

Storia della Matematica
alcuni spunti dal libro
La Forma delle Cose

Marco Andreatta

MARCO ANDREATTA

È stato professore ordinario di Storia della matematica nell'Università di Milano. Tra i suoi numerosi libri segnaliamo: «La patria ci vuole eroi» (con P. Nastasi, Zanichelli, 2013) e per il Mulino «Numeri», 2015. Nel 2006 ha vinto il premio Pitagora per la divulgazione matematica. È fellow dell'American Mathematical Society, che nel 2015 gli ha attribuito il Whiteman Memorial Prize per i suoi lavori di storia della matematica. Collabora con il «Sole 24 Ore».

“La ma



- J. Stillwell, Mathematics and its history, Springer UTM (terza edizione 2010)
- A. Ostermann-G. Wanner, Geometry by its history, Springer UTM (2012)
- L. Ji-A.Papadopoulos-S. Yamada (editors), From Riemann to Differential Geometry and Relativity, Springer
- S.G. Dani-A.Papadopoulos (editors), Geometry in history, Springer (2019)

- Clay foundation Millenium Problems:

<https://www.claymath.org/millennium-problems>

MacTutor history of mathematics archive, University of St. Andrews UK

<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>

Comprehension of shapes has played a pivotal role, alongside of numbers, in the progress of civilizations, from the beginning. Significant engagement with shapes, or *geometry*,¹ is seen in the ancient cultures of Egypt, Mesopotamia, India, China, etc., from the very early times. A systematic approach to the subject, turning it into a discipline with an axiomatic foundation, was developed by the ancient Greeks, which served crucially as a basis to later rewritings and developments at the hands of Arab mathematicians during the Middle ages and in turn to the modern advent. The Greeks also addressed various philosophical issues associated with the subject that have been very influential in the later developments.

From the point of view of the subject of history of mathematics, there is a need for viewing the historical development of ideas of geometry as an integral whole. The present endeavour is seen by the editors as a limited attempt in that direction, focusing mainly on the historical antecedents of modern geometry and the internal relations within the latter.² In the overall context, the editors also felt the need to concentrate on bringing out the perspective of working mathematicians actively engaged with the ideas involved, in their respective areas, as against that of historians of mathematicians viewing developments in mathematics from the outside, a pursuit in which the issues involved and the flavour of the output are different from what we seek to explore in this project.

Mathematicians build upon the works of their predecessors, which they regularly reshape, refine and reinterpret (sometimes misinterpret). There are countless examples of ideas discovered concurrently and independently and of others that stayed in the dark until being rediscovered and used much later. This makes the history of mathematical ideas a living and intricate topic, and any attempt to say something


¹Although the term *geometry* is etymologically associated with *earth measurement*, it was clear since the times of Plato that this field, from the moment it became mature, is more concerned with shape than with measurement.

²The present editors had organized a conference on the same theme, "Geometry in History," at the University of Strasbourg during 9–10 June 2015; the deliberations at the conference and the overall experience of the event have served as an inspirational precursor to bringing out this volume.

S. G. Dani · Athanase Papadopoulos
Editors

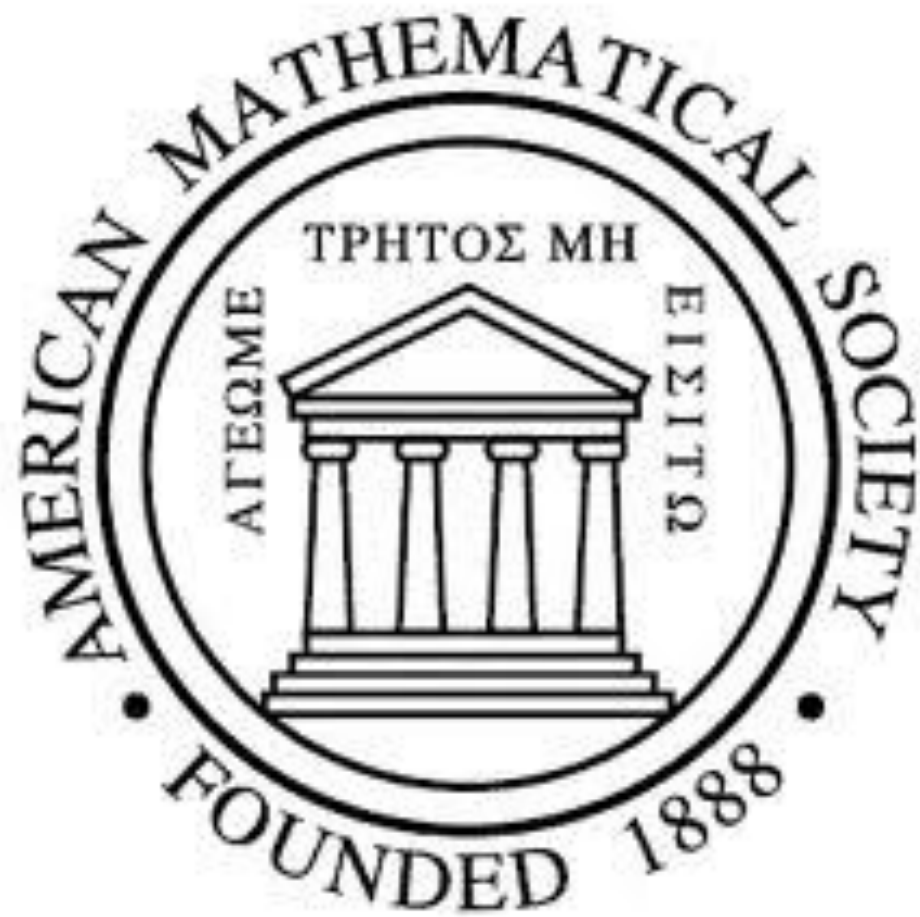
Geometry in History

2019

 Springer



Platone 428-348 a.c.





Federigo Enriques 1871-1946

*... in ultima analisi, quando tentiamo di derivare dall'esperienza fisica i postulati della linea (o di altre idee geometriche), dobbiamo tener conto, non tanto dei dati di fatto dell'esperienza stessa, quanto **delle esigenze semplificatrici della nostra mente,** che in essi si rispecchiano.*

Elementi di **Euclide**:

Definizione 1. Un punto è ciò che non ha parti

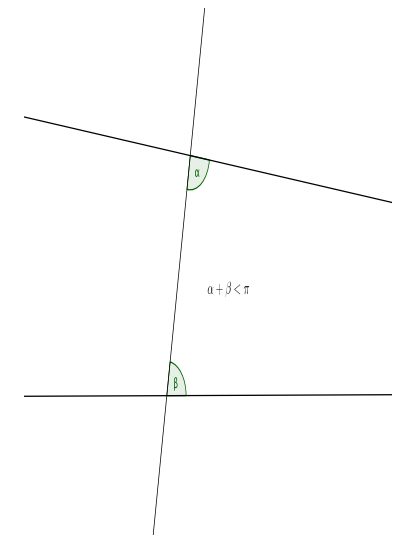
Definizione 2. Una linea è lunghezza senza larghezza.

Definizione 4. Una linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

Postulato 1. Tracciare una retta da un punto a un altro punto.

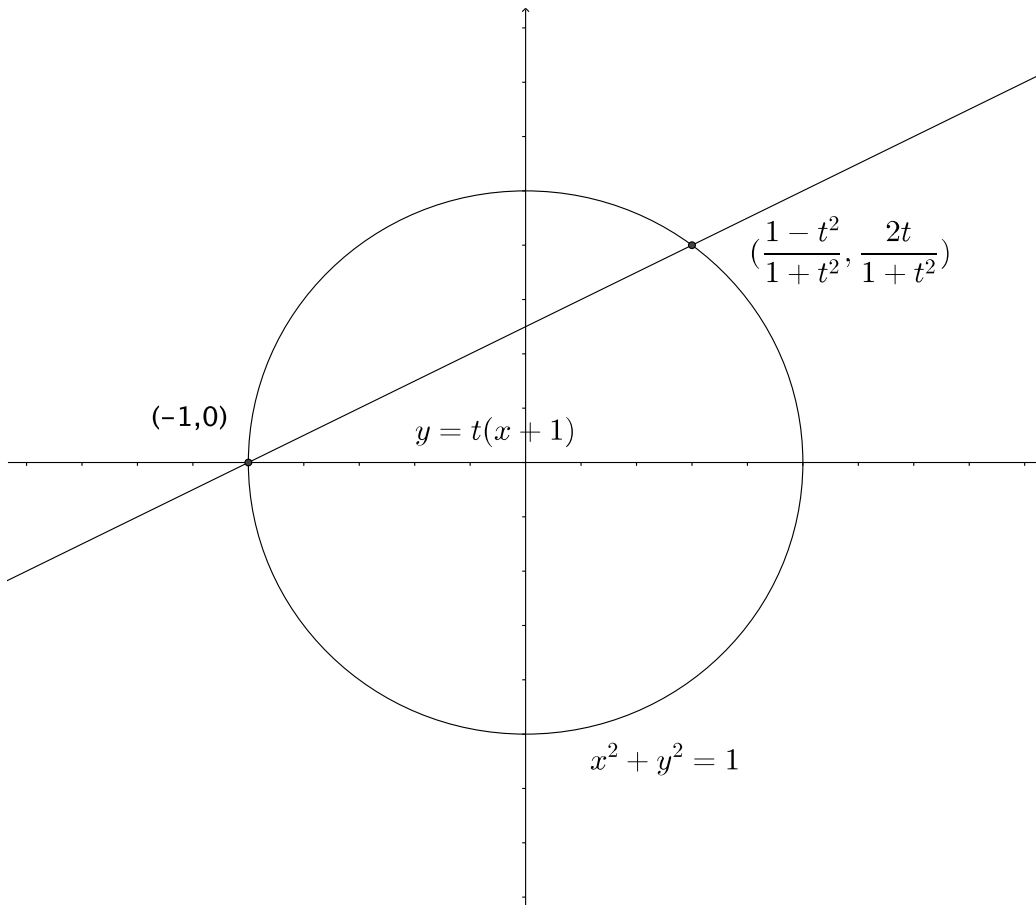
Postulato 2. Prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in una retta.

*Postulato 5. E che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente **incidano** dalla parte in cui sono gli angoli minori dei due retti.*



Diofanto III sec. D.C. nel suo libro Arithmetica fa uso del **metodo delle corde per trovare soluzioni razionali**

Partiamo da una soluzione razionale ovvia $x = -1$ e $y = 0$ e costruiamo tutte le rette passanti per questo punto, come in figura.



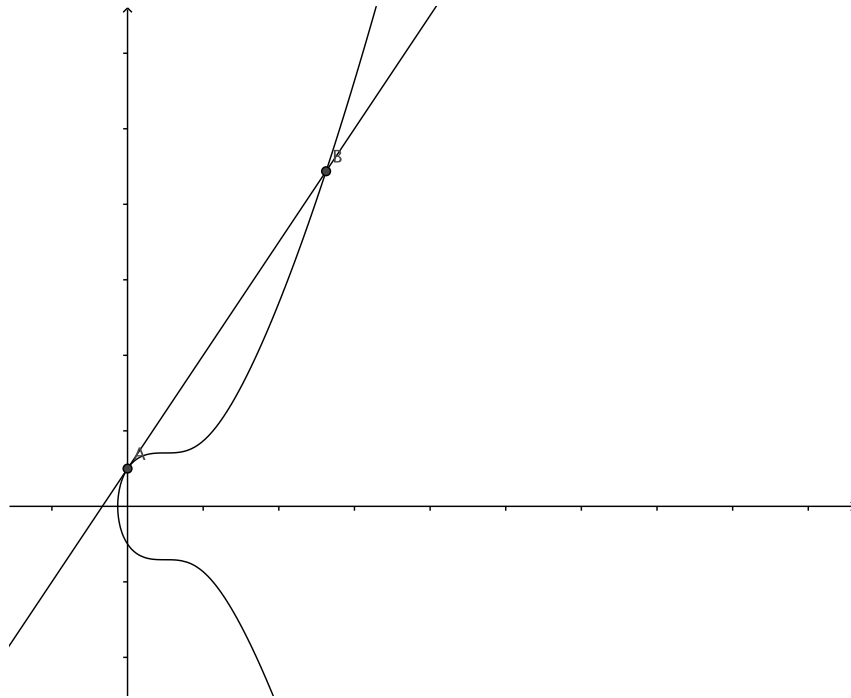
Metodo delle tangenti per la ricerca di punti razionali su una cubica

Problema 18: Si determini un triangolo rettangolo la cui area aggiunta all'ipotenusa sia un (numero razionale elevato al) cubo e il cui perimetro sia un (numero razionale elevato al) quadrato.

Per interpretare questo problema in linguaggio moderno scegliamo un'unità di misura tale che un cateto del triangolo sia lungo 2. Detti b e c l'altro cateto e l'ipotenusa il problema si traduce facilmente in quello di trovare b e c tali che $b + c = \beta^3$ e $2 + b + c = y^2$. Sostituendo $b + c = \beta^3$ nella seconda equazione otteniamo $\beta^3 + 2 = y^2$. Posto $x = \beta + 1$, dobbiamo trovare dei punti razionali sulla cubica $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = y^2$.

Diofanto suggerisce di sostituire $\frac{3}{2}x + 1$ al posto di y ; questa sostituzione ci dà l'equazione $x^3 - \frac{21}{4}x^2 = 0$, che ha come soluzioni $x=0$ e $x=\frac{21}{4}$. Quest'ultima ci fornisce a ritroso la soluzione $b = \frac{24121185}{628864}$ e $c = \frac{24153953}{628864}$.

Diofanto non spiega le ragioni che lo hanno portato a sostituire y con $\frac{3}{2}x+1$. Oggi potremmo pensare che, preso il punto razionale $(0,1)$ sulla curva, abbia quindi calcolato la tangente alla curva in quel punto, scoprendo che è proprio la retta $y = \frac{3}{2}x+1$



Pierre de Fermat fu un appassionato lettore dell'Arithmetica di Diofanto. Egli scrisse numerose osservazioni in margine ad un'edizione del 1621, raccolte in un libro pubblicato postumo secondo una sorte comune a quasi tutte le sue opere. In una di queste note egli scrisse:

D'altra parte è impossibile che un cubo possa essere scritto come somma di due cubi, o che una potenza quarta sia somma di due potenze quarte, o, in generale che ogni numero che sia una potenza superiore alla seconda possa essere scritto come somma di due analoghe potenze. Ho ottenuto una davvero splendida dimostrazione di questa proposizione, che il margine di questo libro è troppo piccolo per contenere.

Fermat qui afferma che non esistono tre interi a, b, c (non nulli) tali che $a^n + b^n = c^n$, con n intero maggiore di due. Dunque che il problema della ricerca di soluzioni razionali della funzione diofantina $x^n + y^n = 1$, per $n \geq 3$, non ammette soluzioni.

Questo è uno dei più famosi problemi matematici, alla cui soluzione hanno dedicato grandi sforzi i maggiori matematici degli ultimi 350 anni; viene denominato come il **Grande Teorema (o La Congettura) di Fermat**.

Nel 1986 il matematico tedesco Frey osservò che il Teorema proposta da Fermat è vero se la cubica liscia $y^2 = x(x-at^n)(x+bt^n)$ ha particolari proprietà.

