



La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

La rivoluzione Riemanniana

Nicole Bussola e Emilia Ramazzotti

FOUNDATION OF GEOMETRY

Anno Accademico 2014/2015



SOMMARIO

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

1 PREMESSE

2 DA GAUSS A RIEMANN

3 CURVATURA

4 THEOREMA EGREGIUM

5 RIEMANN E LE VARIETÁ

6 CURVE ELLITTICHE



SOMMARIO

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

1 PREMESSE

2 DA GAUSS A RIEMANN

3 CURVATURA

4 THEOREMA EGREGIUM

5 RIEMANN E LE VARIETÁ

6 CURVE ELLITTICHE



SOMMARIO

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

1 PREMESSE

2 DA GAUSS A RIEMANN

3 CURVATURA

4 THEOREMA EGREGIUM

5 RIEMANN E LE VARIETÁ

6 CURVE ELLITTICHE



SOMMARIO

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

1 PREMESSE

2 DA GAUSS A RIEMANN

3 CURVATURA

4 THEOREMA EGREGIUM

5 RIEMANN E LE VARIETÁ

6 CURVE ELLITTICHE



SOMMARIO

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

- 1** PREMESSE
- 2** DA GAUSS A RIEMANN
- 3** CURVATURA
- 4** THEOREMA EGREGIUM
- 5** RIEMANN E LE VARIETÁ
- 6** CURVE ELLITTICHE



SOMMARIO

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

- 1** PREMESSE
- 2** DA GAUSS A RIEMANN
- 3** CURVATURA
- 4** THEOREMA EGREGIUM
- 5** RIEMANN E LE VARIETÁ
- 6** CURVE ELLITTICHE



Outline

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

- 1 **PREMESSE**
- 2 DA GAUSS A RIEMANN
- 3 CURVATURA
- 4 THEOREMA EGREGIUM
- 5 RIEMANN E LE VARIETÁ
- 6 CURVE ELLITTICHE



PREMESSE

La vita di Riemann

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- 1826 - Bernhard Riemann nasce a Breselenz
- 1846 - Studia teologia e filologia a Gottinga
- 1847 - Studia matematica all'Università di Berlino
- 1854 - Tiene la sua prima lezione
"On the hypotheses which lie at the foundation of geometry"
- 1859 - Pubblica un saggio contenente l'"Ipotesi di Riemann"
- 1866 - Muore in Italia di tubercolosi



PREMESSE

La vita di Riemann

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- 1826 - Bernhard Riemann nasce a Breselenz
- 1846 - Studia teologia e filologia a Gottinga
- 1847 - Studia matematica all'Università di Berlino
- 1854 - Tiene la sua prima lezione
"On the hypotheses which lie at the foundation of geometry"
- 1859 - Pubblica un saggio contenente l'"Ipotesi di Riemann"
- 1866 - Muore in Italia di tubercolosi



PREMESSE

La vita di Riemann

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- 1826 - Bernhard Riemann nasce a Breselenz
- 1846 - Studia teologia e filologia a Gottinga
- 1847 - Studia matematica all'Università di Berlino
- 1854 - Tiene la sua prima lezione
"On the hypotheses which lie at the foundation of geometry"
- 1859 - Pubblica un saggio contenente l'"Ipotesi di Riemann"
- 1866 - Muore in Italia di tubercolosi



PREMESSE

La vita di Riemann

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- 1826 - Bernhard Riemann nasce a Breselenz
- 1846 - Studia teologia e filologia a Gottinga
- 1847 - Studia matematica all'Università di Berlino
- 1854 - Tiene la sua prima lezione
"On the hypotheses which lie at the foundation of geometry"
- 1859 - Pubblica un saggio contenente l'"Ipotesi di Riemann"
- 1866 - Muore in Italia di tubercolosi



PREMESSE

La vita di Riemann

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- 1826 - Bernhard Riemann nasce a Breselenz
- 1846 - Studia teologia e filologia a Gottinga
- 1847 - Studia matematica all'Università di Berlino
- 1854 - Tiene la sua prima lezione
"On the hypotheses which lie at the foundation of geometry"
- 1859 - Pubblica un saggio contenente l'"Ipotesi di Riemann"
- 1866 - Muore in Italia di tubercolosi



