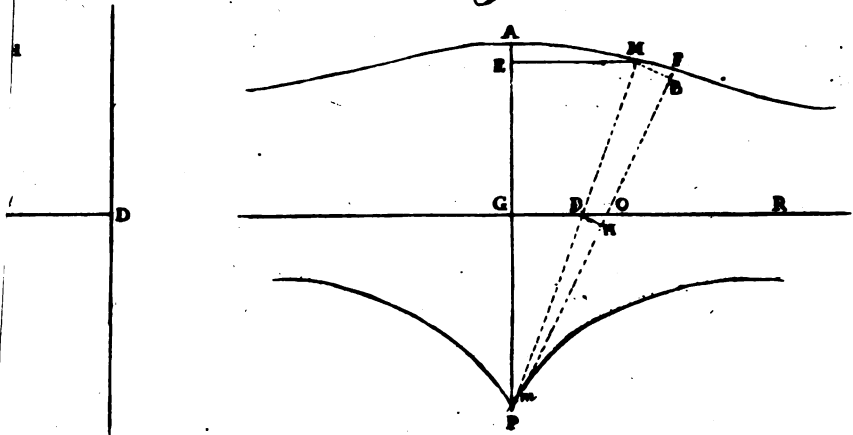
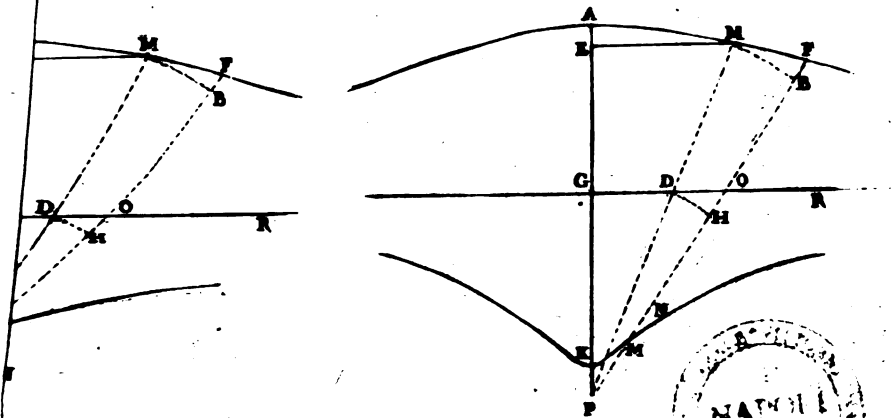


Fig. 58.





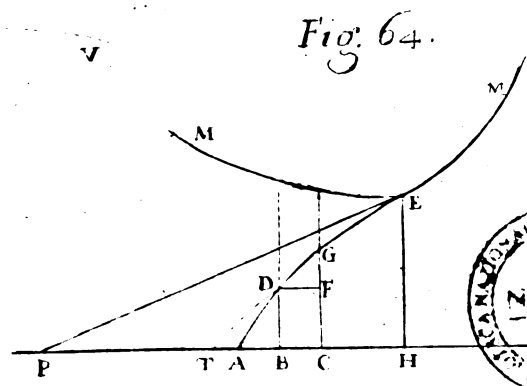
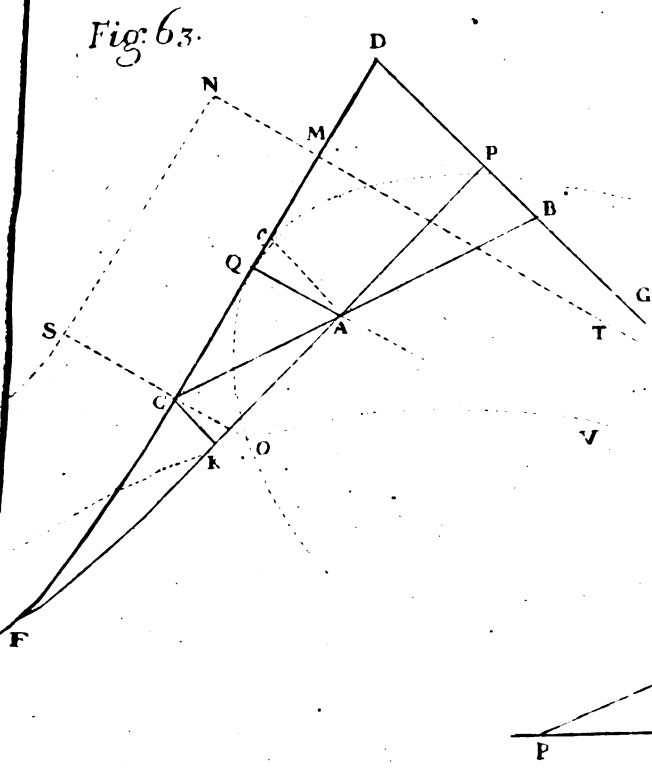
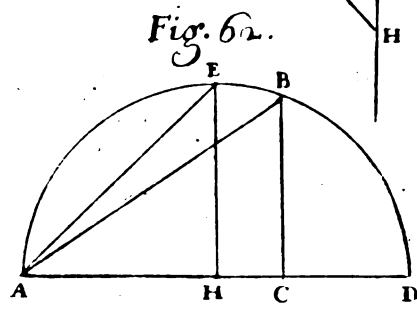
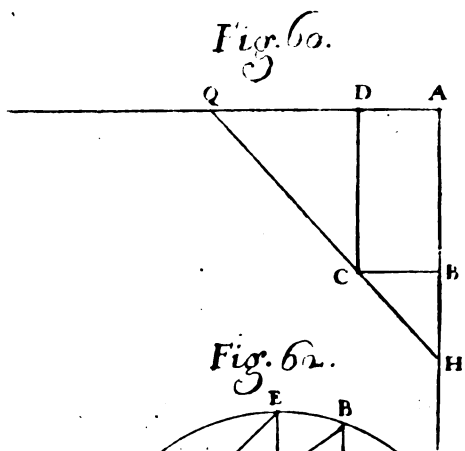
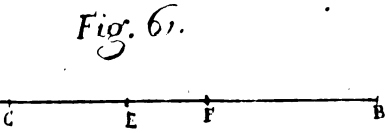
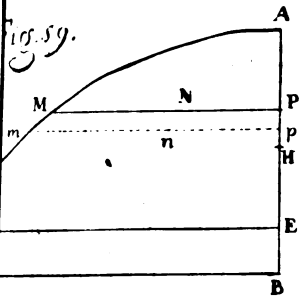






Fig. 65.