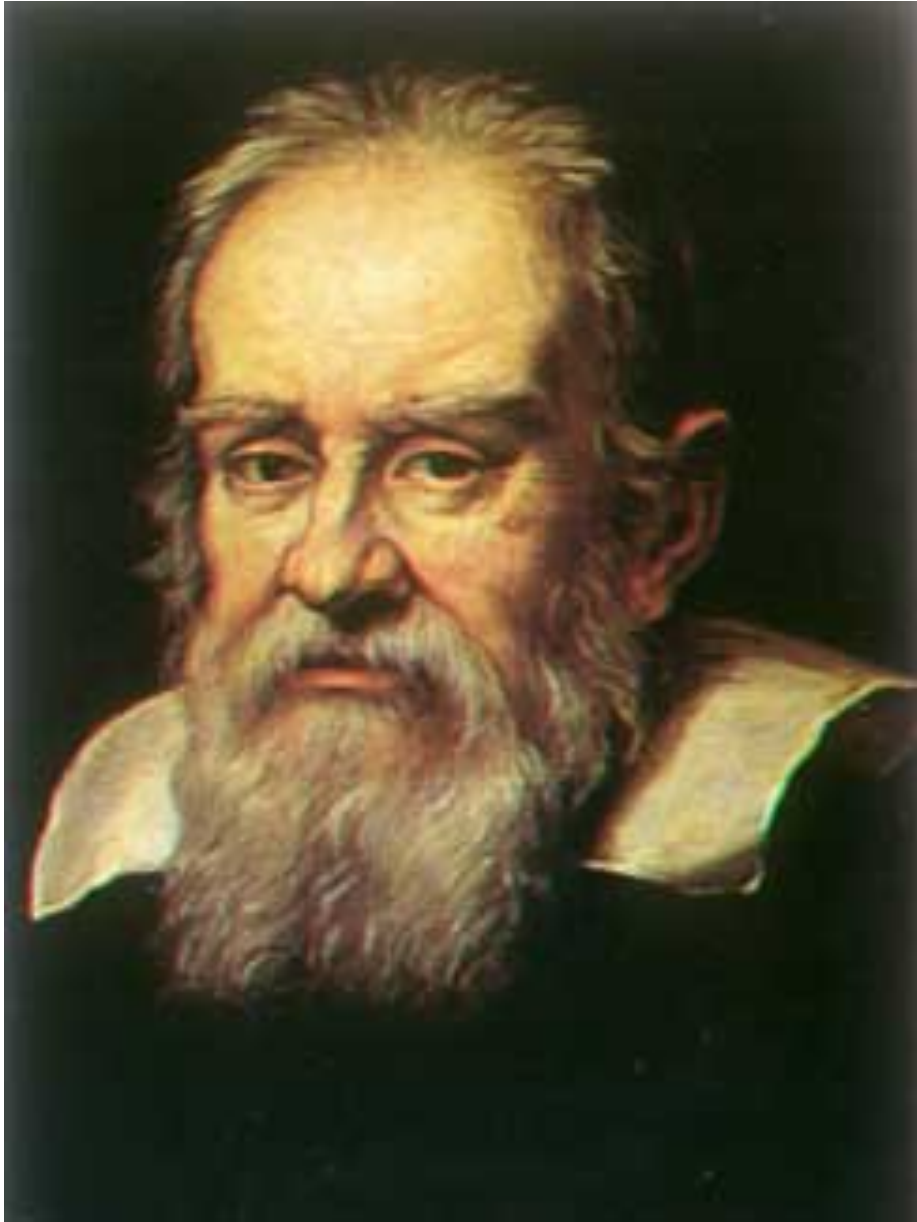
Nel 1993 l'inglese Andrew Wiles annunciò al mondo, durante un seminario al Newton Institute di Cambridge, di aver provato la famosa (per i matematici) congettura dei giapponesi Taniyama-Shimura, ovvero che ogni curva ellittica (semistabile) ha questa proprietà e che, di conseguenza, il Teorema di Fermat è vero.

Fu un momento di grande eccitazione per i matematici di tutto il mondo, una congettura aperta da secoli veniva finalmente provata! Ricordo ancora la frenesia al Max Planck Institute für Mathematik di Bonn, dove in quel momento stavo lavorando: la notizia arrivò via e-mail la mattina presto, diffusa dall'americano Serge Lang. Il tedesco Gerd Faltings, professore e co-direttore dell'Istituto di Bonn, aveva in precedenza dimostrato, con l'uso delle tecniche di Mordell sulle cubiche, che gli eventuali controesempi al Teorema di Fermat sono al più un numero finito, per questo nel 1986 gli viene conferita la medaglia Fields. Faltings decise di tenere subito una serie di seminari pubblici per studiare il risultato di Wiles; ma al secondo appuntamento cancellò il seminario, la dimostrazione aveva una grossa falla!

Con perizia matematica e con la collaborazione del suo studente Richard Taylor, Wiles riuscì in un anno a sistemare la dimostrazione, che venne quindi pubblicata, dopo essere stata valutata da più esperti, nel 1995 in due articoli sulla rivista *Annals of Mathematics*.

Alla soluzione della congettura di Fermat Andrew Wiles dedicò sette anni della sua vita. Questa avventura matematica è stata raccontata da Simon Singh prima in un bel libro dal titolo *L'Ultimo Teorema di Fermat* e quindi anche in un film-documentario dallo stesso titolo della PBS-NOVA.

Poiché per regolamento la medaglia Fields non può essere assegnata a matematici di età superiore ai 40 anni, Wiles, che ha concluso con successo la prova all'età di 41 anni, non potrà mai ricevere questo premio.



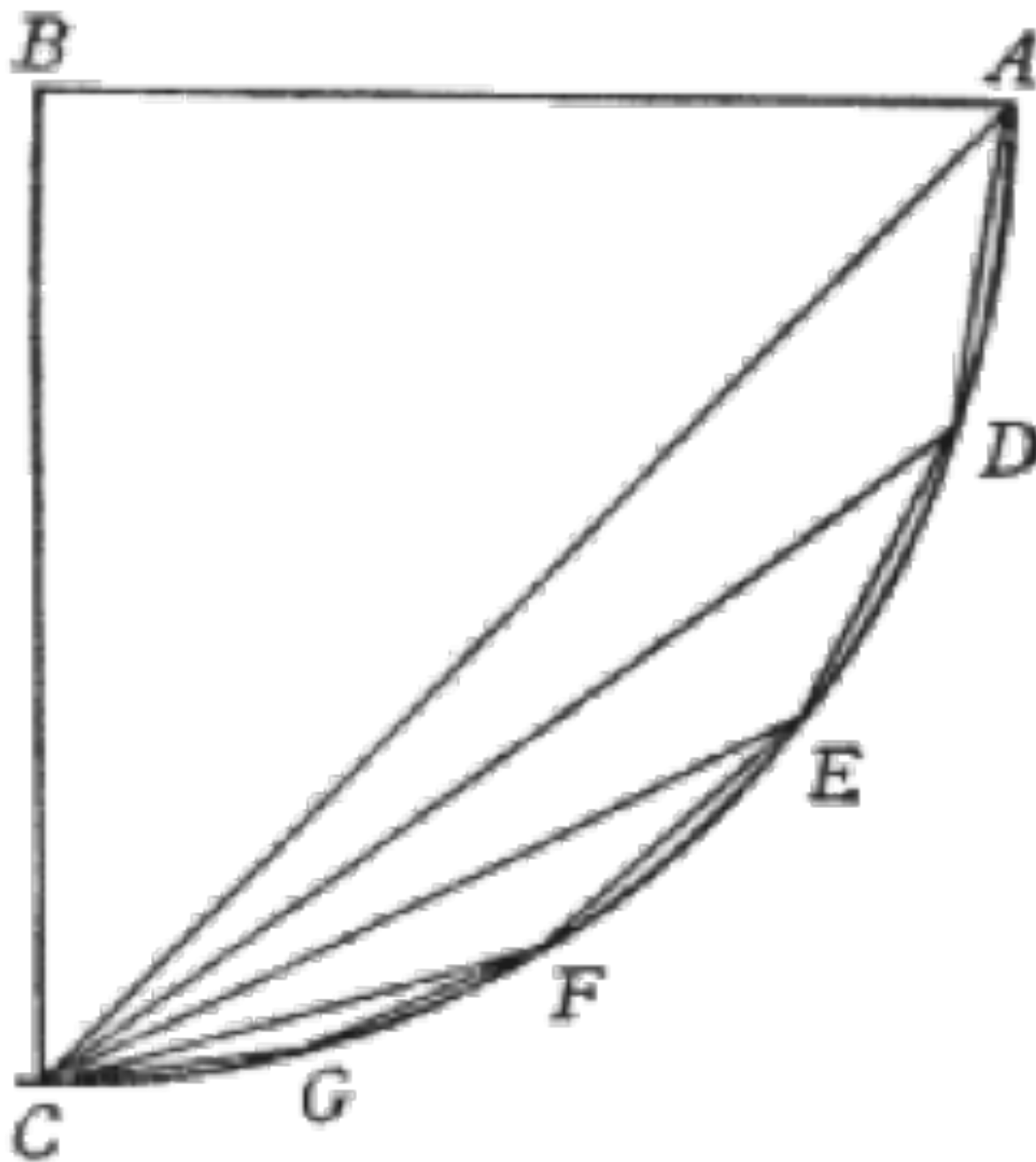
Galileo Galilei 1564-1642

Diamo avvio a una nuovissima scienza intorno a un soggetto antichissimo.

Nulla v'è, forse, in natura, di più antico del moto, e su di esso ci sono non pochi volumi, né di piccola mole, scritti dai filosofi; **tuttavia tra le sue proprietà ne trova molte che, pur degne di essere conosciute, non sono mai state finora osservate, nonché dimostrate.**

Se ne rilevano alcune più immediate, come quella, ad esempio, che **il moto naturale dei gravi discendenti accelera continuamente**; però, secondo quale proporzione tale accelerazione avvenga, non è stato sin qui mostrato: **nessuno, che io sappia, infatti, ha dimostrato che un mobile discendente a partire dalla quiete percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi ab unitate**

Cammino più breve:
brachistocrona

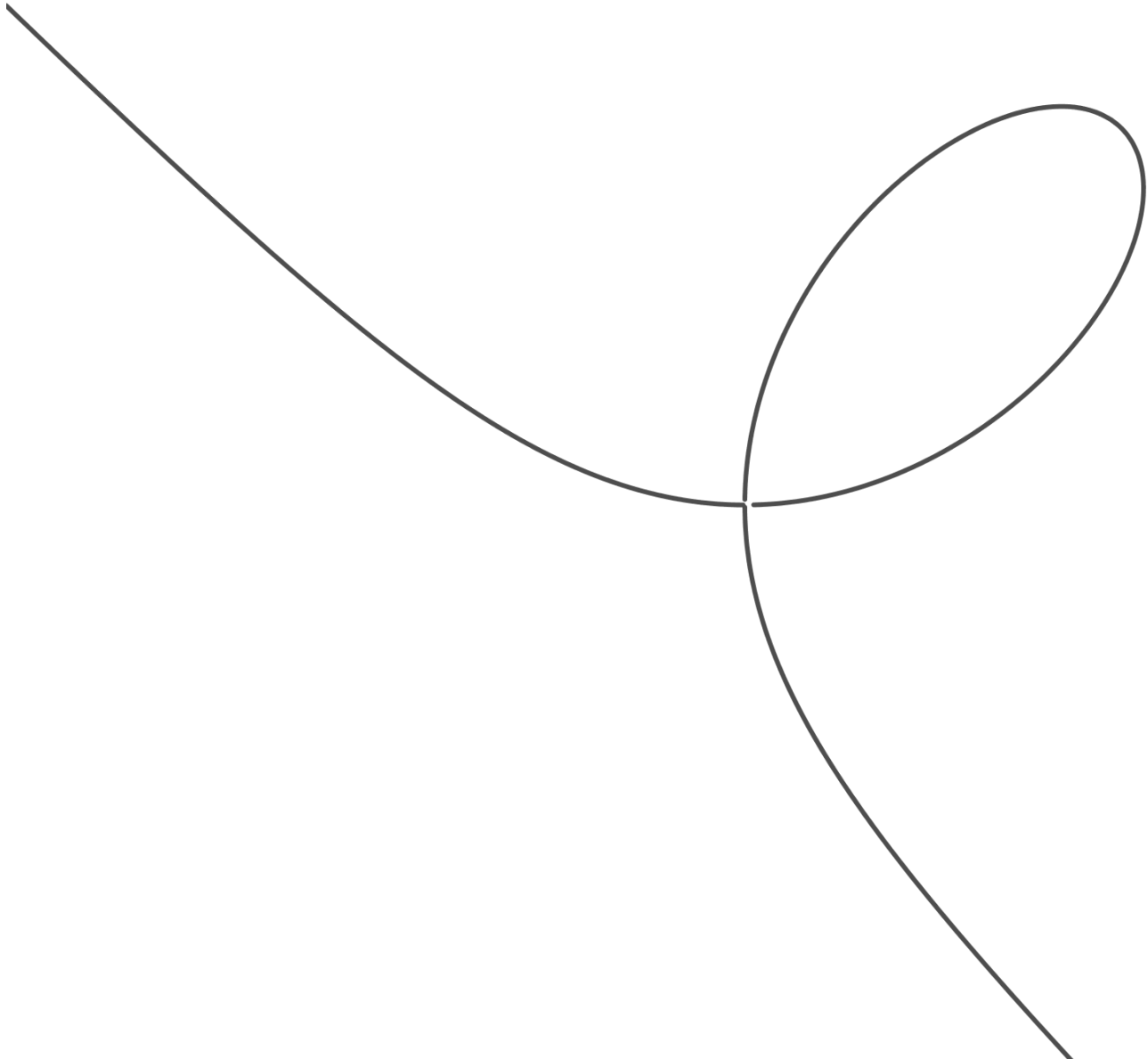




*Potrei ora dare diversi modi per tracciare o concepire delle linee curve, ogni curva più complessa che le precedenti, ma penso che il modo migliore per raggrupparle e classificarle in ordine tutte assieme sia riconoscendo il fatto che **tutti i punti di queste curve** che noi chiamiamo geometriche, ..., **devono avere una relazione con tutti i punti di una retta, che deve essere espressa per mezzo di una singola equazione***

René Descartes 1596-1650

$$x^3 + y^3 = 3xy$$



Fermat prende ad esempio la parabola $y = x^2$.

Per calcolare la pendenza della retta tangente in un qualunque suo punto (x, x^2) consideriamo la corda tra i due punti della parabola (x, x^2) e $(x+E, (x+E)^2)$.

La pendenza della corda è data da

$$\frac{((x+E)^2 - x^2)}{(x+E) - x} = \frac{2xE + E^2}{E} = 2x + E.$$

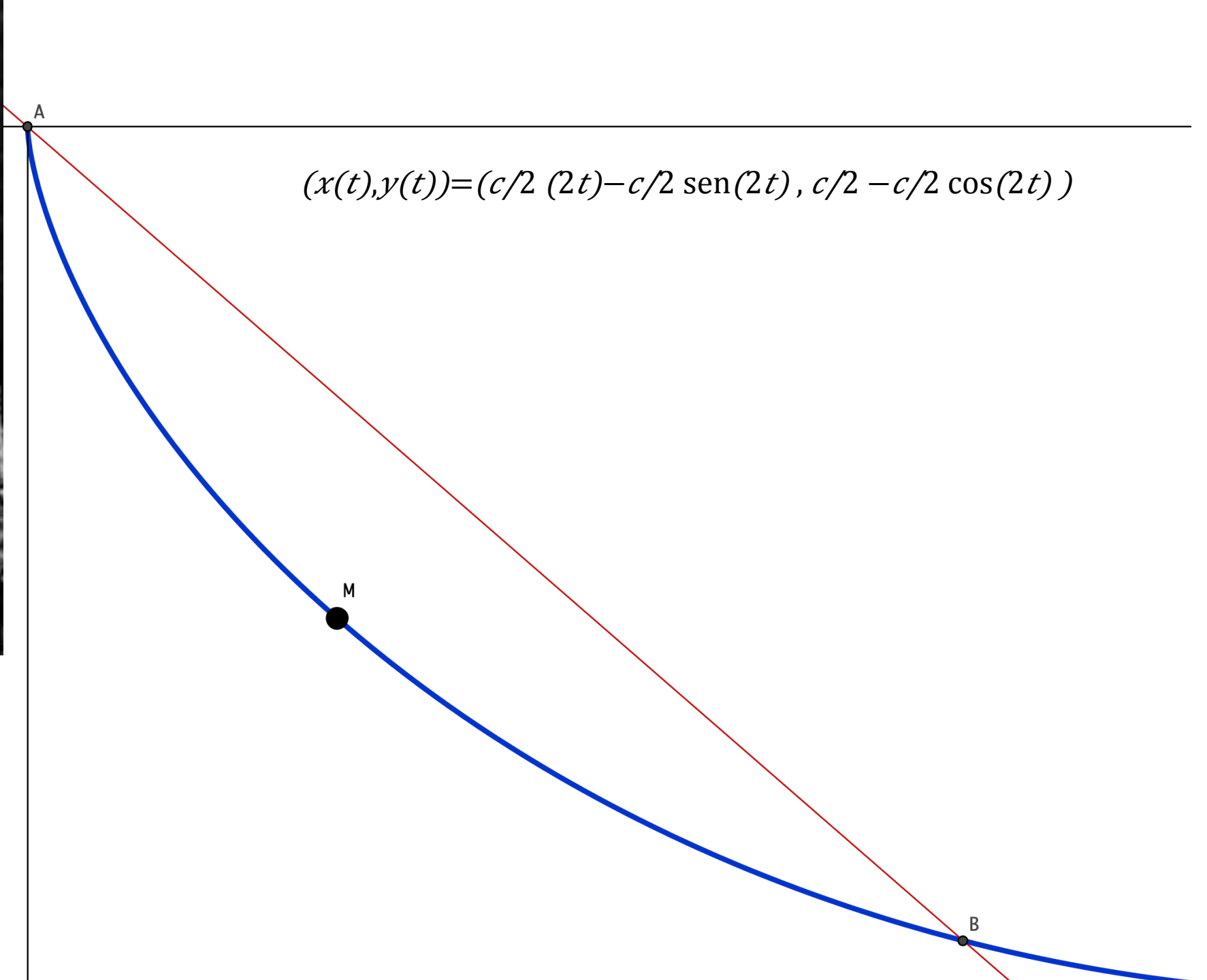
Cancellando E otteniamo che la pendenza della tangente in ogni punto (x, x^2) è data da $2x$. Oggi diremmo che calcoliamo **la derivata di $p(x)$ in x , $p'(x)$** .