PREMESSE

La vita di Riemann

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- 1826 - Bernhard Riemann nasce a Breselenz
- 1846 - Studia teologia e filologia a Gottinga
- 1847 - Studia matematica all'Università di Berlino
- 1854 - Tiene la sua prima lezione
"On the hypotheses which lie at the foundation of geometry"
- 1859 - Pubblica un saggio contenente l'"Ipotesi di Riemann"
- 1866 - Muore in Italia di tubercolosi



PREMESSE

Ambiente matematico

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- Euclide, 300 a.C., "Elementi"
- Cartesio, 1637, "Discorso sul metodo" e "La Geometrie"
- Gauss e le geometrie non euclidee



PREMESSE

Ambiente matematico

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



- **Euclide, 300 a.C., "Elementi"**
- Cartesio, 1637, "Discorso sul metodo" e "La Geometrie"
- Gauss e le geometrie non euclidee



PREMESSE

Ambiente matematico

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- Euclide, 300 a.C., "Elementi"
- Cartesio, 1637, "Discorso sul metodo" e "La Geometrie"
- Gauss e le geometrie non euclidee



PREMESSE

Ambiente matematico

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE



- Euclide, 300 a.C., "Elementi"
- Cartesio, 1637, "Discorso sul metodo" e "La Geometrie"
- Gauss e le geometrie non euclidee



Outline

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

- 1 PREMESSE
- 2 DA GAUSS A RIEMANN**
- 3 CURVATURA
- 4 THEOREMA EGREGIUM
- 5 RIEMANN E LE VARIETÁ
- 6 CURVE ELLITTICHE



DA GAUSS A RIEMANN

Superfici cartesiane

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

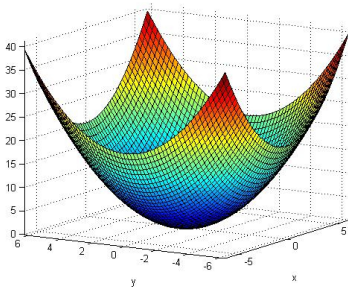
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



Paraboloide di equazione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



DA GAUSS A RIEMANN

Superfici cartesiane

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

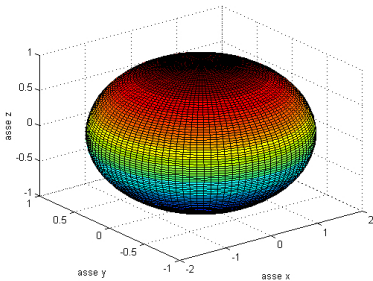
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



Ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$$



DA GAUSS A RIEMANN

Superfici cartesiane

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

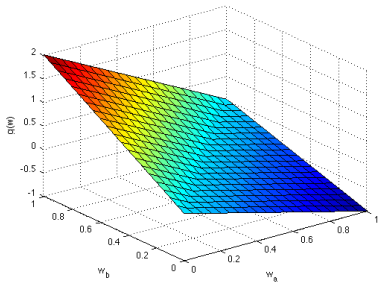
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



Piano immerso in \mathbb{R}^3



DA GAUSS A RIEMANN

Immersione

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

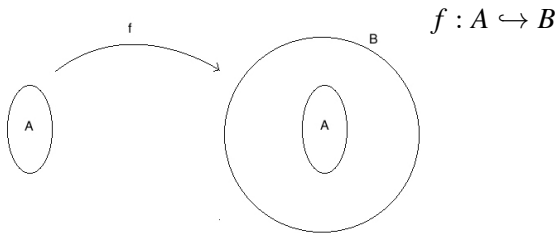
THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

L'immersione è una relazione tra due strutture che collega la prima alla seconda in modo che la seconda contenga "una copia" della prima al suo interno.