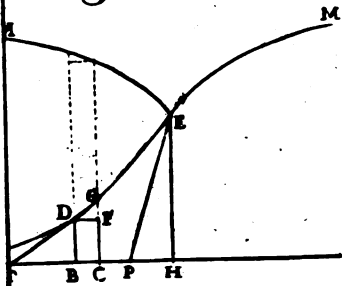


Fig. 66.

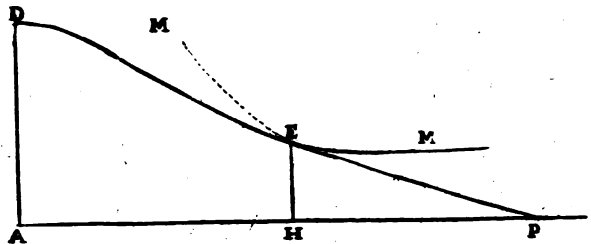


Fig. 67.

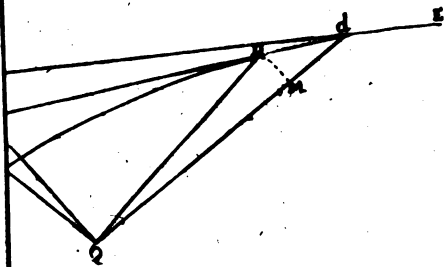


Fig. 68.

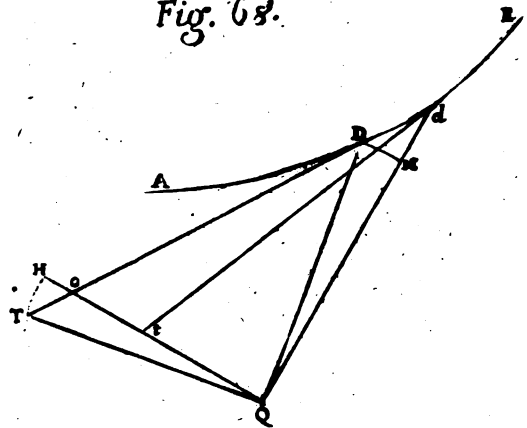


Fig. 69.

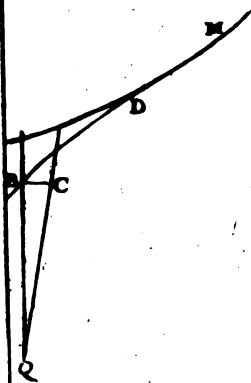


Fig. 70.

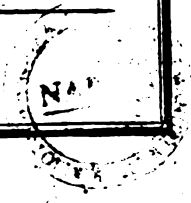
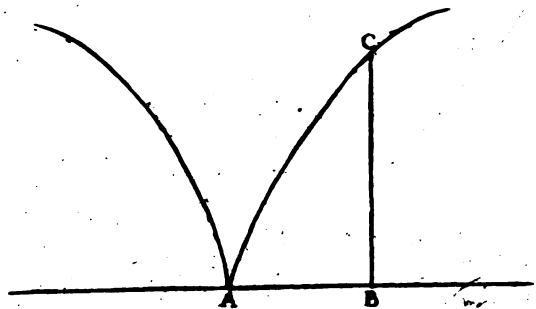




Fig: 72.

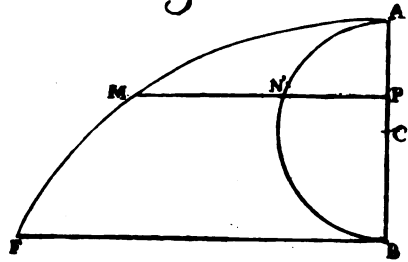


Fig: 73.

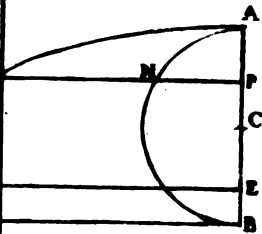


Fig: 74.

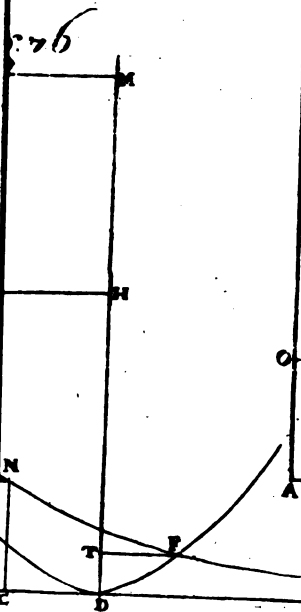
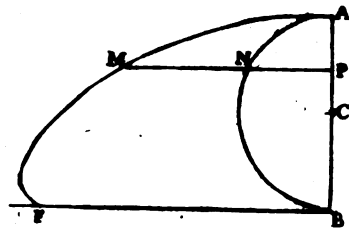
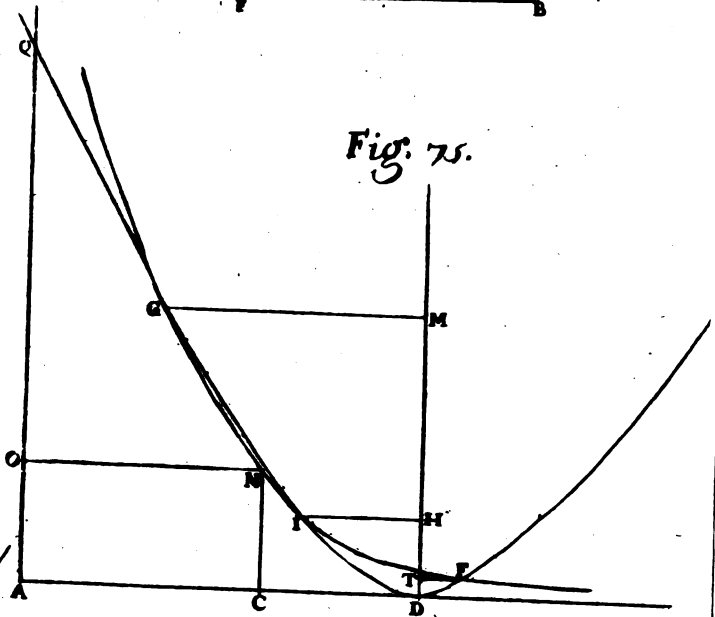


Fig: 75.