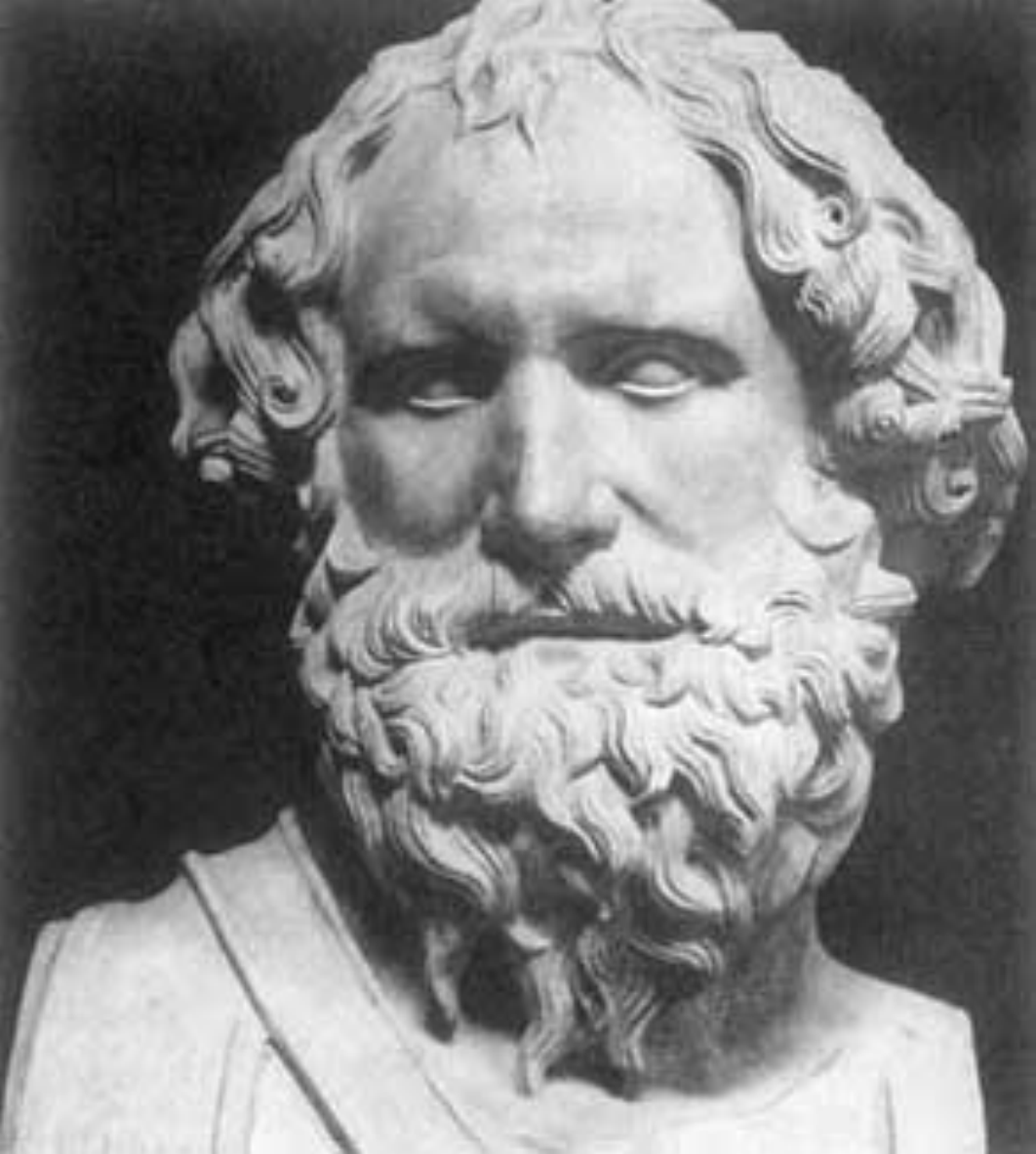
Questa procedura fece infuriare i filosofi dell'epoca, in particolare Thomas Hobbes, che pensavano si stesse affermando che $2x + E = 2x$, sebbene $E \neq 0$.

In termini moderni oggi diciamo che $\lim_{E \rightarrow 0} (2x + E) = 2x$, ma il concetto di limite di una funzione nasce molto più tardi.

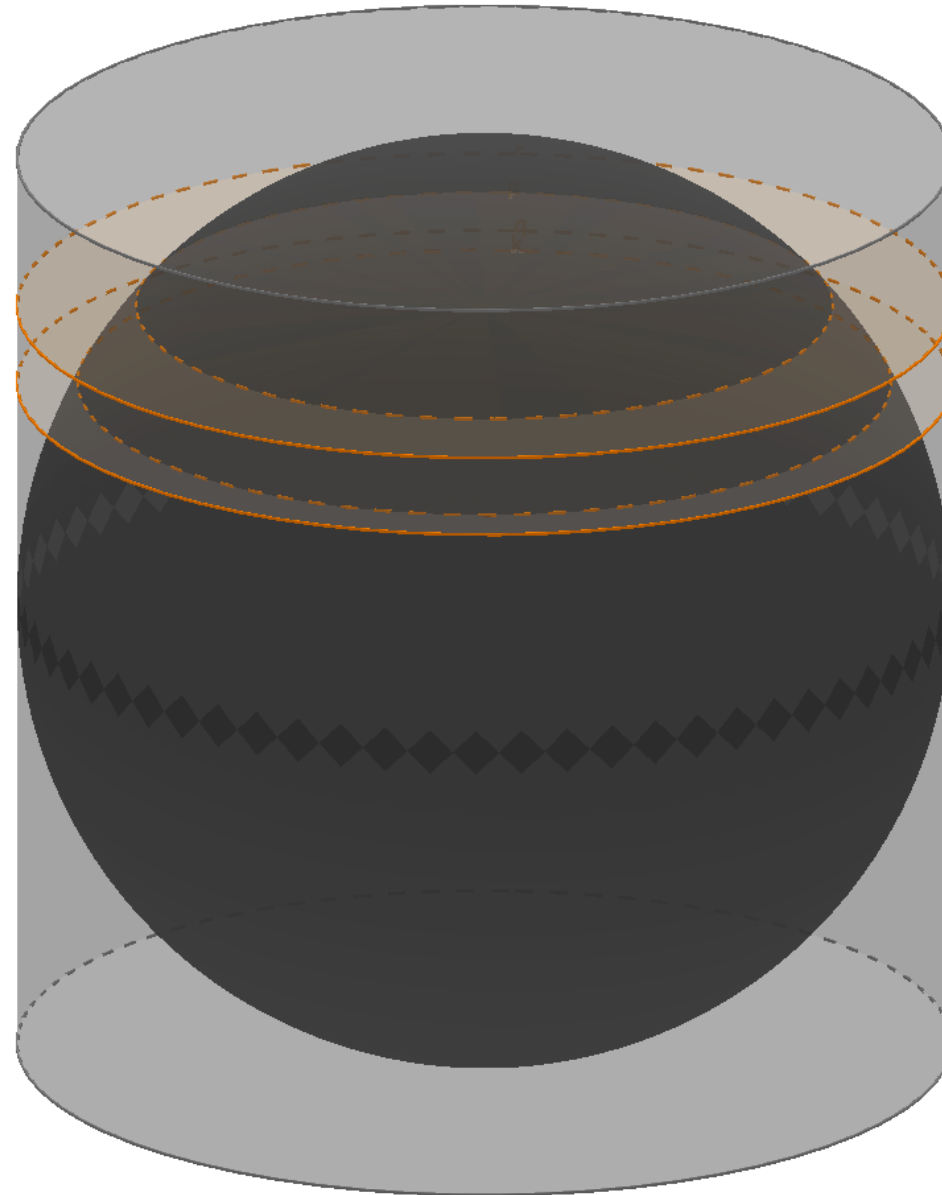


Johann Bernoulli 1667-1748





Archimede 287-212 a.c.



Superficie sfera =
superficie cilindro =
 $4\pi r^2$



Da il *Metodo dei teoremi meccanici*: pensai che sarebbe stato opportuno annotare ed esporre per te nello stesso libro un certo metodo particolare mediante il quale sarai in grado di comprendere questioni matematiche per mezzo della meccanica. Sono convinto che esso non sia meno utile per trovare le dimostrazioni di questi stessi teoremi. Infatti alcune cose, che mi divennero chiare grazie al **metodo meccanico**, sono state in seguito dimostrate geometricamente, perché il loro studio con il metodo suddetto non fornisce una effettiva dimostrazione. Poiché è più facile fornire la dimostrazione quando abbiamo in precedenza acquisito, mediante il metodo, qualche conoscenza sulla questione, piuttosto che trovarla senza alcuna conoscenza precedente.

Per questa ragione, nel caso dei teoremi che Eudosso scoprì per primo, cioè quelli sul cono e sulla piramide, per cui il cono è un terzo del cilindro e la piramide un terzo del prisma avente la stessa base e uguale altezza, una parte non piccola del merito deve essere data a Democrito, che fu il primo a stabilire la proprietà di questa figura, anche se senza dimostrazione. (...) Desidero dunque spiegare il metodo per iscritto (...) in parte perché sono persuaso che si dimostrerà molto utile per la matematica; infatti, suppongo che ci sarà nelle future generazioni, come nella presente, chi per mezzo del metodo descritto sarà in grado di trovare altri teoremi che non abbiamo ancora escogitato.

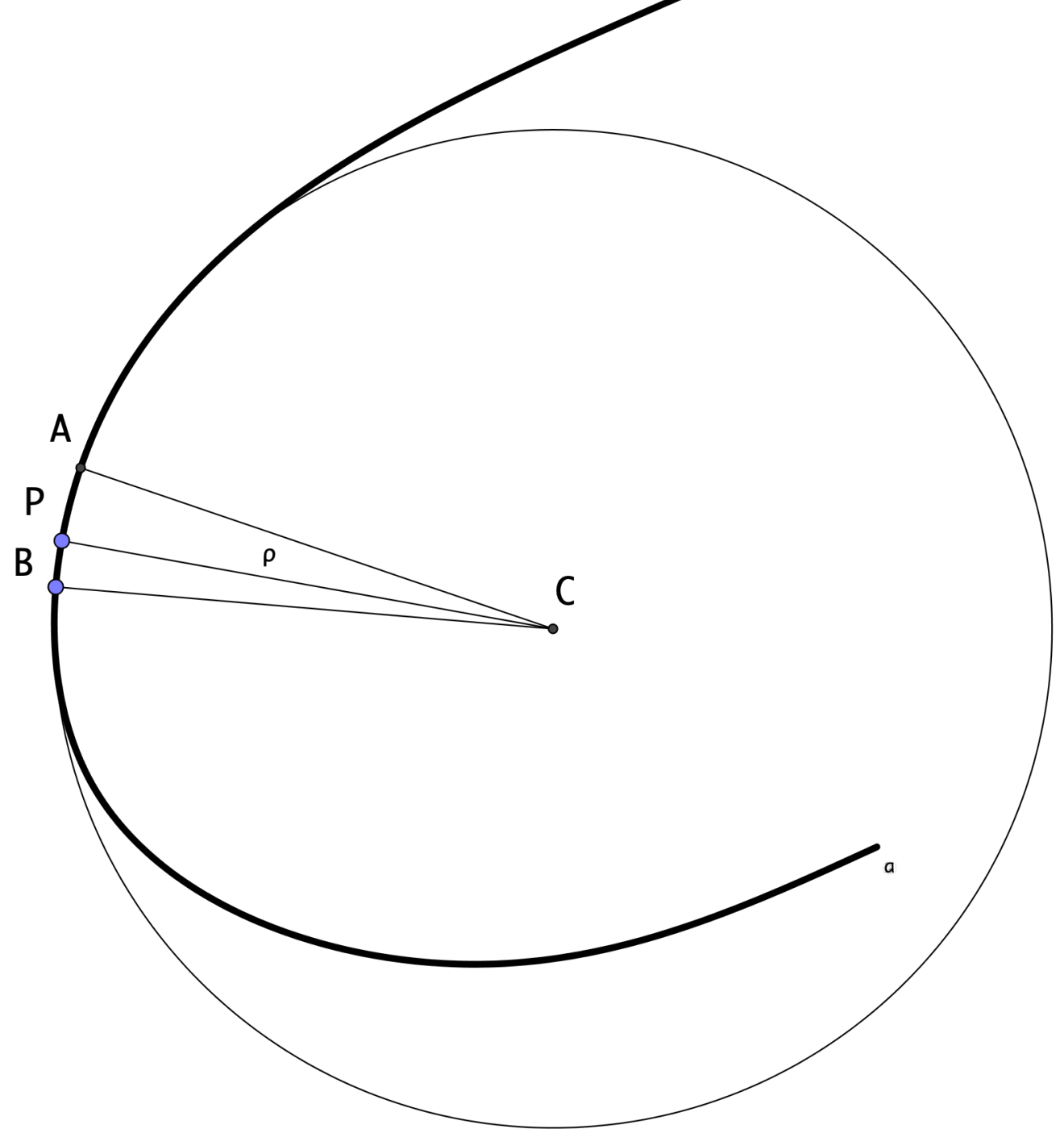
Archimede, nel primo libro *Sulla sfera e il cilindro*, enuncia il seguente:

Postulato. Che inoltre tra linee diseguali, superfici diseguali e solidi diseguali il maggiore superi il minore di una quantità tale che, se addizionata a sé stessa, possa superare ogni assegnata grandezza del tipo di quelle confrontate tra loro.

Ancora oggi diciamo che in un insieme di numeri, con una addizione, una moltiplicazione (un *campo*) e un ordine, vale l'*assioma di Archimede* se per ogni due elementi positivi a e b esiste un intero positivo n tale che $na > b$.