Esempi





DA GAUSS A RIEMANN

Proprietà estrinseche

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

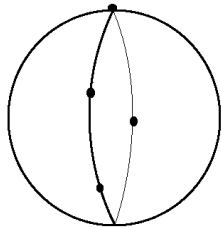
CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

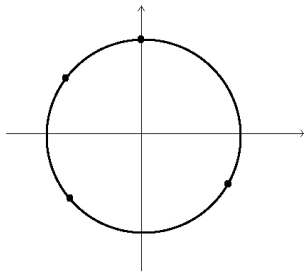
RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Circonferenza in una sfera



Circonferenza in un piano





Outline

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

- 1 PREMESSE
- 2 DA GAUSS A RIEMANN
- 3 CURVATURA
- 4 THEOREMA EGREGIUM
- 5 RIEMANN E LE VARIETÁ
- 6 CURVE ELLITTICHE



CURVATURA

Curvatura di una curva piana

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

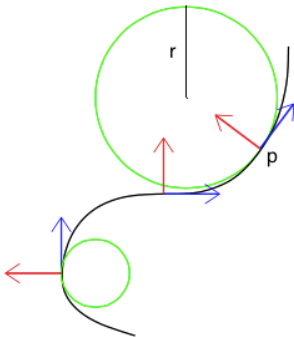
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



La *curvatura* di una curva
piana in un punto p è il
reciproco del raggio della
circonferenza osculatrice

$$k_p(C) = \frac{1}{r}$$



CURVATURA

Curvatura di una superficie

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

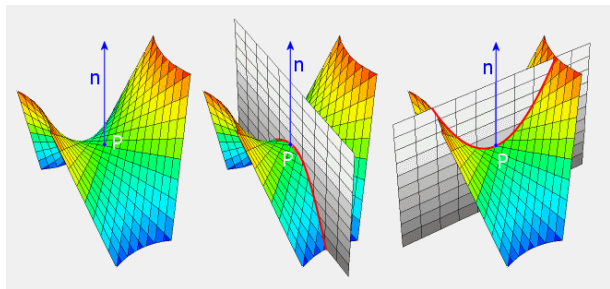
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



Le *curvature principali* di una superficie S in un punto p sono:

$$k_1(S) = \max\{k_p(C)\}$$

$$k_2(S) = \min\{k_p(C)\}$$



Outline

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

- 1 PREMESSE
- 2 DA GAUSS A RIEMANN
- 3 CURVATURA
- 4 THEOREMA EGREGIUM**
- 5 RIEMANN E LE VARIETÁ
- 6 CURVE ELLITTICHE



THEOREMA EGREGIUM

La curvatura come proprietà intrinseca

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

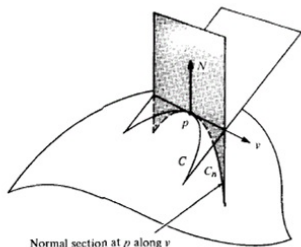
THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Curvatura di Gauss

$$K = k_1 k_2$$





THEOREMA EGREGIUM

Classificazione dei punti

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

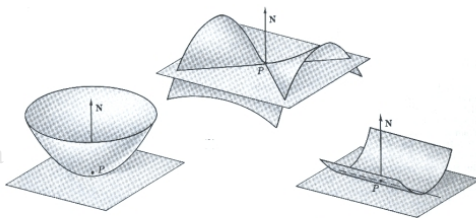
CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

- $K > 0$: la superficie è detta avere un punto *elittico*
- $K < 0$: la superficie è detta avere un punto di *sella*
- $K = 0$: la superficie è detta avere un punto *parabolico*





THEOREMA EGREGIUM

Classificazione dei punti

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

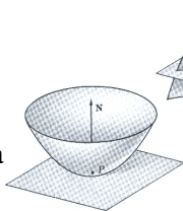
CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

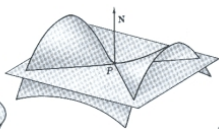
RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

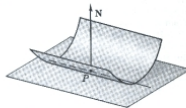
- $K > 0$: la superficie è detta avere un punto *elittico*



- $K < 0$: la superficie è detta avere un punto di *sella*



- $K = 0$: la superficie è detta avere un punto *parabolico*





THEOREMA EGREGIUM

Classificazione dei punti

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

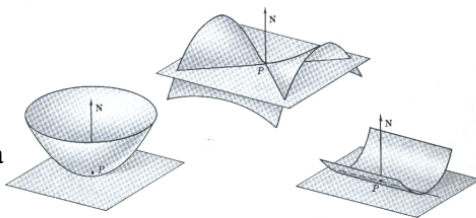
CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