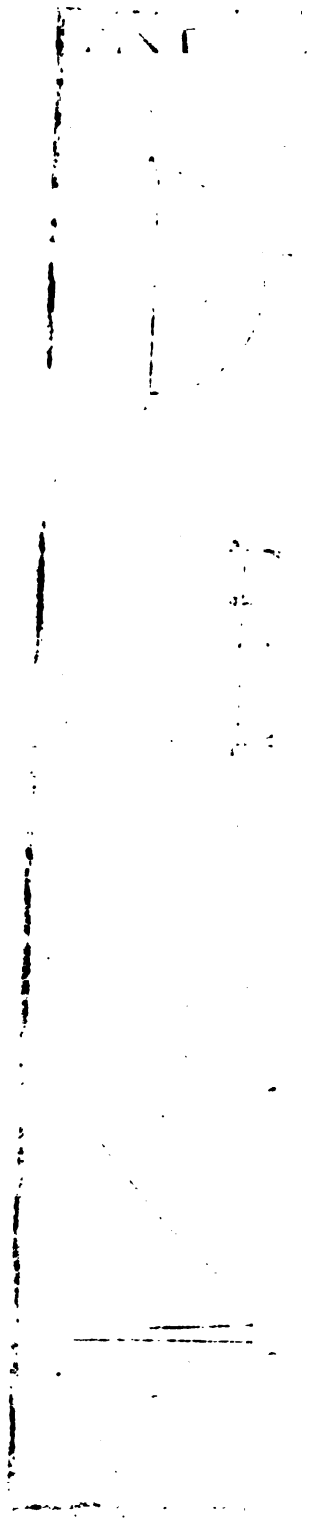


Fig. 75

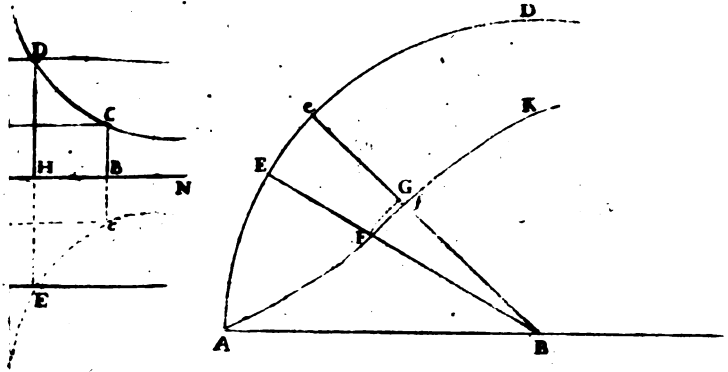
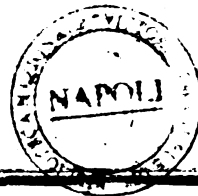
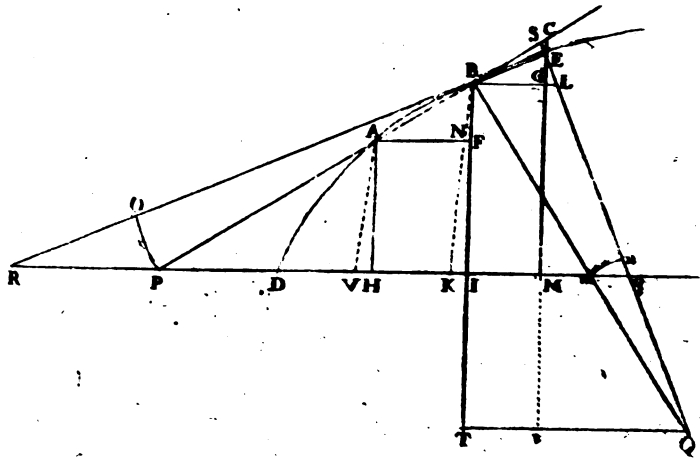
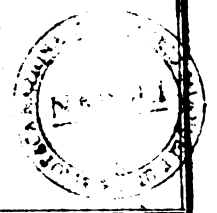
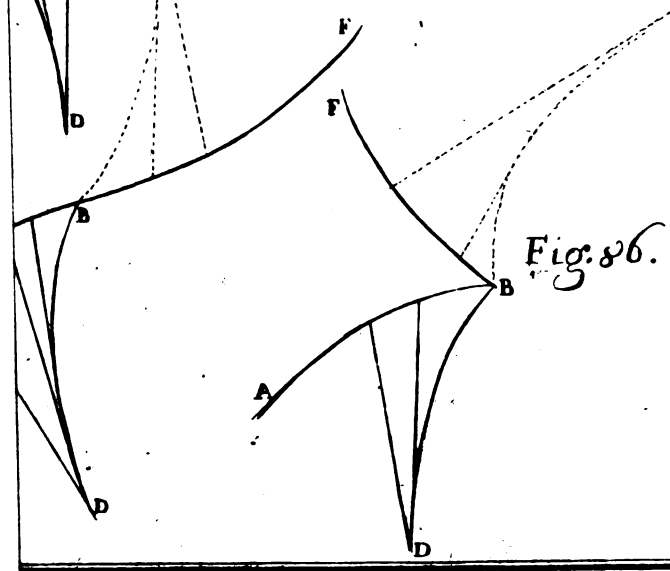
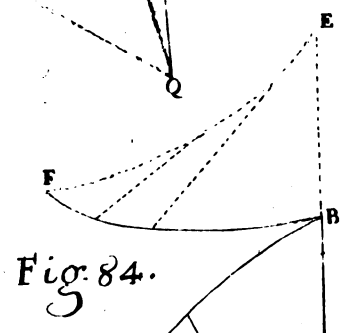
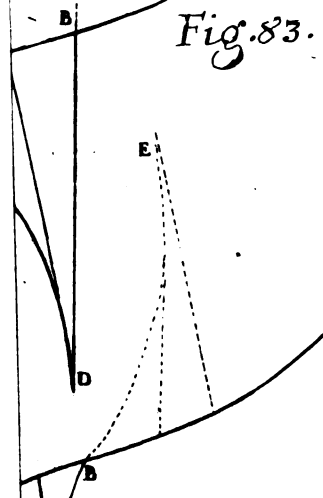
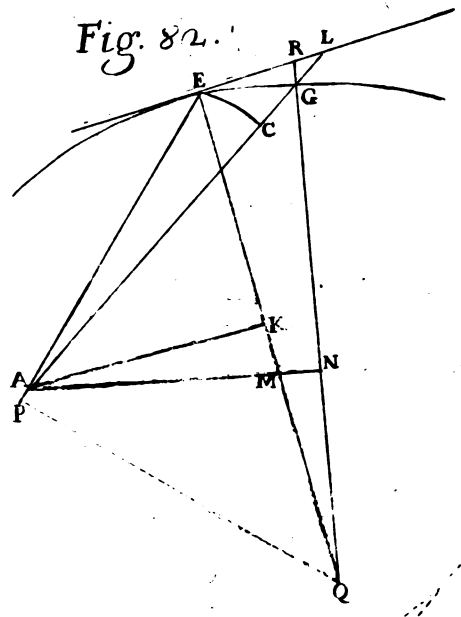
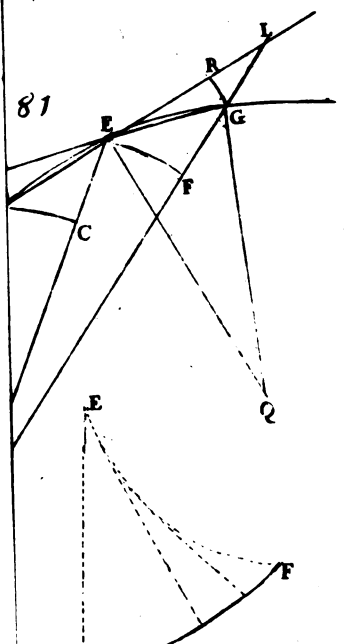