Isaac Newton 1642-1727





***Disquisitiones generales circa superficies
curvas (1828)***

*non tamquam limes solidi, sed tamquam
solidum cuius dimensio una pro evanescente
habetur.*

Carl Friedrich Gauss 1777-1855

La mappa di Gauss

La **curvatura di Gaussiana** di una superficie

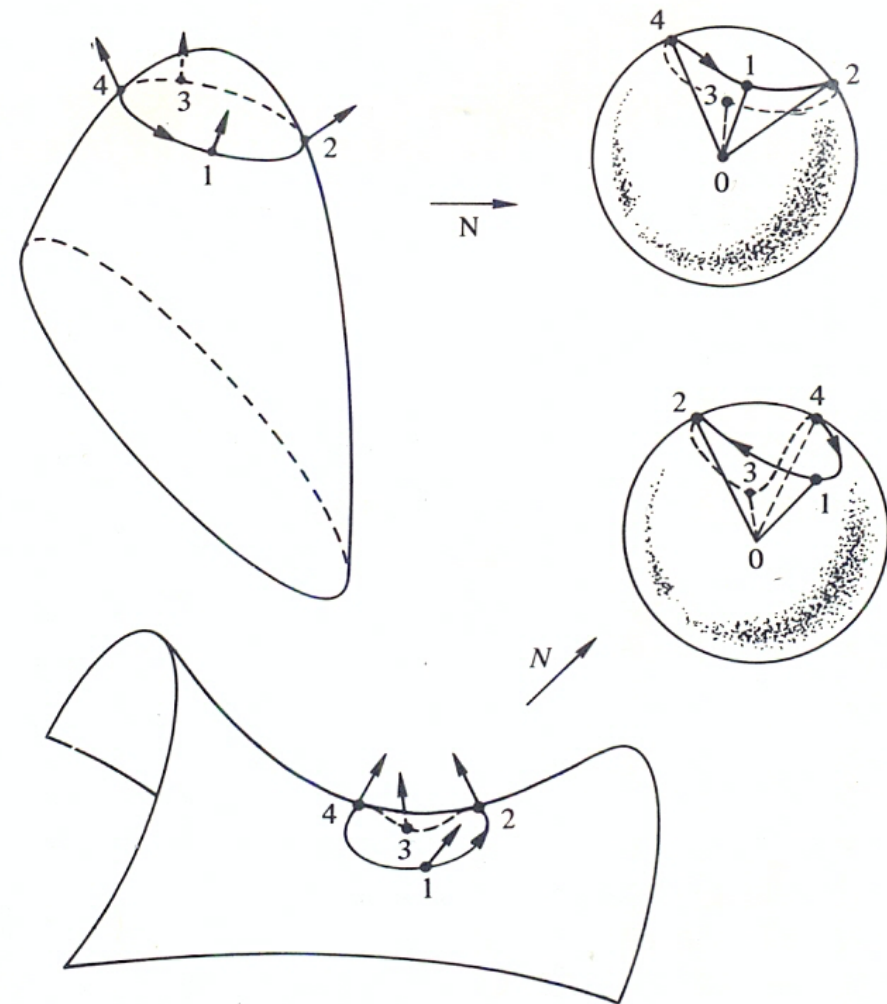


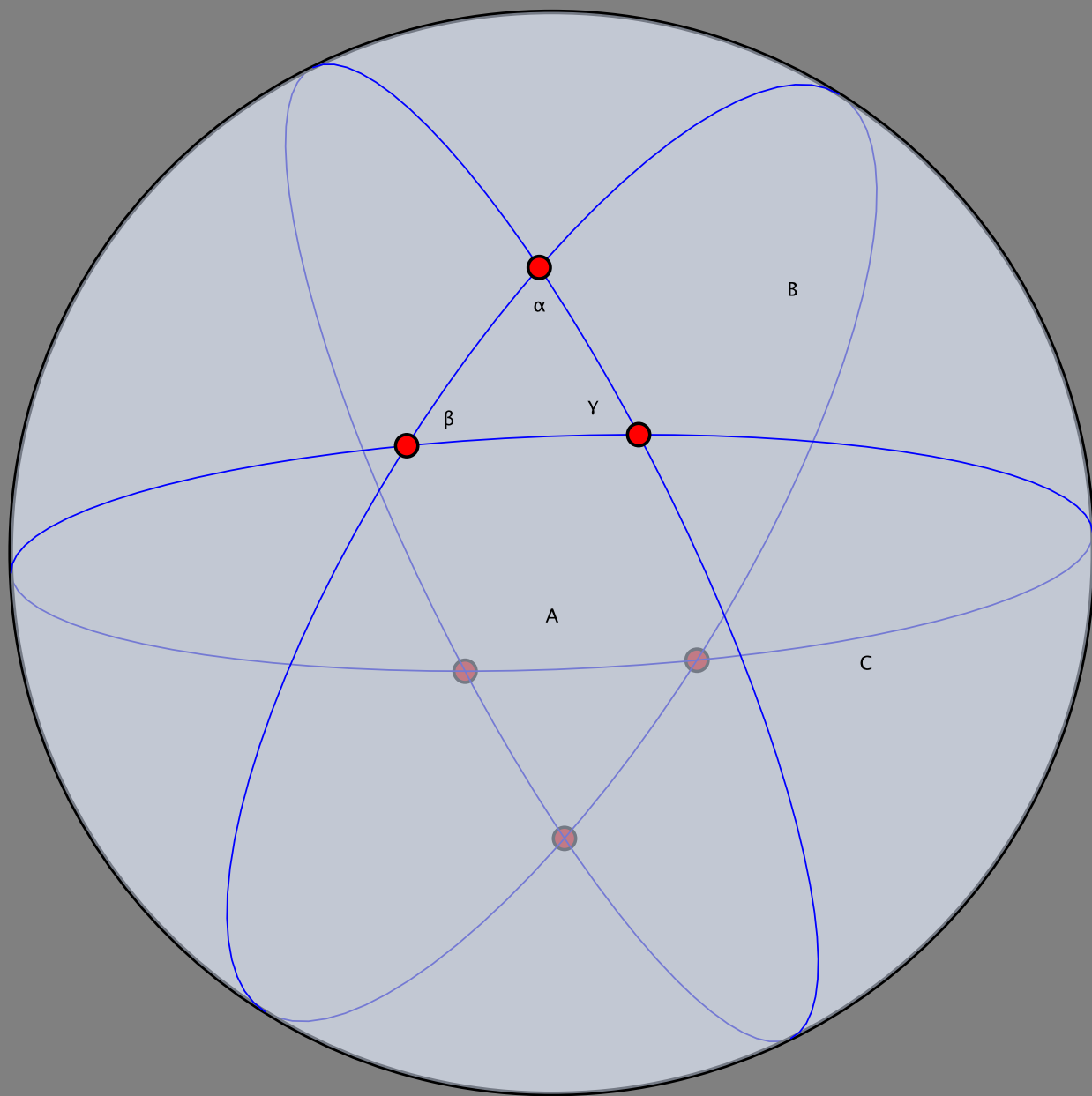
Figure 3-21. The Gauss map preserves orientation at an elliptic point and reverses it at a hyperbolic point.

Si consideri un ***triangolo geodetico*** con angoli α , β , γ e area A vale la formula:

$$K \cdot A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

*Formula itaque art. praec. sponte perducit ad **egregium Theorema**. Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singuli punctis invariata manet.*

Il **Teorema Egregium di Gauss** dice che la curvatura gaussiana di una superficie è invariante per isometrie locali.



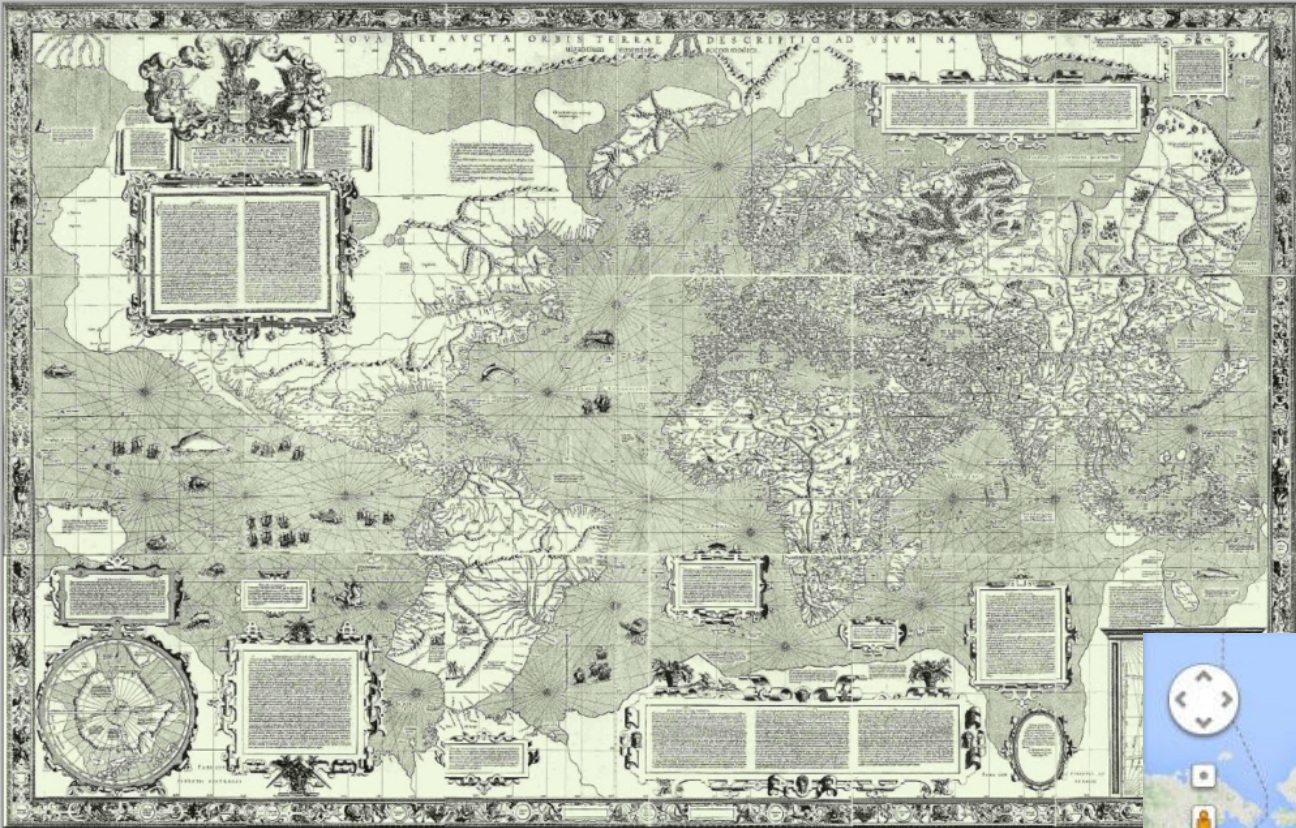
$$Area = R^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Le tre lune coprono tutta la sfera, coprendo tre volte il triangolo e il suo antipodale.

Area della luna di angolo α è uguale a: $4 R^2 \alpha$

La somma delle aree delle tre lune è uguale all'area della sfera più quattro volte l'area del triangolo:

$$4\pi R^2 + 4 Area Triangolo = 4 (\alpha + \beta + \gamma) R^2$$





Analysis Situs, un nuovo modo di pensare alla geometria, natura ontologica ed epistemologica della geometria: non una teoria delle figure ma una **scienza dello spazio**.

Gli oggetti della geometria non sono solo le figure o le quantità continue, come nella tradizione greca, ma anche lo spazio stesso.

Considera lo spazio come una struttura e, con una famosa definizione, lo descrive come **un ordine di situazioni**, dove per situazione si intende una relazione (geometrica) tra oggetti.

Un punto non è altro che un oggetto concepito come correlato ad altri attraverso una relazione di situazione, ad esempio attraverso una distanza.

E' probabilmente la prima definizione naif del moderno concetto di spazio metrico, o *struttura metrica*.

Gottfried W. Leibniz 1646-1716

In uno dei tentativi di **prova (sbagliata) del postulato delle parallele** osserva che, per il *principio di ragion sufficiente*, non essendoci alcuna ragione valida per supporre che lo spazio non sia uniforme, questo lo deve essere per forza. Suppone quindi che non vi siano nello spazio particolari ordini di situazioni, particolari proprietà metriche.



Bernhard Riemann 1826-1866

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Bernhard Riemann

[Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.]*

Plan der Untersuchung

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen in Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei in Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von *Euklid* bis auf *Legendre*, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich

*Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; einige Ausführungen derselben findet man in der Beantwortung der Pariser Preisaufgabe nebst den Anmerkungen zu derselben.

*...Mi sono perciò proposto in primo luogo il compito di costruire il **concetto di grandezza multiplamente estesa (mehrfach ausgedehnter Grössen)**...esse costituiranno le **Varietà (Mannigfaltigkeit)**, continue o discrete.*

*...Da questo pertanto segue che una grandezza multiplamente estesa è passibile di diverse **relazioni metriche** (eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist), e che lo spazio costituisce quindi solo un caso particolare di una grandezza triplamente estesa.*

Metrica euclidea, teorema di Pitagora: $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$

dx_1

Metrica generale

$$g := ds = \sqrt{g_{11} dx_1^2 + \dots + g_{ij} dx_i dx_j + \dots + g_{nn} dx_n^2}$$

Come determinare le varietà euclidee o piatte?

Tensore di curvatura di Riemann

Metrica con curvatura costante α :

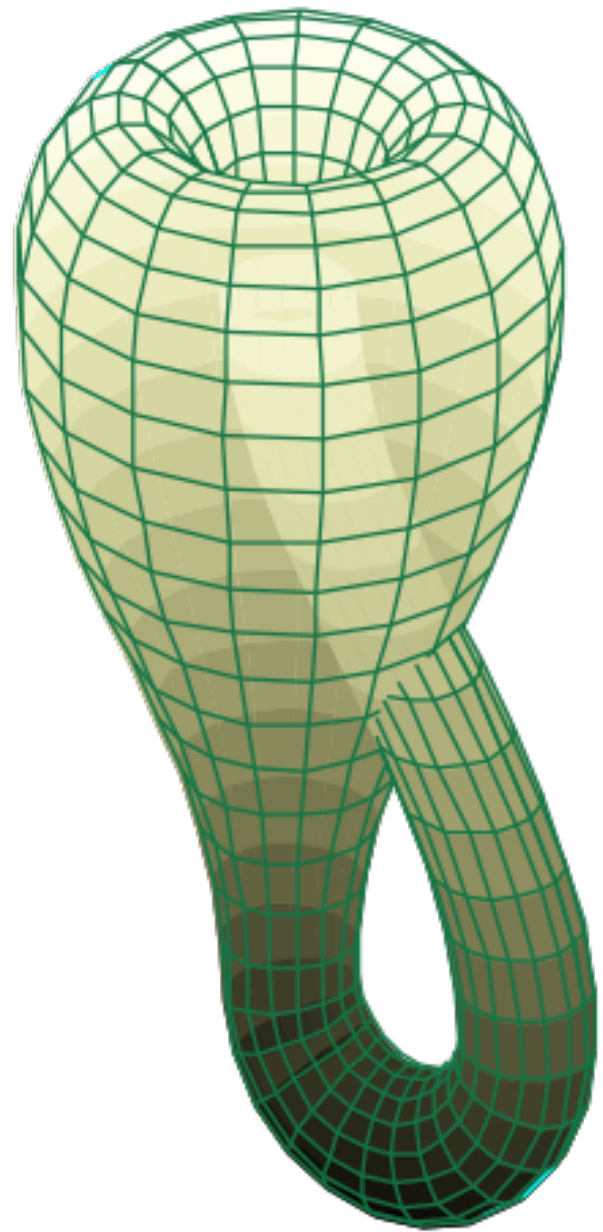
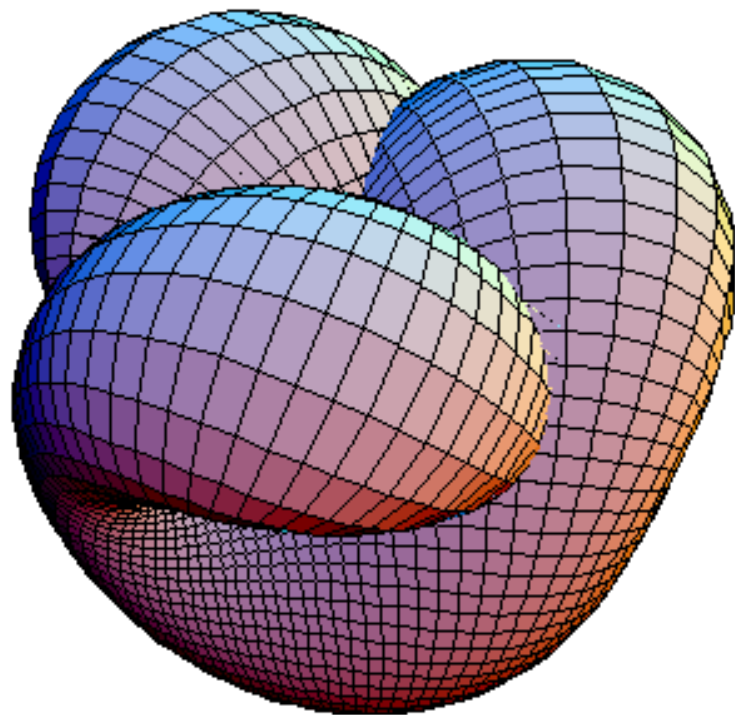
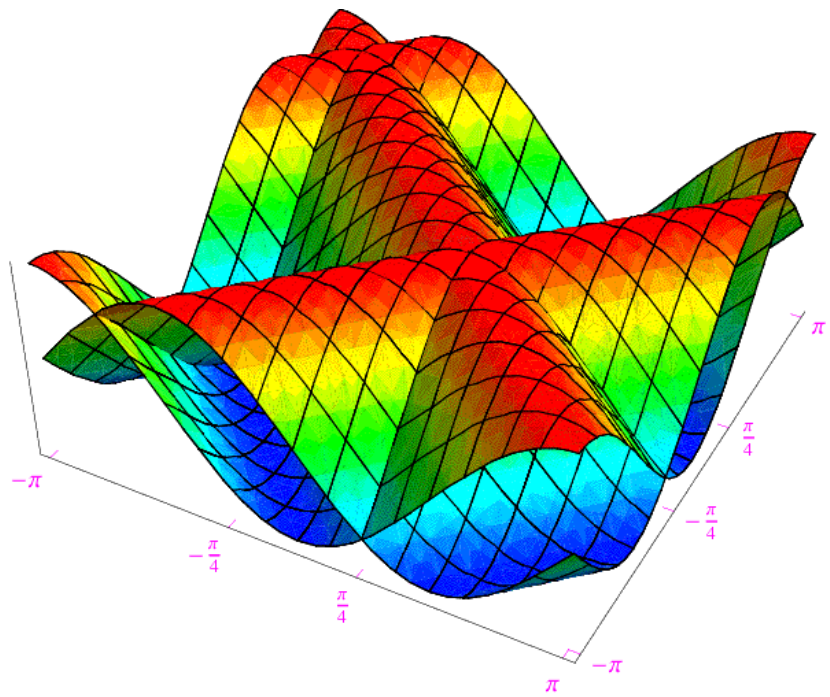
$$ds = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha/4 (x_1^2 + \dots + x_n^2)}} \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}$$

...Da ciò nasce il problema di studiare i dati di fatto più semplici dai quali dedurre le relazioni metriche dello spazio; un problema che per la natura della questione non è completamente determinato; invero si possono dare più sistemi di fatti sufficienti a determinare le relazioni metriche dello spazio; il più importante è quello scelto per fondamento da Euclide.