- $K > 0$: la superficie è detta avere un punto *elittico*
- $K < 0$: la superficie è detta avere un punto di *sella*
- $K = 0$: la superficie è detta avere un punto *parabolico*





THEOREMA EGREGIUM

Classificazione dei punti

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

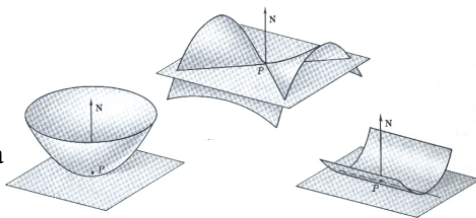
CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

- $K > 0$: la superficie è detta avere un punto *elittico*
- $K < 0$: la superficie è detta avere un punto di *sella*
- $K = 0$: la superficie è detta avere un punto *parabolico*





THEOREMA EGREGIUM

Il Teorema

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Teorema

Se una superficie curva si sviluppa su una qualsiasi altra superficie, la misura della curvatura in ogni punto non varia.

- La curvatura Gaussiana è un'invariante intrinseca.
- Non cambia rispetto a deformazioni isometriche della superficie.



THEOREMA EGREGIUM

Il Teorema

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Teorema

Se una superficie curva si sviluppa su una qualsiasi altra superficie, la misura della curvatura in ogni punto non varia.

- La curvatura Gaussiana è un'invariante intrinseca.
- Non cambia rispetto a deformazioni isometriche della superficie.



THEOREMA EGREGIUM

Il Teorema

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Teorema

Se una superficie curva si sviluppa su una qualsiasi altra superficie, la misura della curvatura in ogni punto non varia.

- La curvatura Gaussiana è un'invariante intrinseca.
- Non cambia rispetto a deformazioni isometriche della superficie.



THEOREMA EGREGIUM

Il Teorema

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Teorema

Se una superficie curva si sviluppa su una qualsiasi altra superficie, la misura della curvatura in ogni punto non varia.

- La curvatura Gaussiana è un'invariante intrinseca.
- Non cambia rispetto a deformazioni isometriche della superficie.



THEOREMA EGREGIUM

Esempi

La rivoluzione Riemanniana

Nicole Bussola e Emilia Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A RIEMANN

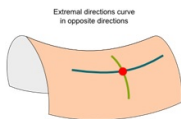
CURVATURA

THEOREMA EGREGIUM

RIEMANN E LE VARIETÀ

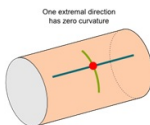
CURVE ELLITTICHE

■ Alcuni esempi di diverse curvature:



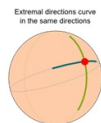
Extremal directions curve in opposite directions

Negative Curvature



One extremal direction has zero curvature

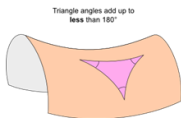
Zero Curvature



Extremal directions curve in the same directions

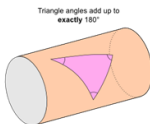
Positive Curvature

■ Una superficie puo essere determinata interamente misurando angoli, distanze e i loro rapporti sulla superficie stessa.



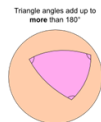
Triangle angles add up to less than 180°

Negative Curvature



Triangle angles add up to exactly 180°

Zero Curvature



Triangle angles add up to more than 180°

Positive Curvature



THEOREMA EGREGIUM

La pizza

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Per vedere il video della pizza usate il seguente link:

[La pizza](#)



Outline

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

- 1 PREMESSE
- 2 DA GAUSS A RIEMANN
- 3 CURVATURA
- 4 THEOREMA EGREGIUM
- 5 RIEMANN E LE VARIETÁ**
- 6 CURVE ELLITTICHE



RIEMANN E LE VARIETÀ

Che cos'è una varietà?