Fig. 80.











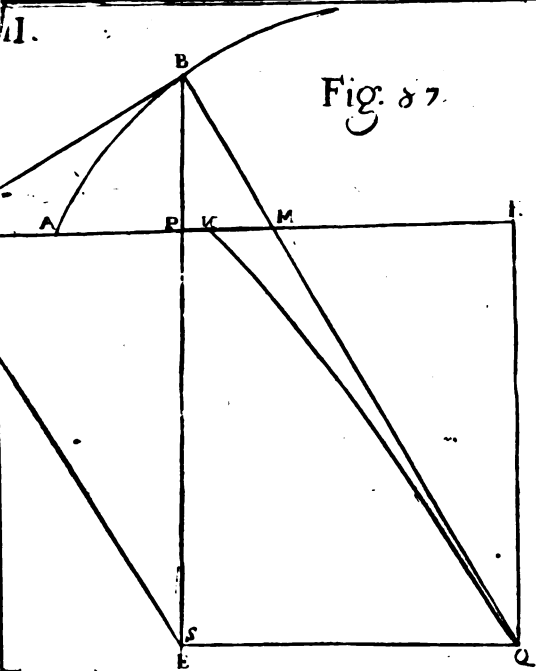


Fig. 87.

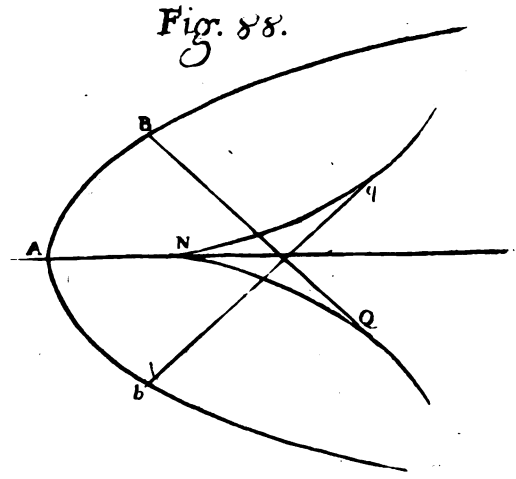


Fig. 88.

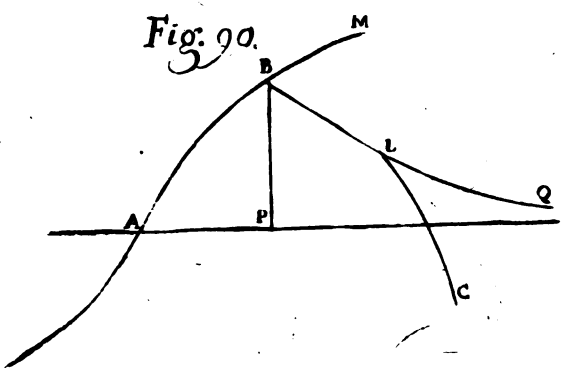


Fig. 90.

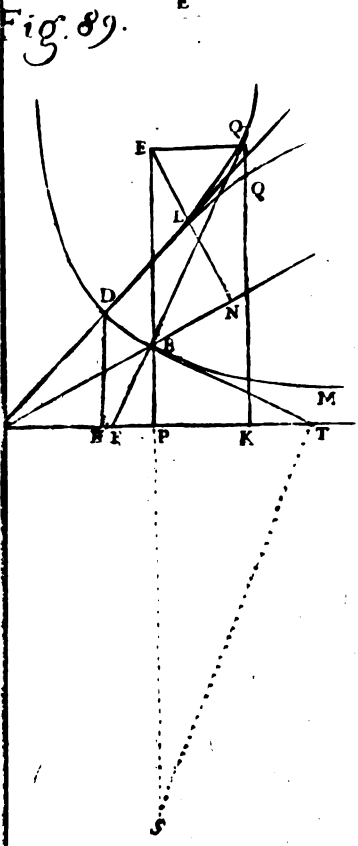


Fig. 89.

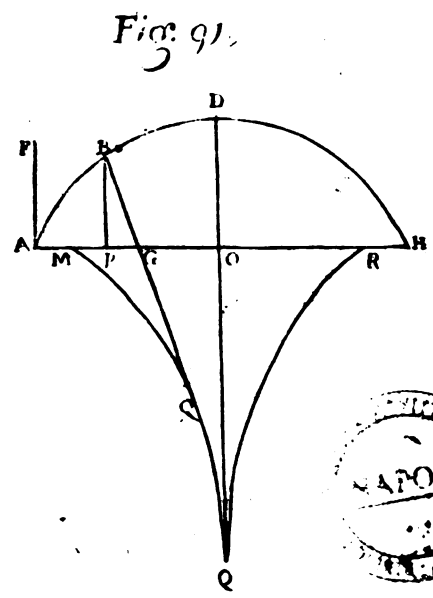


Fig. 91.