*Questi fatti sono come tutti i fatti non necessari, ma solo di **certezza empirica**, sono **ipotesi**; si può così studiare la loro probabilità, che entro i limiti dell'osservazione è tuttavia assai grande, e dopo di ciò valutare l'ammissibilità della loro estensione al di là dei confini dell'osservazione sia dal lato dell'incommensurabilmente grande che dal lato dell'incommensurabilmente piccolo.*

*... la questione di cosa siano le basi delle relazioni metriche dello spazio. ... Pertanto la realtà dello Spazio sottostante, le basi delle relazioni metriche, devono essere ricercate fuori di esso, nelle forze vincolanti (**bindenen Kräften**) che agiscono su di esso. ...*

Questo ci porta nel campo di un'altra scienza, il regno della fisica, nel quale la natura dell'attuale occasione non ci permette di entrare.





Hermann Minkowski 1864-1909

(1908): I concetti di spazio e di tempo che desidero esporvi traggono origine dal terreno della fisica sperimentale, e in ciò risiede la loro forza. Sono radicali.

*D'ora in avanti lo spazio singolarmente inteso, ed il tempo singolarmente inteso, sono destinati a svanire in nient'altro che ombre, e solo una **connessione dei due** potrà preservare una realtà indipendente.*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

La **Teoria della Relatività Generale**, di fatto una teoria geometrica, propone un modello di varietà 4 dimensionale, spazio-temporale, dotata di una metrica g semi-riemanniana del tipo di Minkowski, compatibile dunque con la teoria ristretta, ulteriormente determinata da osservazioni della fisica sperimentale sulla forza di gravità.

Una delle equazioni più famose della storia del pensiero scientifico,

l'Equazione di Campo di Einstein:

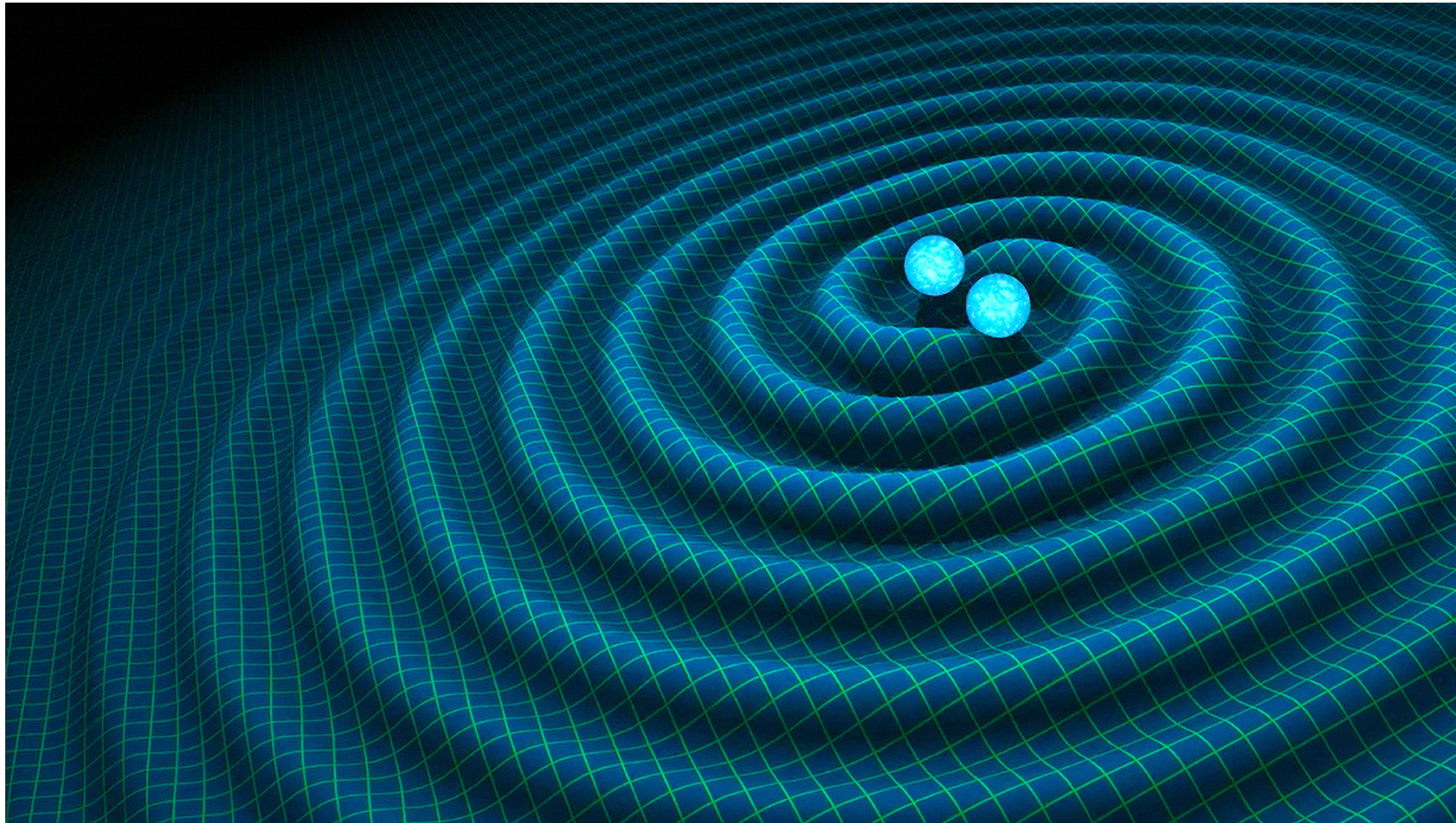
$$Ricg - \frac{1}{2} sg = 8\pi T,$$

$Ricg$ e sg denotano rispettivamente la **curvatura di Ricci** e la **curvatura scalare** della metrica g ;

T è il **Tensore Energia Impulso**, un tensore di rango 2 che contiene tutta l'informazione proveniente dalla fisica, in particolare dalla materia.

Einstein descrive l'equazione come un monumento composto da **marmo pregiato** (la parte sinistra che riguarda la geometria) e da **legno scadente** (la parte destra che riguarda la materia). Su questa parte "di legno" lavorano i fisici, come falegnami intagliando un modello dello spazio. Lui stesso si pose alla ricerca di una buona formalizzazione del tensore T , tutt'oggi ancora lontana da essere raggiunta.

Le onde gravitazionali



Le formule dell'universo

...tutto ruota attorno a π

- Archimede

$$A_{\text{Sfera}} = 4\pi r^2$$

- Gauss

$$K \cdot A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

- Einstein

$$8\pi T = Ricg - 1/2 \text{ } sg \text{ } g$$

*che la somma degli angoli interni di un triangolo non possa essere **meno di 180 gradi**; questo è il vero nodo, la barriera contro cui tutto si scontra. ... L'ipotesi che la somma dei tre angoli sia più piccola di 180 gradi conduce ad una geometria molto diversa dalla nostra (euclidea), che è consistente [in sich selbst durchaus consequent ist], e che ho sviluppato in maniera così soddisfacente da risolvere ogni questione eccetto una, che riguarda la determinazione di una costante non apparente a priori.*

*Più grande si prende questa costante più ci si avvicina alla geometria euclidea, all'infinito le due geometrie coincidono. I teoremi in questa geometria possono sembrare paradossali e, ai non esperti, privi di senso.... Tutti i miei sforzi per trovare una contraddizione o una inconsistenza [Inconsequenz] interna in questa **geometria non euclidea** sono stati vani. ...*

Sappiamo davvero molto poco, o nulla, della vera natura dello spazio e possiamo dunque confondere ciò che ci appare innaturale con qualcosa di assolutamente impossibile. Se la geometria non-euclidea fosse la geometria vera e se la costante fosse comparabile alle grandezze che misuriamo in terra o in cielo allora essa potrebbe essere determinata a posteriori. Per questo, occasionalmente e per scherzo, ho espresso la possibilità che la geometria euclidea non sia la vera geometria....

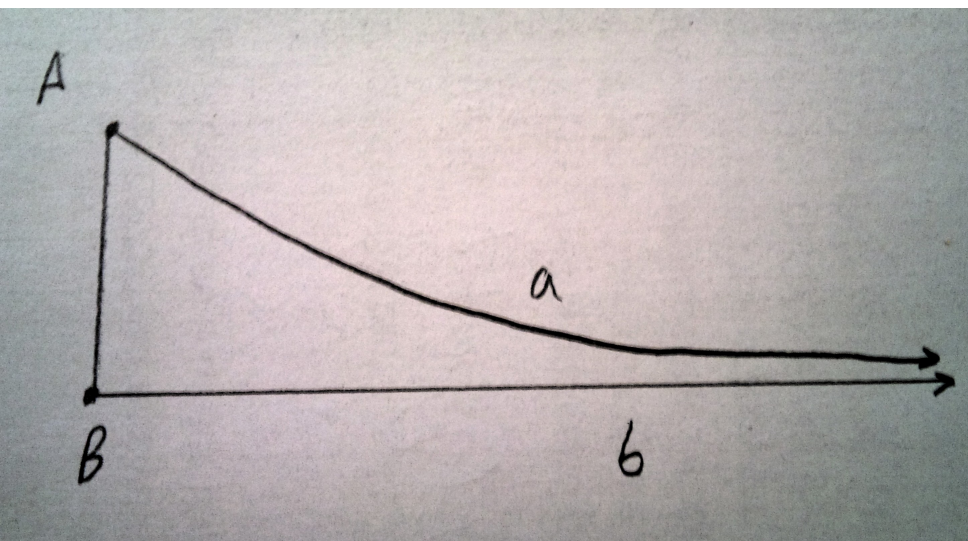
...Ho consolidato ulteriormente molte cose, tra le quali la convinzione che non si possa stabilire completamente la geometria a priori. ...Dobbiamo con umiltà ammettere che, mentre il numero è un puro prodotto della nostra mente, lo spazio ha una realtà fuori dalla nostra mente, pertanto non possiamo prescrivere le sue leggi a priori.



Nikolai Ivanovitch Lobatchevski 1792-1856

Una *geometria immaginaria*
senza il quinto postulato e con un *angolo di parallelismo*

Seguace di Francis Bacon vuole dare evidenza empirica alla sua geometria e quindi la utilizza per mostrare che il nostro sistema solare deve essere molto piccolo.



Prende un triangolo con lato AB uguale al raggio dell'orbita terrestre a con vertice opposto la stella Sirius. Calcola il rapporto tra la lunghezza di AB e la distanza da Sirius (ma usa un numero sbagliato per il parallasse di Sirius, che è l'angolo in A)



Eugenio Beltrami 1835-1900

Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea (1868).

In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria. Questi concetti non sono di data recente, il sommo Gauss li aveva abbracciati fino dai suoi primi passi nella carriera delle scienze, e benché nessuno dei suoi scritti ne contenga l'esplicita esposizione, le sue lettere fanno fede della predilezione con cui li ha sempre coltivati e attestano la piena adesione che ha data alla dottrina di Lobatschewky.

Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante 1868

In una Memoria inserita nel t. VII della prima serie di questi (Roma 1866) ho cercato le superficie dotate della proprietà di avere linee geodetiche rappresentate da equazioni lineari, ed ho trovato che proprietà si verifica per le sole superficie di curvatura costante e per variabili speciali che l'analisi del problema ha spontaneamente intro-

Nel presente scritto espongo i risultati molto più generali a cui condotto l'ulteriore evoluzione di quel concetto, coordinato ad alcuni cippi tracciati da RIEMANN nell'insigne suo lavoro postumo: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, non ha guari pubblicato dal sig. DEDEKIND nel XIII volume delle Memorie di Gottinga. che le mie ricerche possano aiutare l'intelligenza di alcune parti di profondo lavoro.

Certe locuzioni di cui per amore di brevità faccio uso frequente non ranno, io credo, nè stentate nè oscure a chi guardi più alla sostanza alla forma. L'attento lettore non avrà da fare alcuno sforzo per intendersi senz'altra spiegazione, restandogli del resto piena facoltà di non attribuir loro che un significato meramente analitico.