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

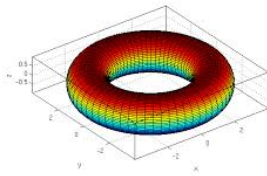
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



- secondo numerabile
- Hausdorff
- carte (atlante)
- Localmente omeomorfo allo spazio Euclideo



RIEMANN E LE VARIETÀ

Che cos'è una varietà?

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

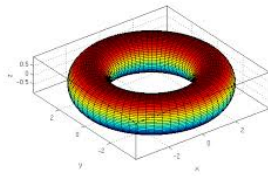
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



- secondo numerabile
- Hausdorff
- carte (atlante)
- Localmente omeomorfo allo spazio Euclideo



RIEMANN E LE VARIETÀ

Che cos'è una varietà?

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

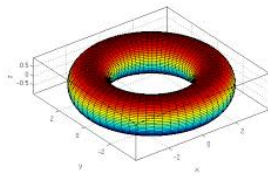
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



- secondo numerabile
- Hausdorff
- carte (atlante)
- Localmente omeomorfo allo spazio Euclideo



RIEMANN E LE VARIETÀ

Che cos'è una varietà?

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

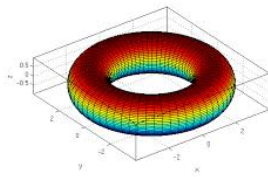
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



- secondo numerabile
- Hausdorff
- carte (atlante)
- Localmente omeomorfo allo spazio Euclideo



RIEMANN E LE VARIETÀ

Che cos'è una varietà?

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

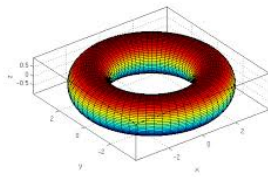
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



- secondo numerabile
- Hausdorff
- carte (atlante)
- Localmente omeomorfo allo spazio Euclideo



RIEMANN E LE VARIETÀ

Come incollare

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

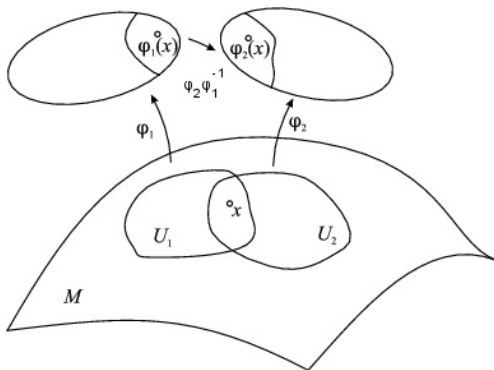
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE





RIEMANN E LE VARIETÀ

Classificazione delle varietà

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Definizione

*La dimensione di una varietà è la dimensione dello spazio
Euclideo mappato dalle carte*

- Varietà 1-dimensionali:
retta e cerchio.
- Varietà 2-dimensionali:
superfici.

sphere



torus



double torus



cross surface



Klein bottle





RIEMANN E LE VARIETÀ

Classificazione delle varietà

La rivoluzione Riemanniana

Nicole Bussola e Emilia Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA EGREGIUM

RIEMANN E LE VARIETÀ

CURVE ELLITTICHE

Definizione

La dimensione di una varietà è la dimensione dello spazio Euclideo mappato dalle carte

- Varietà 1-dimensionali: retta e cerchio.
- Varietà 2-dimensionali: superfici.

sphere



torus



double torus



cross surface



Klein bottle





RIEMANN E LE VARIETÀ

Classificazione delle varietà

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

Definizione

*La dimensione di una varietà è la dimensione dello spazio
Euclideo mappato dalle carte*

- Varietà 1-dimensionali:
retta e cerchio.
- Varietà 2-dimensionali:
superfici.

sphere



torus



double torus



cross surface



Klein bottle





RIEMANN E LE VARIETÀ

Varietàà 1-dimensionali

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

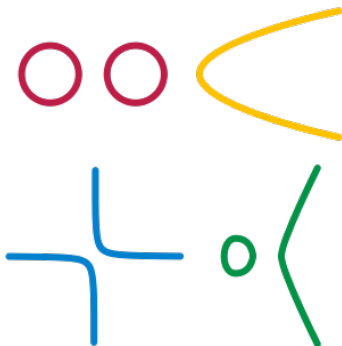
CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

- **Connesse**
 - non compatta: retta
 - compatta: cerchio
- **Non connesse**: unione disgiunta di retta e cerchio.