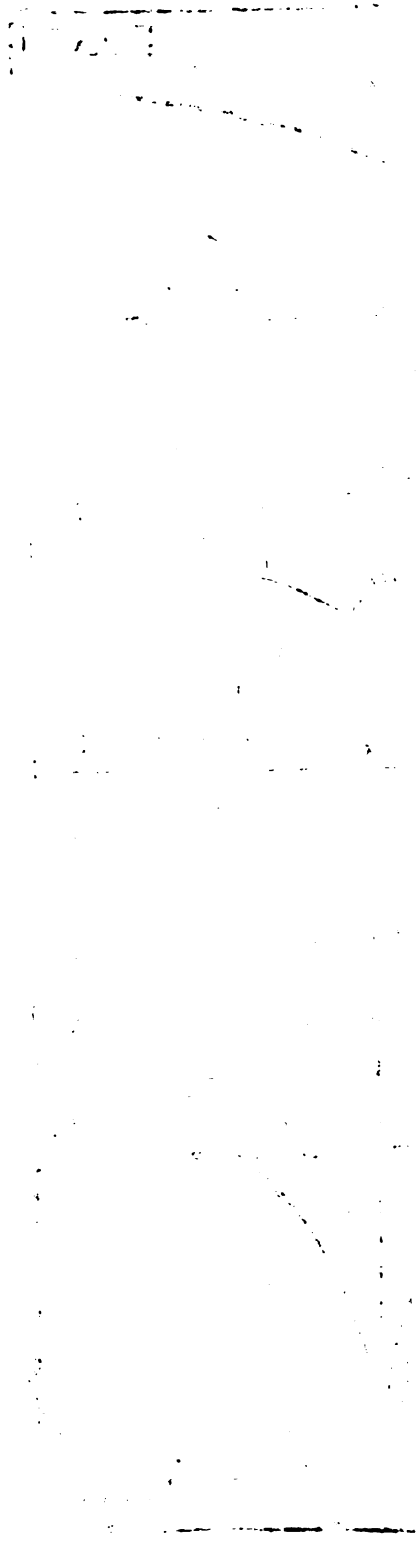


Fig. 92.

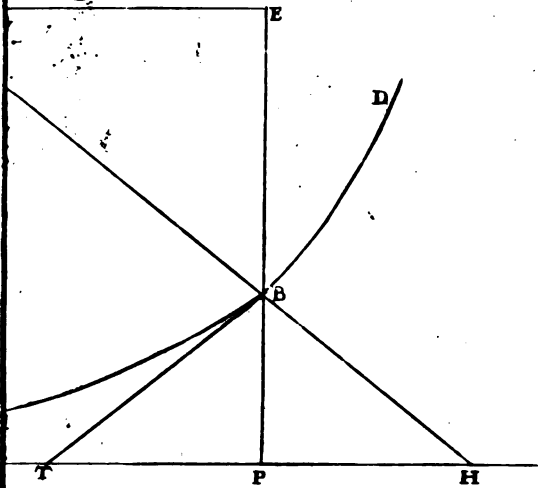


Fig. 93.

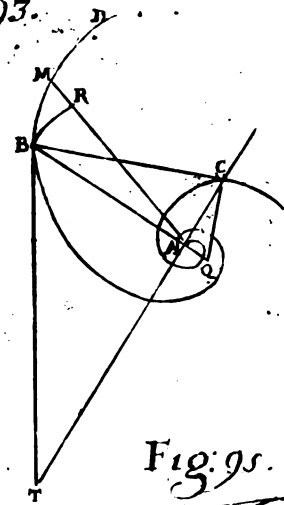


Fig. 95.

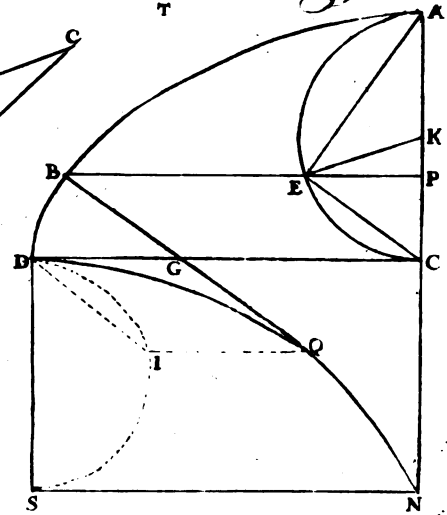


Fig. 94.

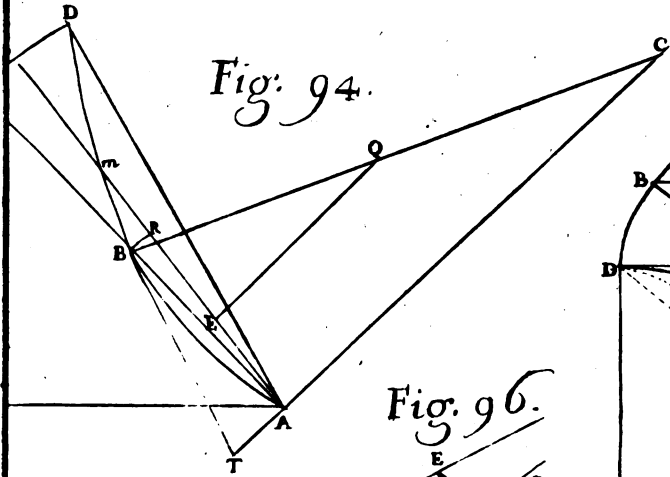
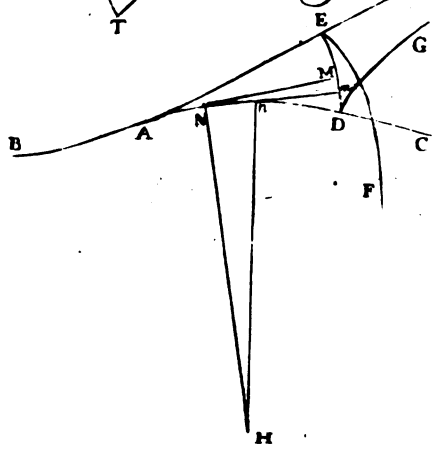


Fig. 96.