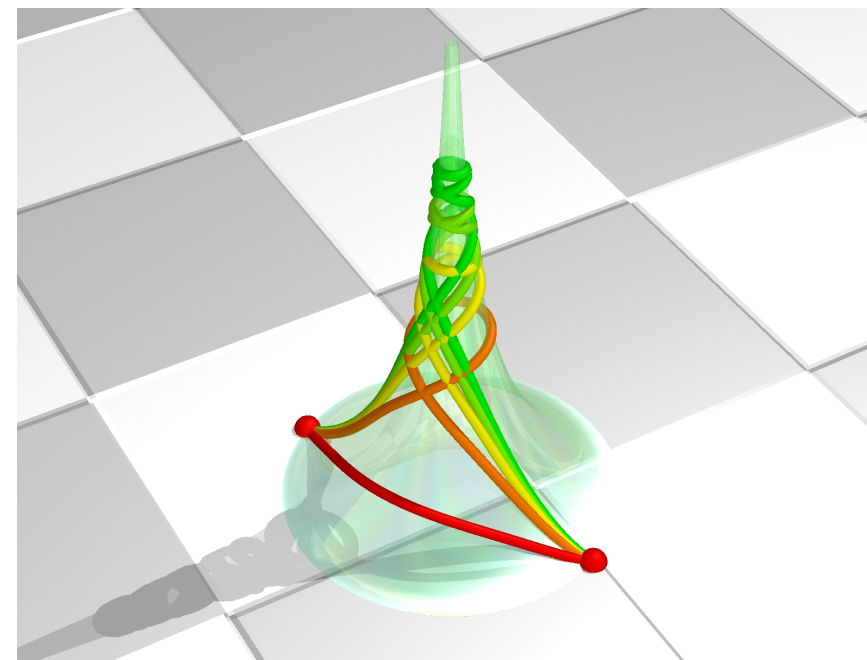
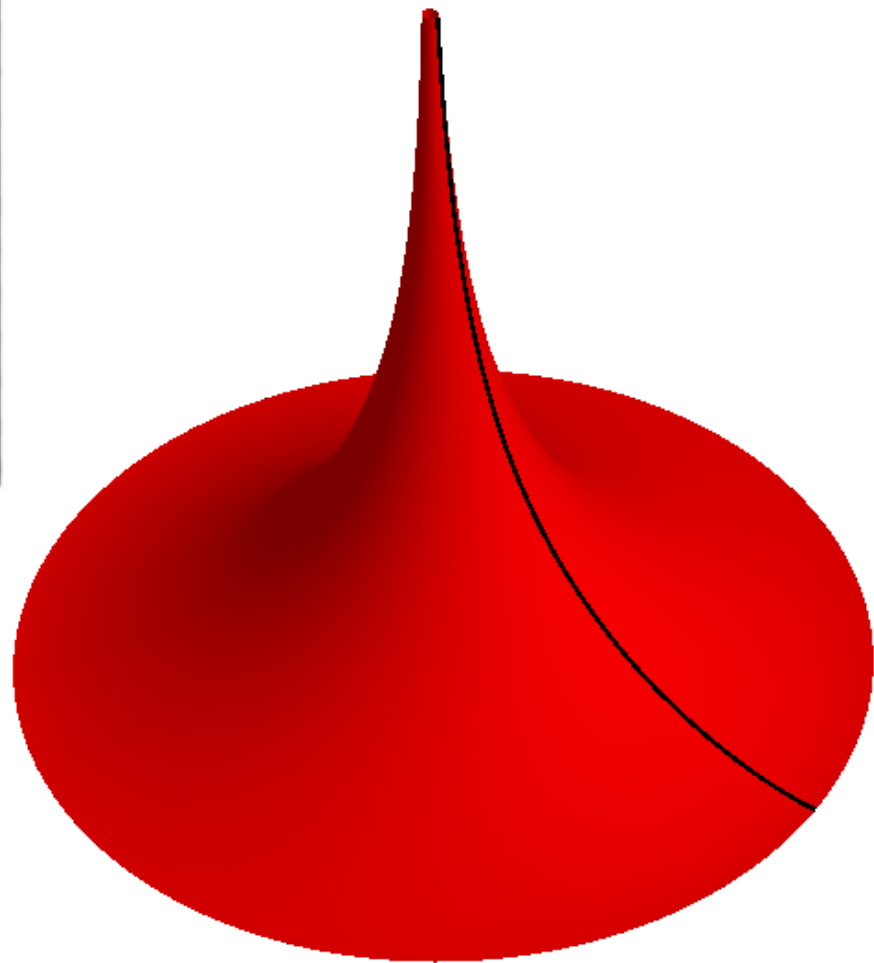
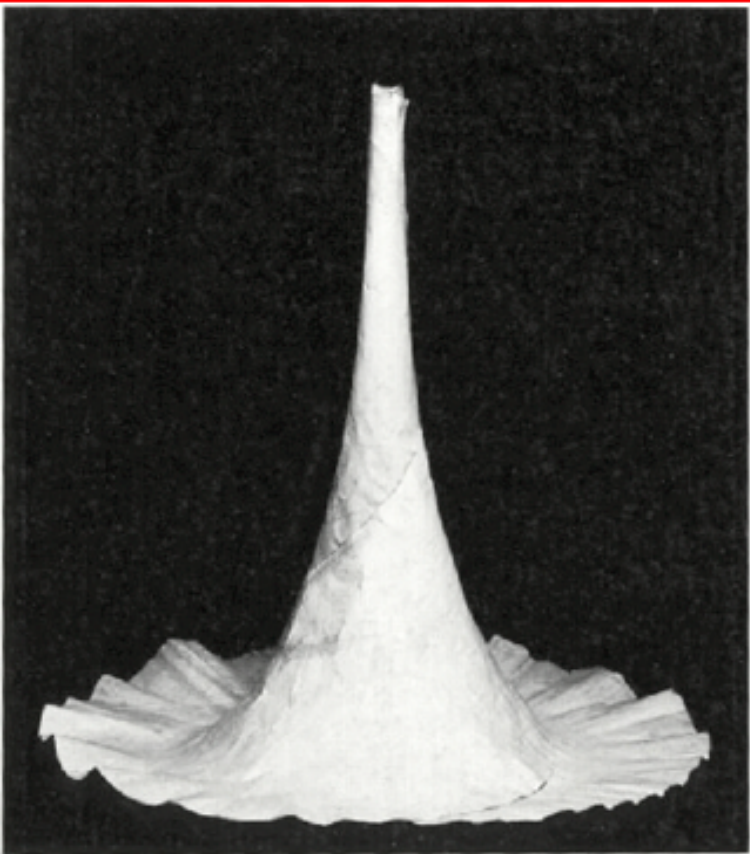
L'espressione differenziale

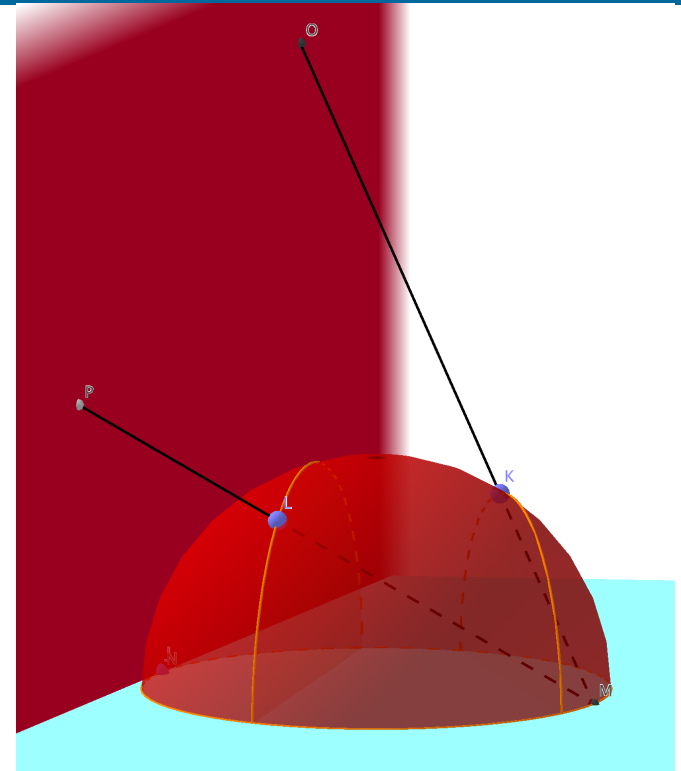
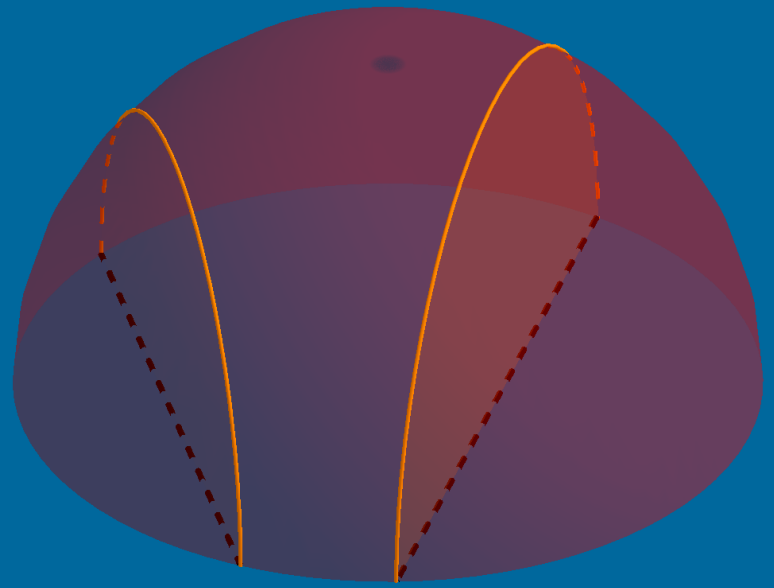
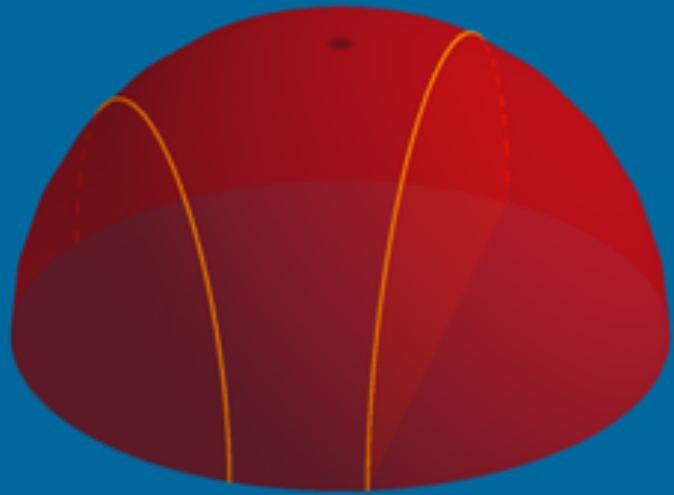
$$ds = R \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}}{x},$$

dove x, x_1, x_2, \dots, x_n sono $n+1$ variabili legate dall'equazione

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2,$$

Beltrami.





Geometria Proiettiva

Prologo

Corso di Geometria A

Marco Andreatta



Giotto 1267 1337

A partire dalla sua
pittura lo spazio viene
raffigurato come un
"corpo cavo", dove la
profondità non è più
data dall'intensità
degli sguardi dei
soggetti, ma dalla
prospettiva, che
diventa misurabile,
appunto perché
geometrica,
matematica. Giotto
appare come un
architetto che
dipinge.

La prospettiva lineare unificata

Filippo Brunelleschi 1377-1446

un metodo razionale da applicare alla raffigurazione figurata delle forme nello spazio per renderla illusionisticamente verosimile ed obiettiva.

Le tavolette del 1416

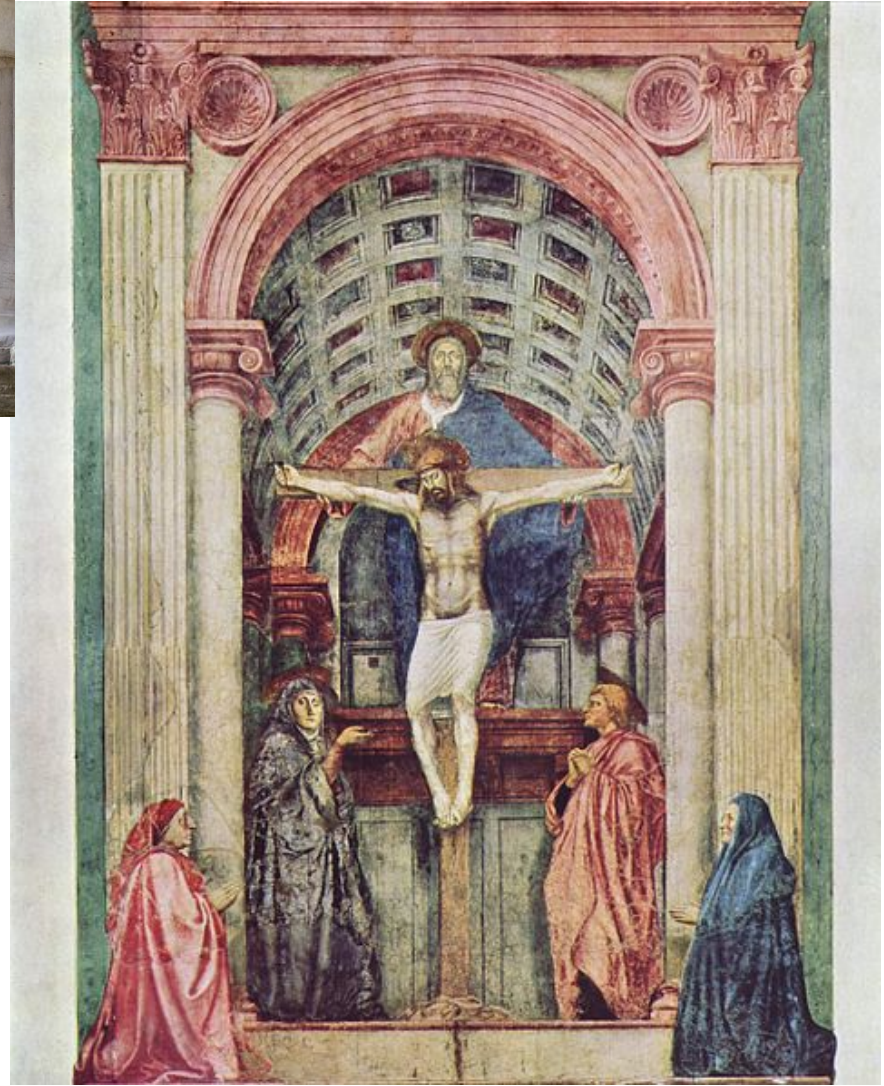
Masaccio 1401 – 1428

Donatello 1386 - 1466



Donatello 1386 - 1466
San Giorgio e il drago 1416

Masaccio 1401 - 1428



Battaglia di San Romano 1438 - Paolo Uccello



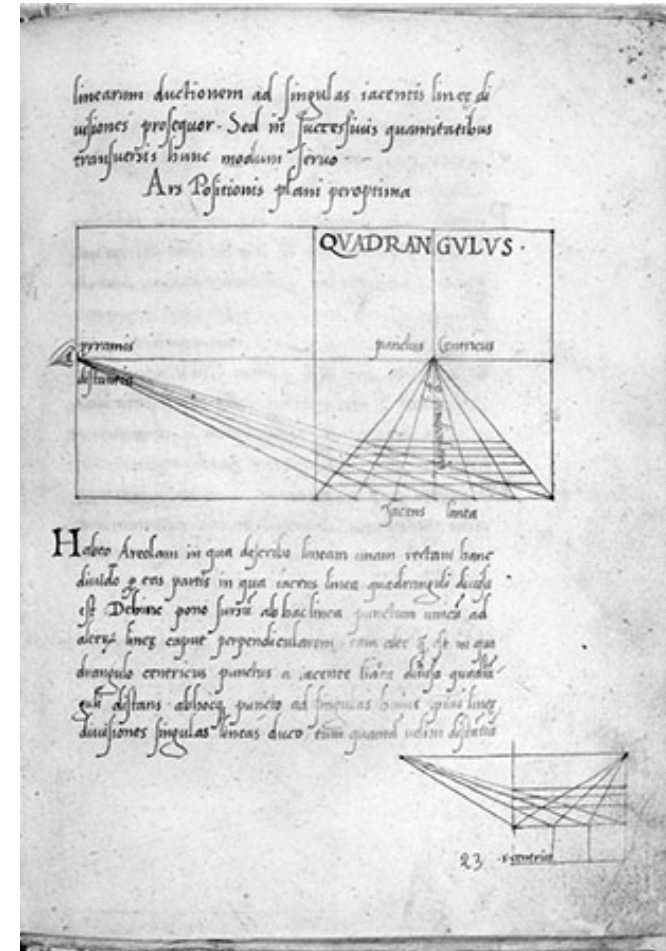
La città ideale 1480-90, Piero della Francesca

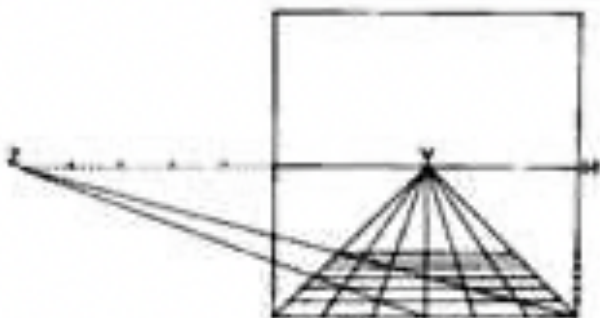
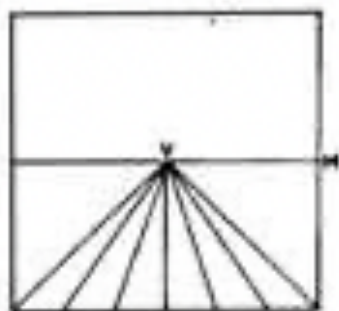