RIEMANN E LE VARIETÀ

Varietà 1-dimensionali

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

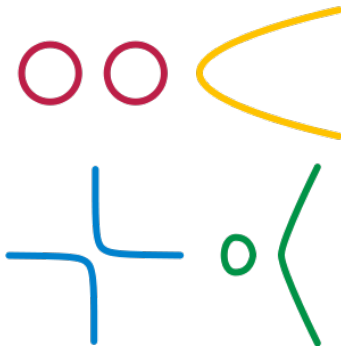
RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

■ Connesse

- non compatta: retta
- compatta: cerchio

- Non connesse: unione disgiunta di retta e cerchio.





RIEMANN E LE VARIETÀ

Varietà 1-dimensionali

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

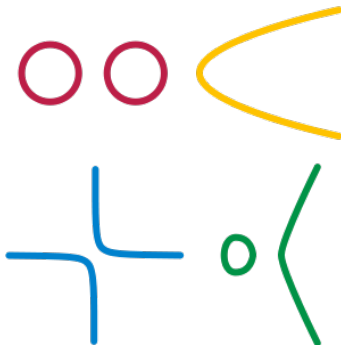
RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

■ Connesse

- non compatta: retta
- compatta: cerchio

■ Non connesse: unione disgiunta di retta e cerchio.





RIEMANN E LE VARIETÀ

Il poligono fondamentale

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

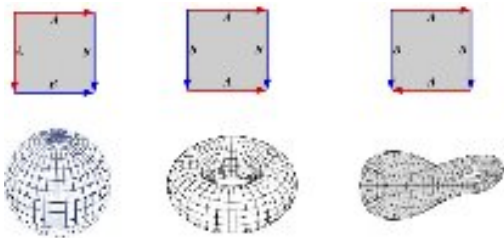
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE





RIEMANN E LE VARIETÀ

Classi di varietà

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLIPTICHE

- **Varietà Riemanniane:** introduco una metrica che mi permette di definire nozioni come angoli, lunghezze, aree.
- **Varietà differenziabili (lisce):** le mappe di transizione sono infinitamente differenziabili.
- **Varietà complesse:** le mappe di transizione sono olomorfe. Un esempio sono le varietà complesse 1-dimensionali dette superfici di Riemann.



Outline

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÁ

CURVE
ELLITTICHE

- 1 PREMESSE
- 2 DA GAUSS A RIEMANN
- 3 CURVATURA
- 4 THEOREMA EGREGIUM
- 5 RIEMANN E LE VARIETÁ
- 6 CURVE ELLITTICHE**



La rivoluzione Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

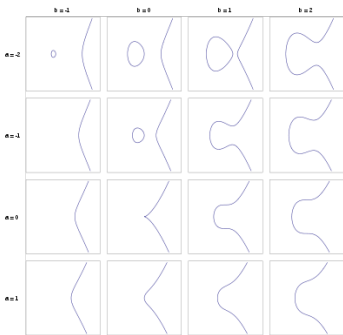
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



■ Curva ellittica

$$y^2 = ax^3 + bx + c$$

■ Curva ellittica di Weierstrass

$$\wp(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$



La rivoluzione Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

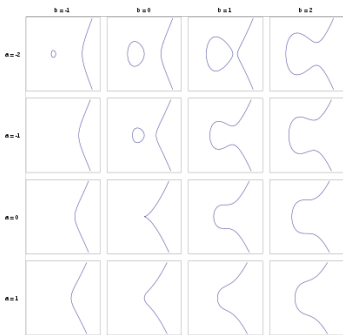
DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE



■ Curva ellittica

$$y^2 = ax^3 + bx + c$$

■ Curva ellittica di Weierstrass

$$\wp(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$



CURVE ELLITTICHE

Il toro

La rivoluzione
Riemanniana

Nicole Bussola
e Emilia
Ramazzotti

PREMESSE

DA GAUSS A
RIEMANN

CURVATURA

THEOREMA
EGREGIUM

RIEMANN E
LE VARIETÀ

CURVE
ELLITTICHE