T. I.

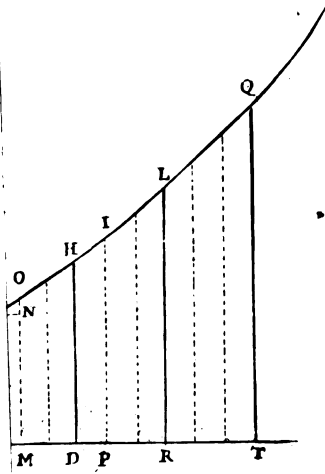


Fig. 2.

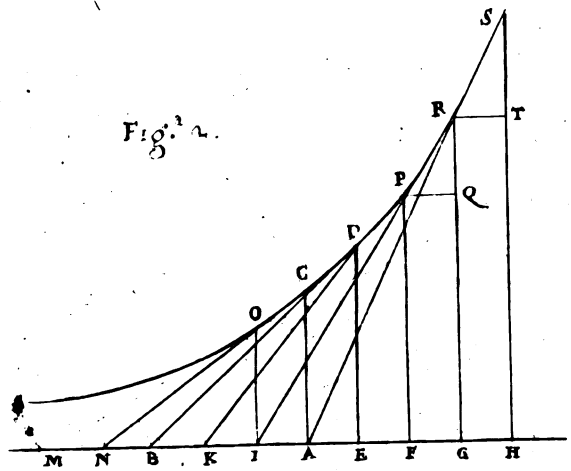


Fig. 4.

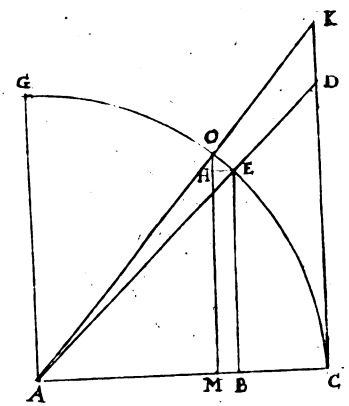
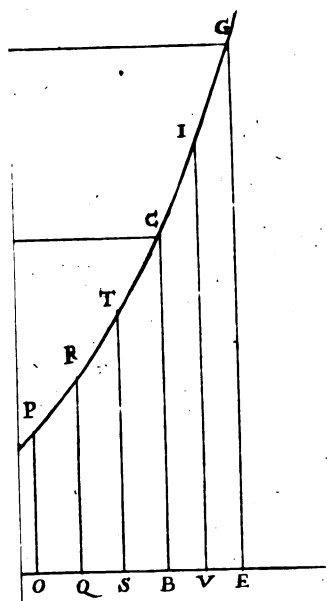


Fig. 6.

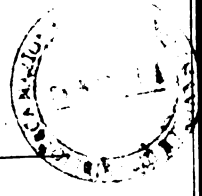
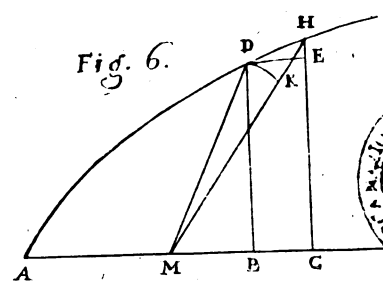
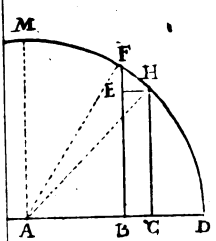




Fig. 9.

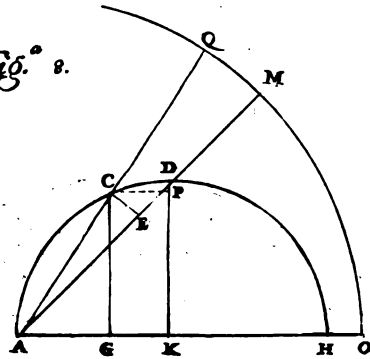


Fig. 10.

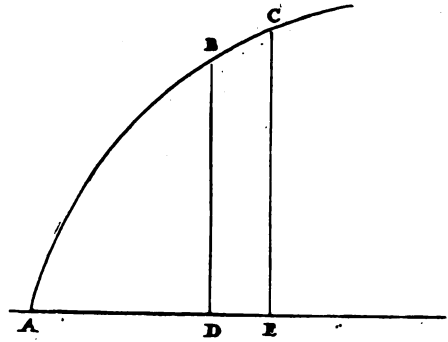
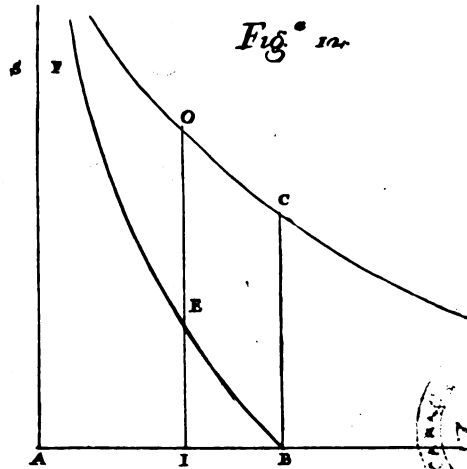


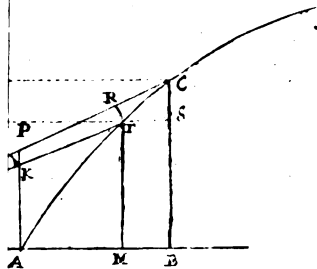
Fig. 11.



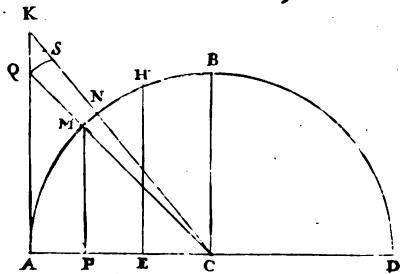




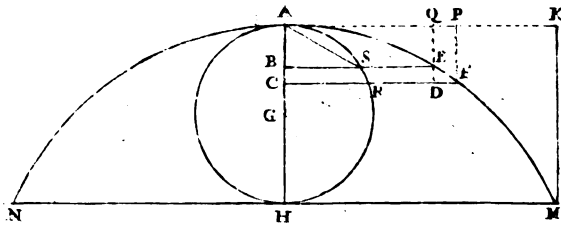
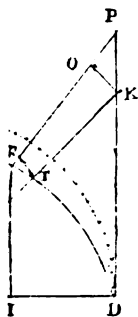
13.