Leon Battista Alberti 1404-1472 1435



De Pictura





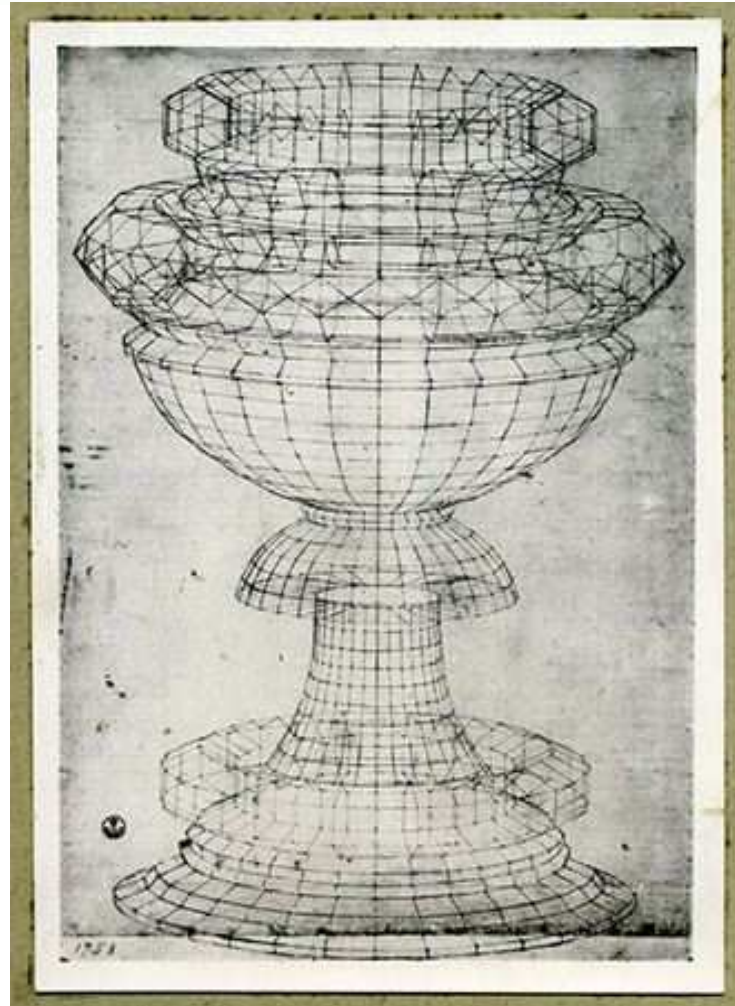
Piero (d. F.) 1420-1492
1482



De prospectiva pingendi
1482



Piero o Paolo

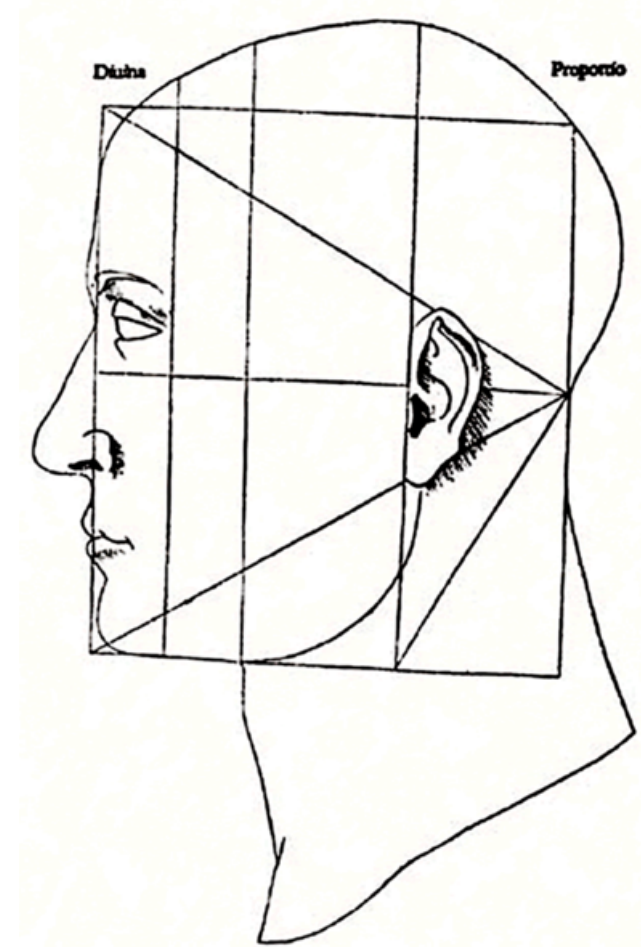
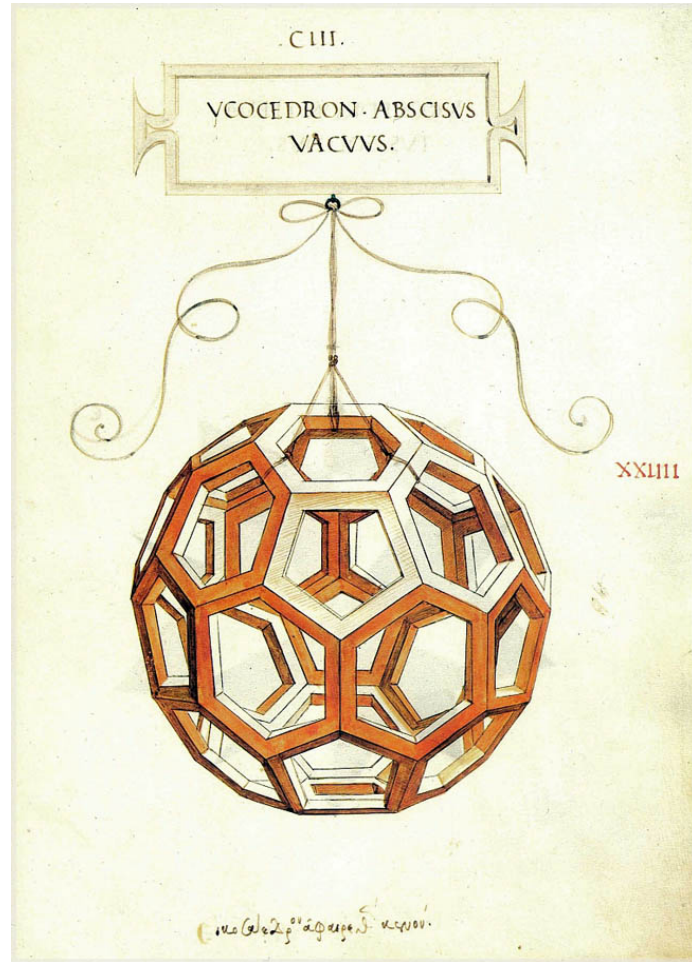




Luca Pacioli 1455-1517

De Divina Proportione 1497

stampato a Venezia nel 1509 da Paganino Paganini



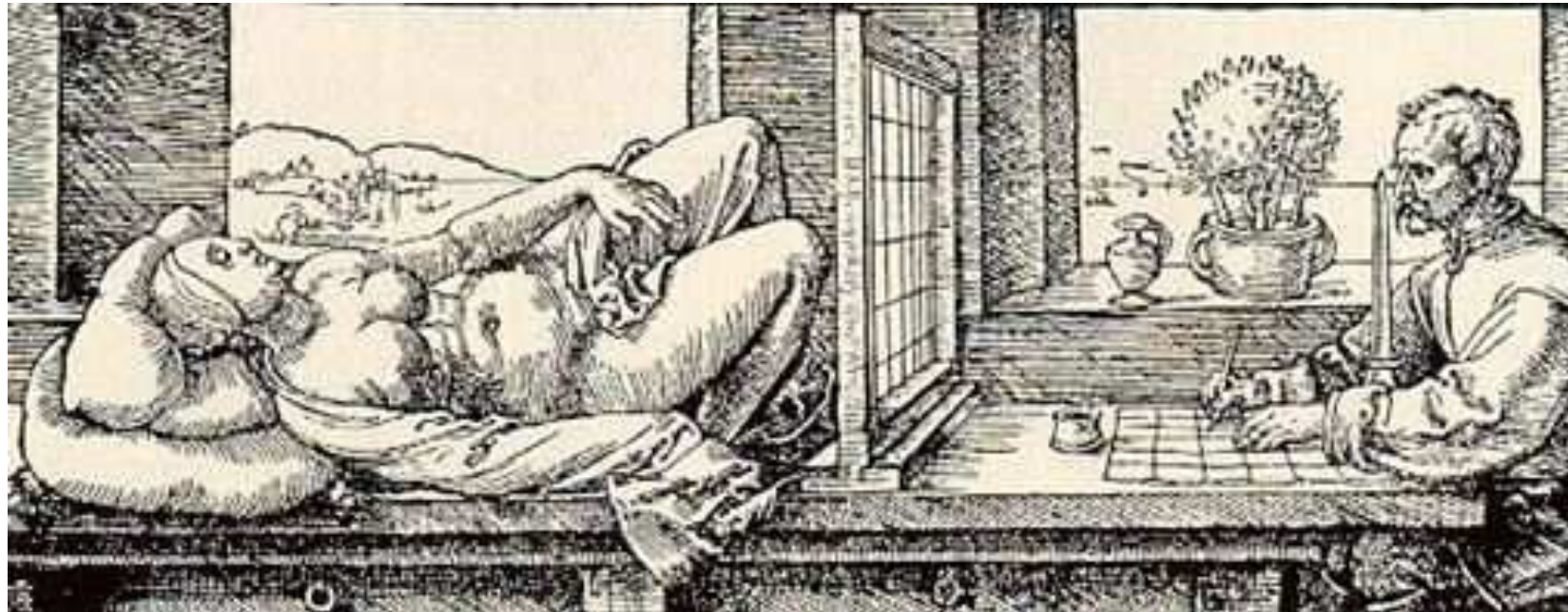
Disegni di Leonardo da Vinci



Albrecht Dürer 1471-1528



Albrecht Dürer



Albrecht Dürer

Norimberga 1471-1528

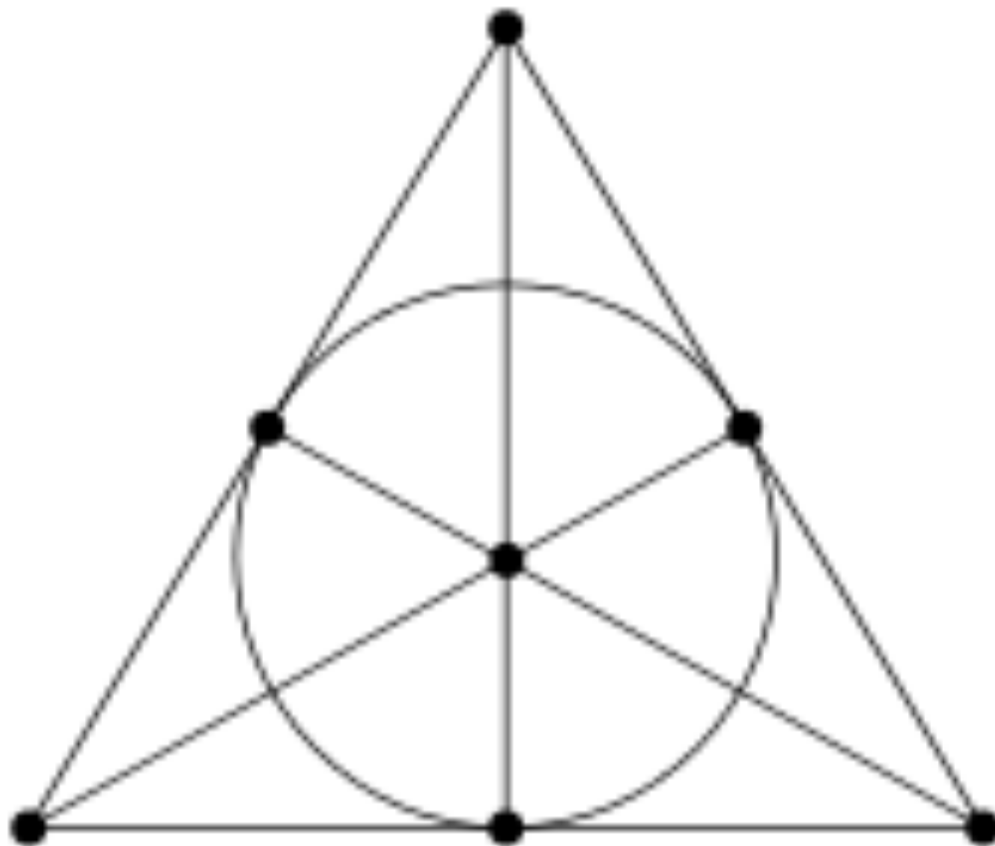
Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit
inizio '500, primo libro di scienze in tedesco.

Girard Desargues 1591 - 1661

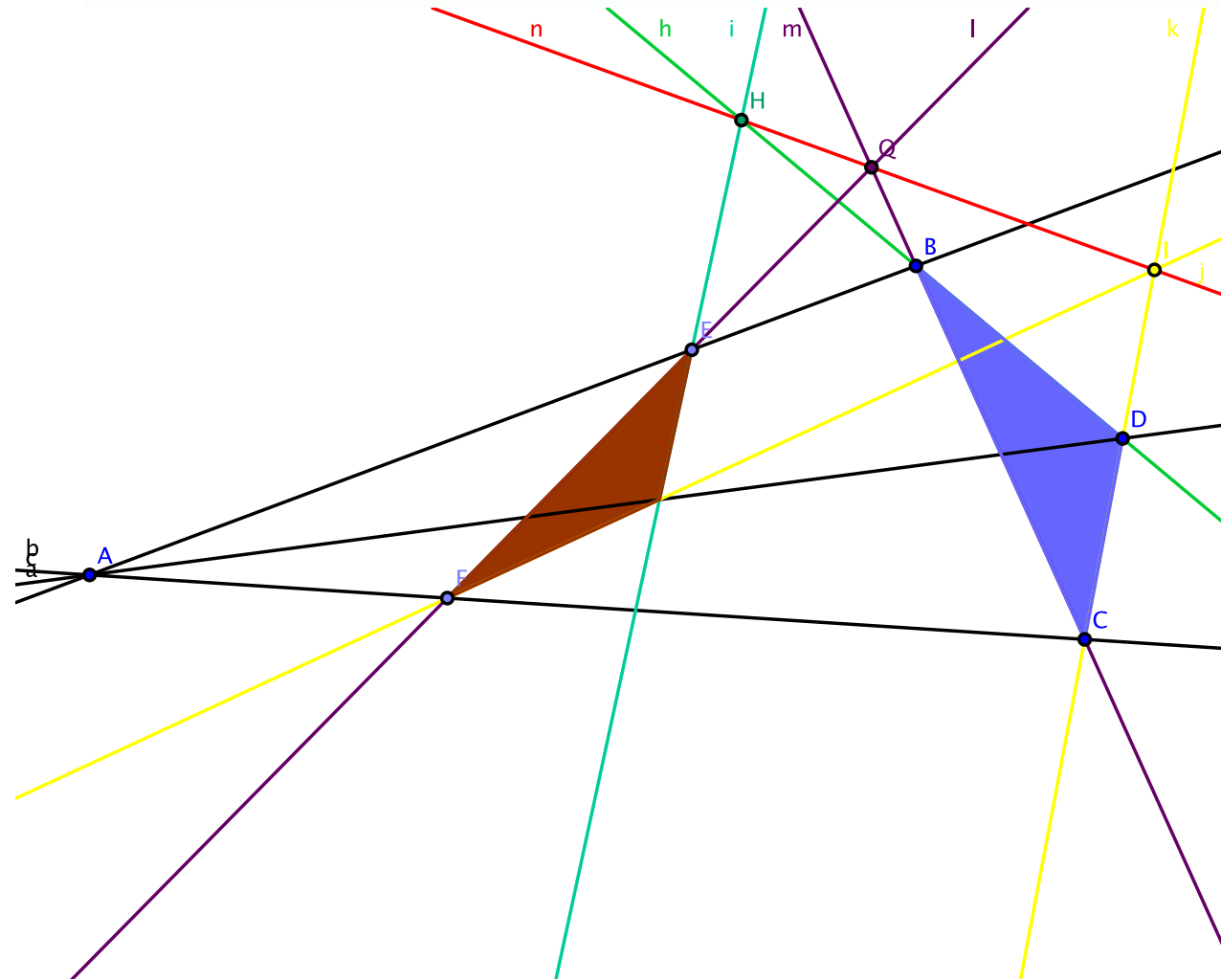
Assiomi di Desargues

- Due punti individuano una e una sola retta
- Due rette individuano uno e un solo punto

Piano di Fano (1871 – 1952)