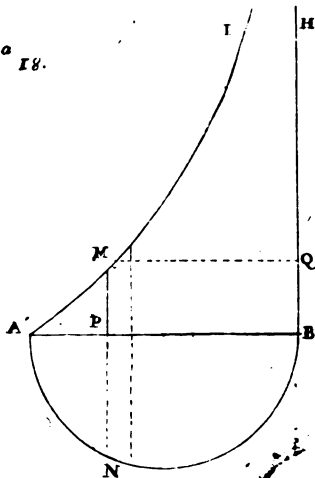
Fig<sup>a</sup> 14.



Fig<sup>a</sup> 16.



Fig<sup>a</sup> 18.





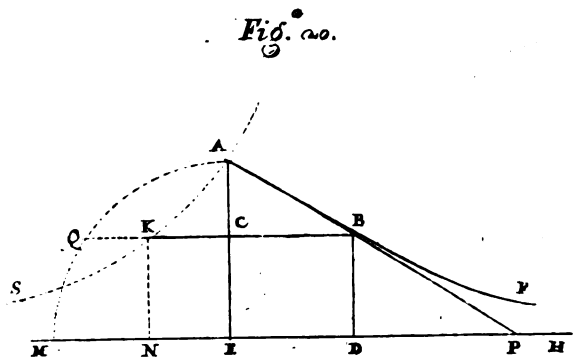
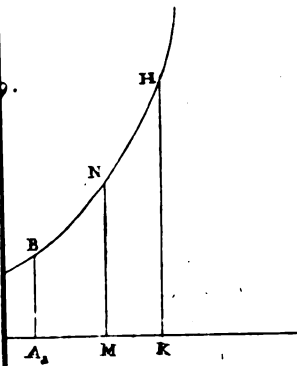


Fig. 20.

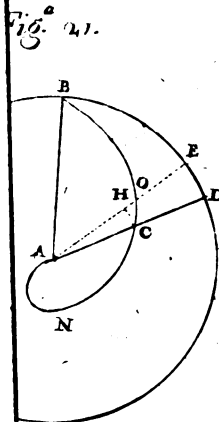


Fig. 21.

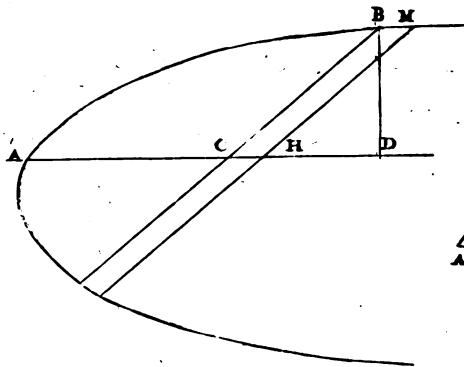


Fig. 22.

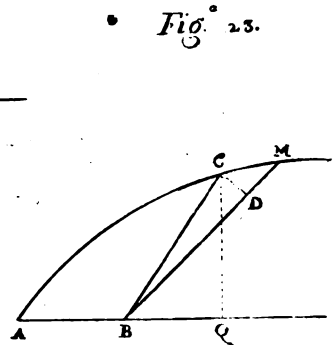


Fig. 23.

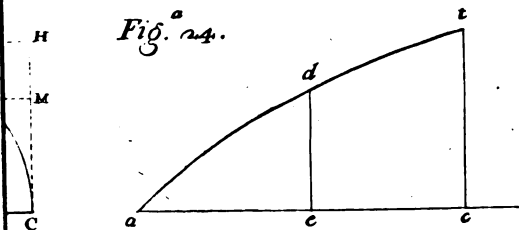


Fig. 24.

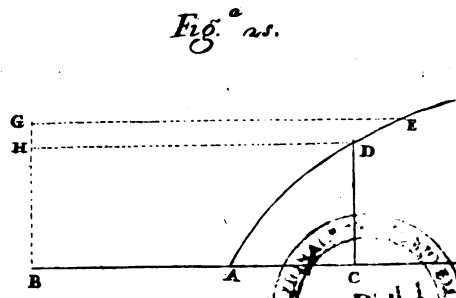


Fig. 25.





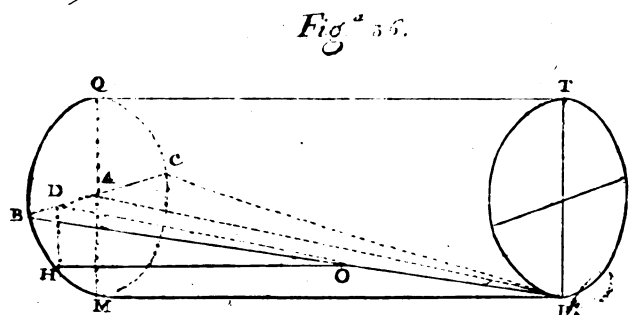
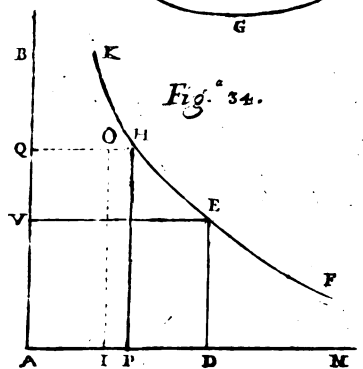
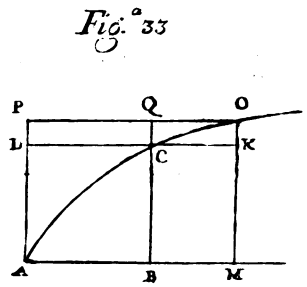
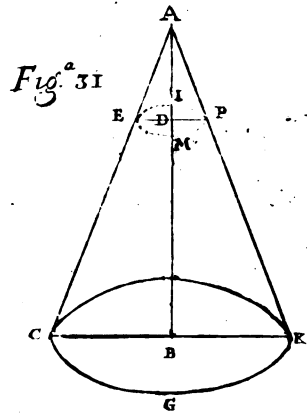
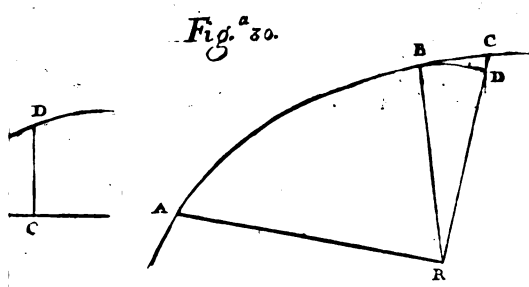
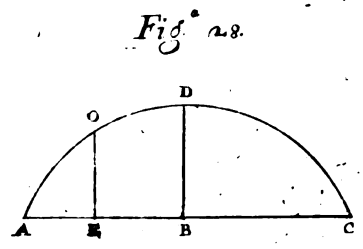
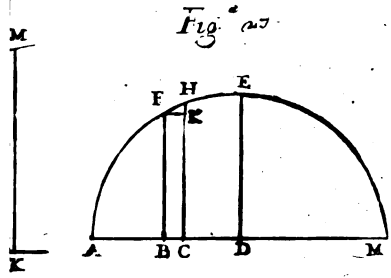




Fig. 37.

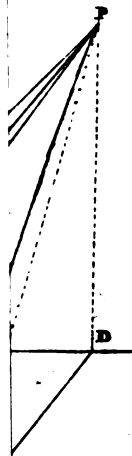
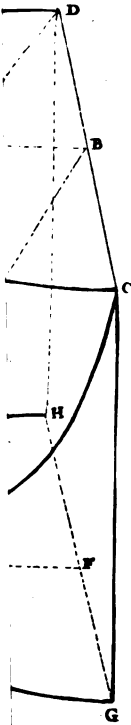


Fig. 38.

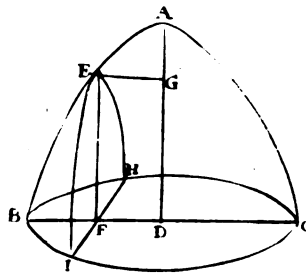


Fig. 40.

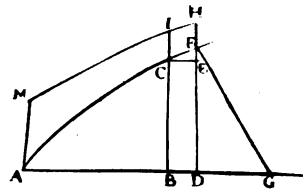


Fig. 42.

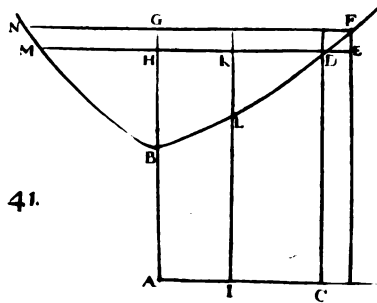


Fig. 41.

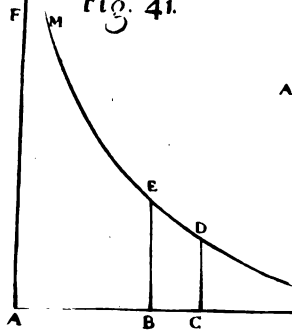


Fig. 43.

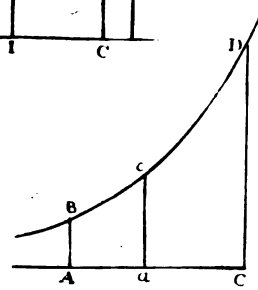


Fig. 44.

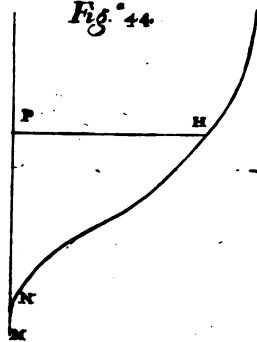


Fig. 45.

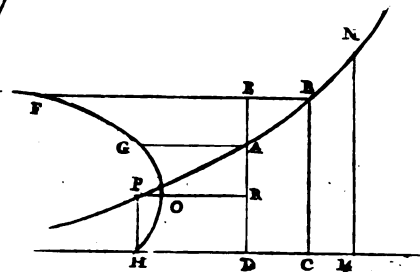






Fig. 1.

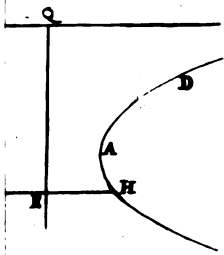


Fig. 2.

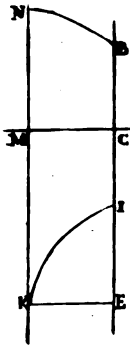


Fig. 3.

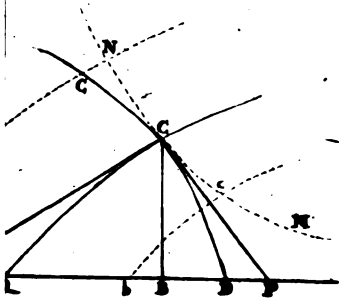
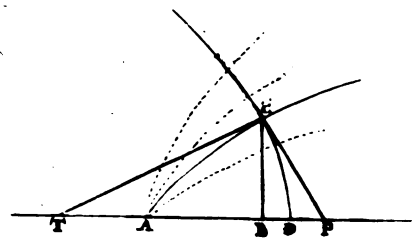


Fig. 4.

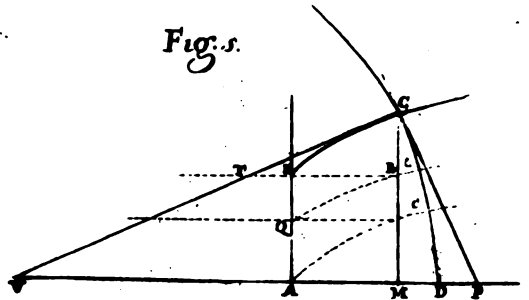


Fig. 7.

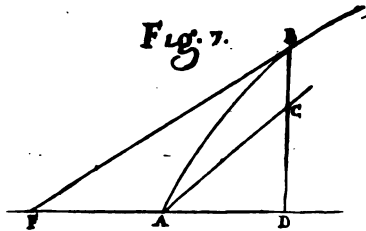


Fig. 8.