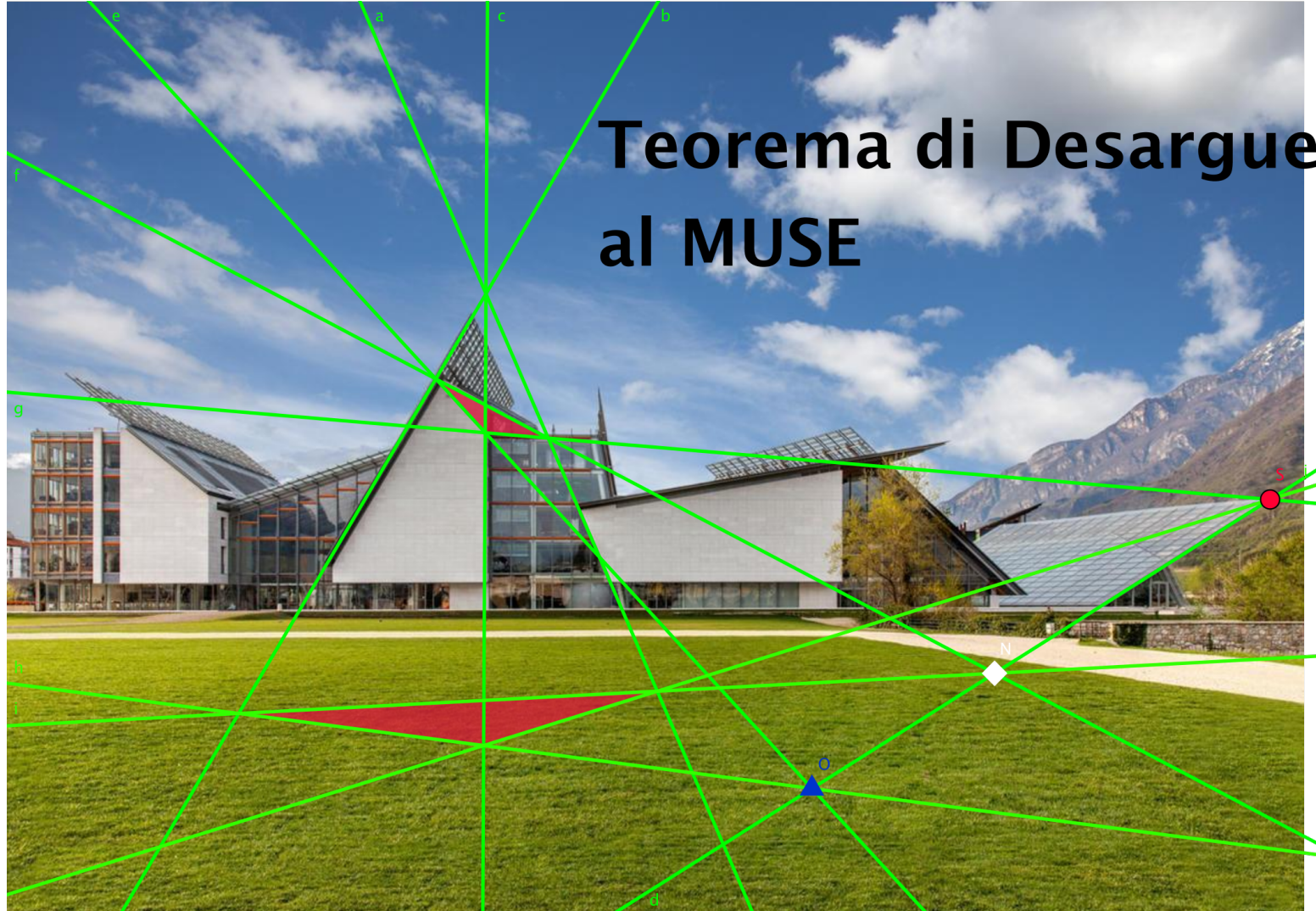
Teorema di Desargues (1591-1661)

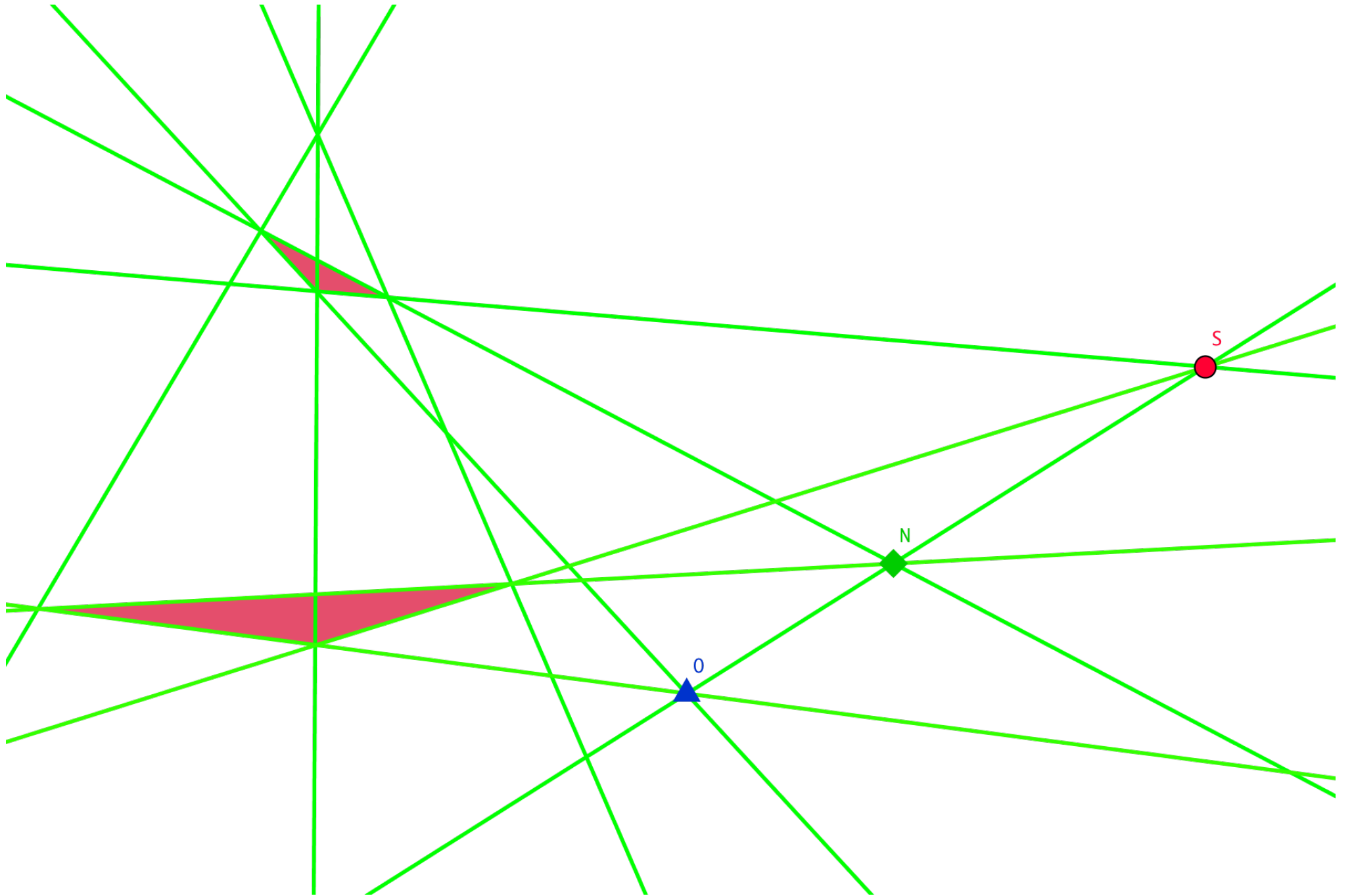


Renzo Piano: il MUSE



Teorema di Desargue al MUSE





Andrea Pozzo



Trento 1642
Vienna 1709

Perspectiva pictorum
et architectorum

Prospettiva invertita delle icone

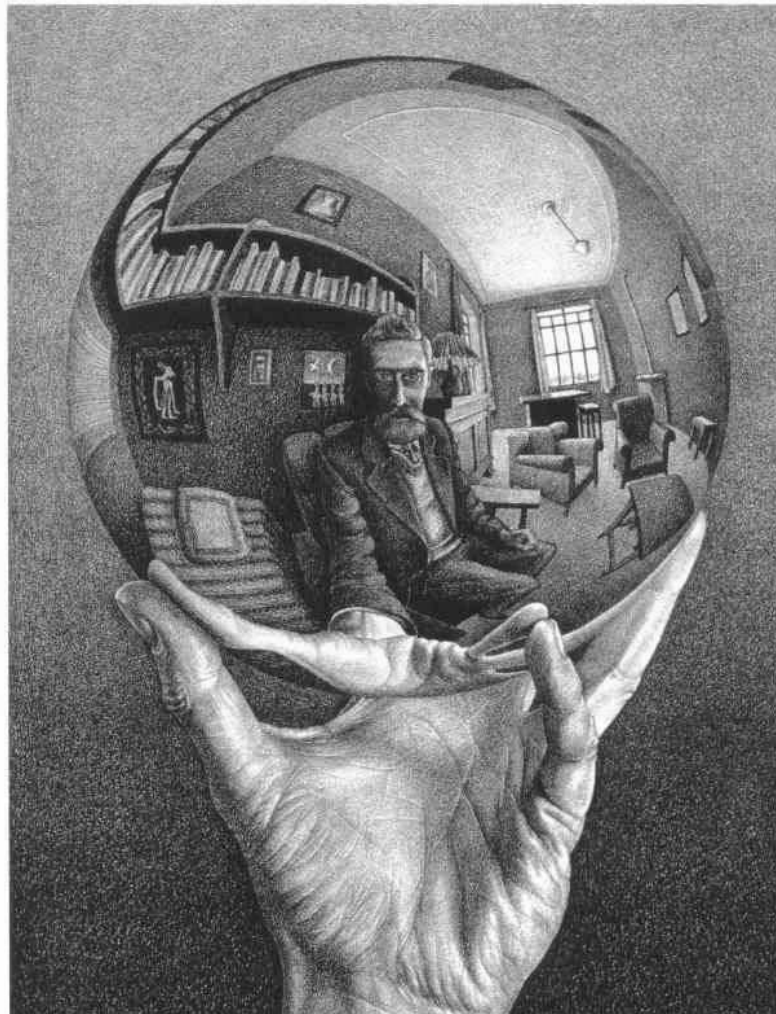


Andrej Rublëv 1410



Chiesa di Ohrid 1350

Esche



Maurits Cornelis Escher
1898 - 1972



F. Klein 1849-1925

Vergleichende Betrachtungen
über
neuere geometrische Forschungen

von
Dr. Felix Klein,
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Programm

zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat
der k. Friedrich-Alexanders-Universität
zu Erlangen.

Erlangen.

Verlag von Andreas Deichert.
1872.



Guido Castelnuovo 1865-1952



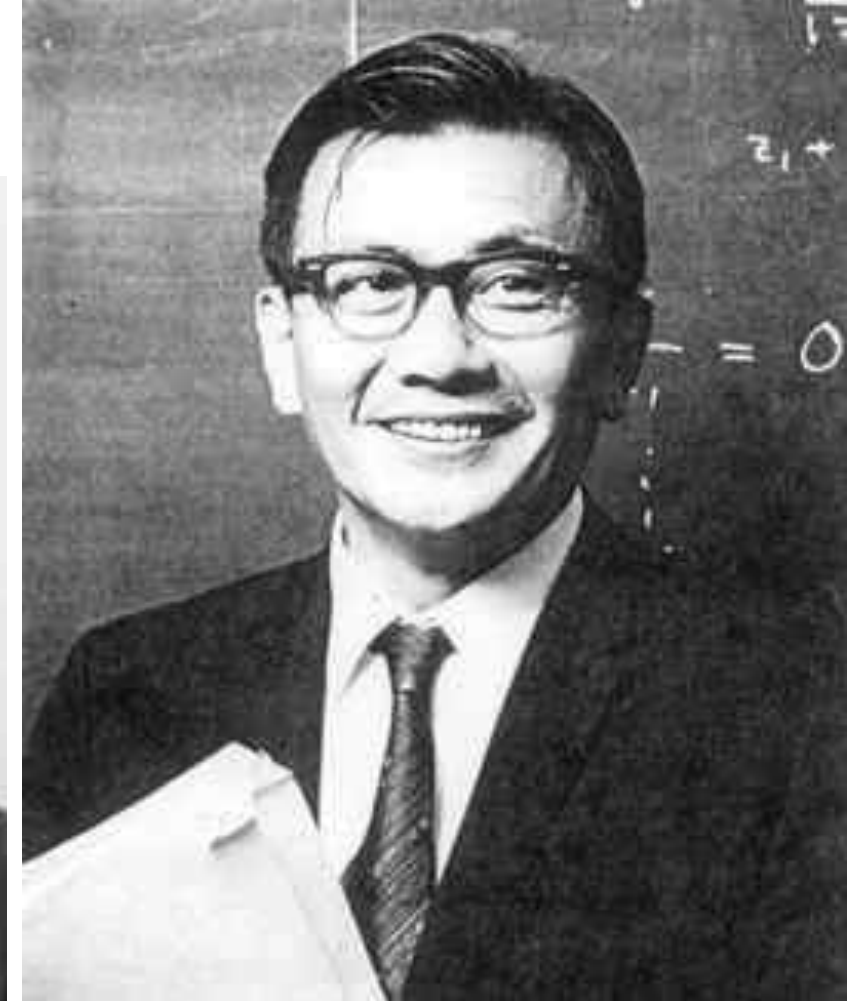
Federigo Enriques 1871-1946



Oscar Zariski 1899-1986



Igor R. Shafarevich 1923-2017



Kunihiro Kodaira 1915-1997



André Weil 1906-1998



Alexander Grothendieck 1928-2014



David Mumford 1937-

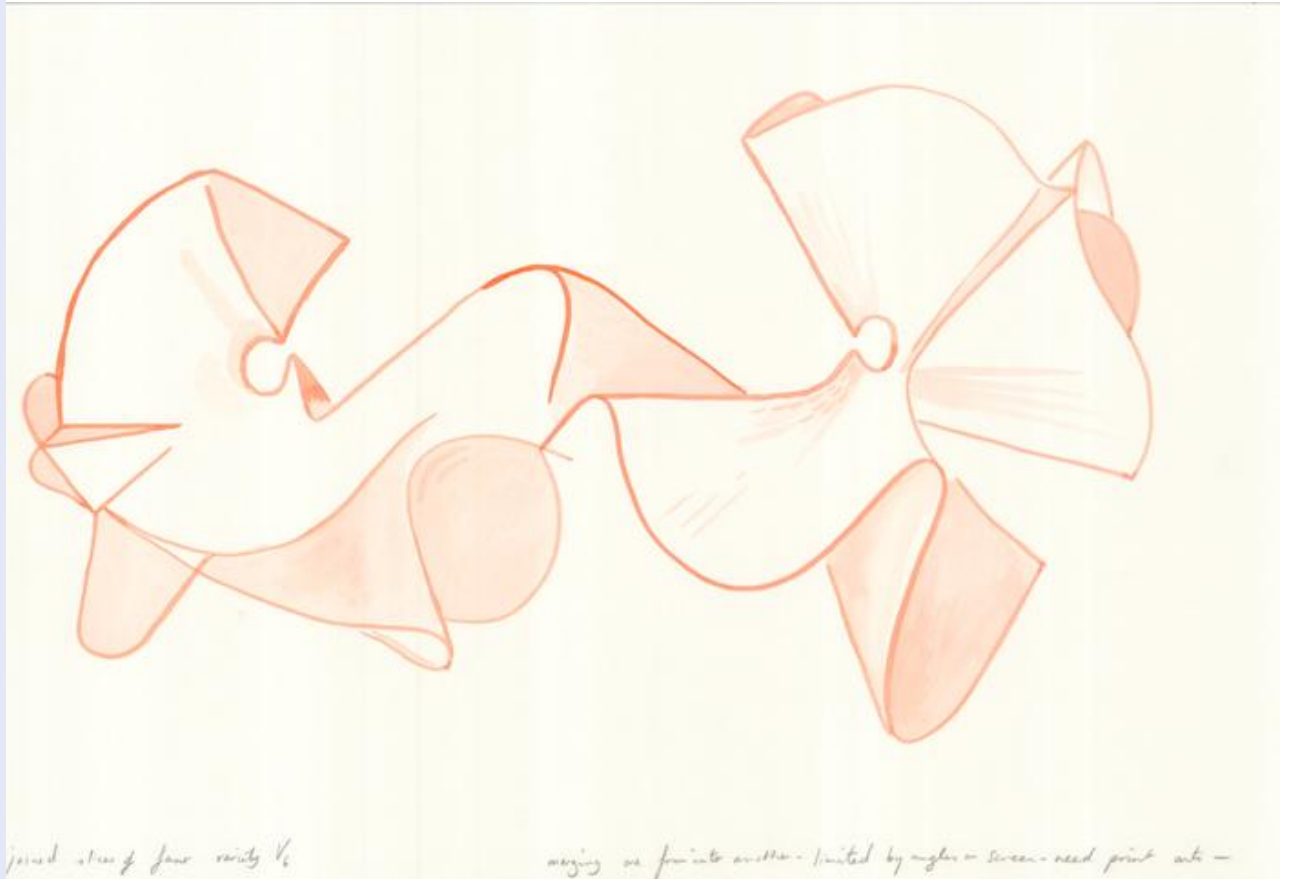
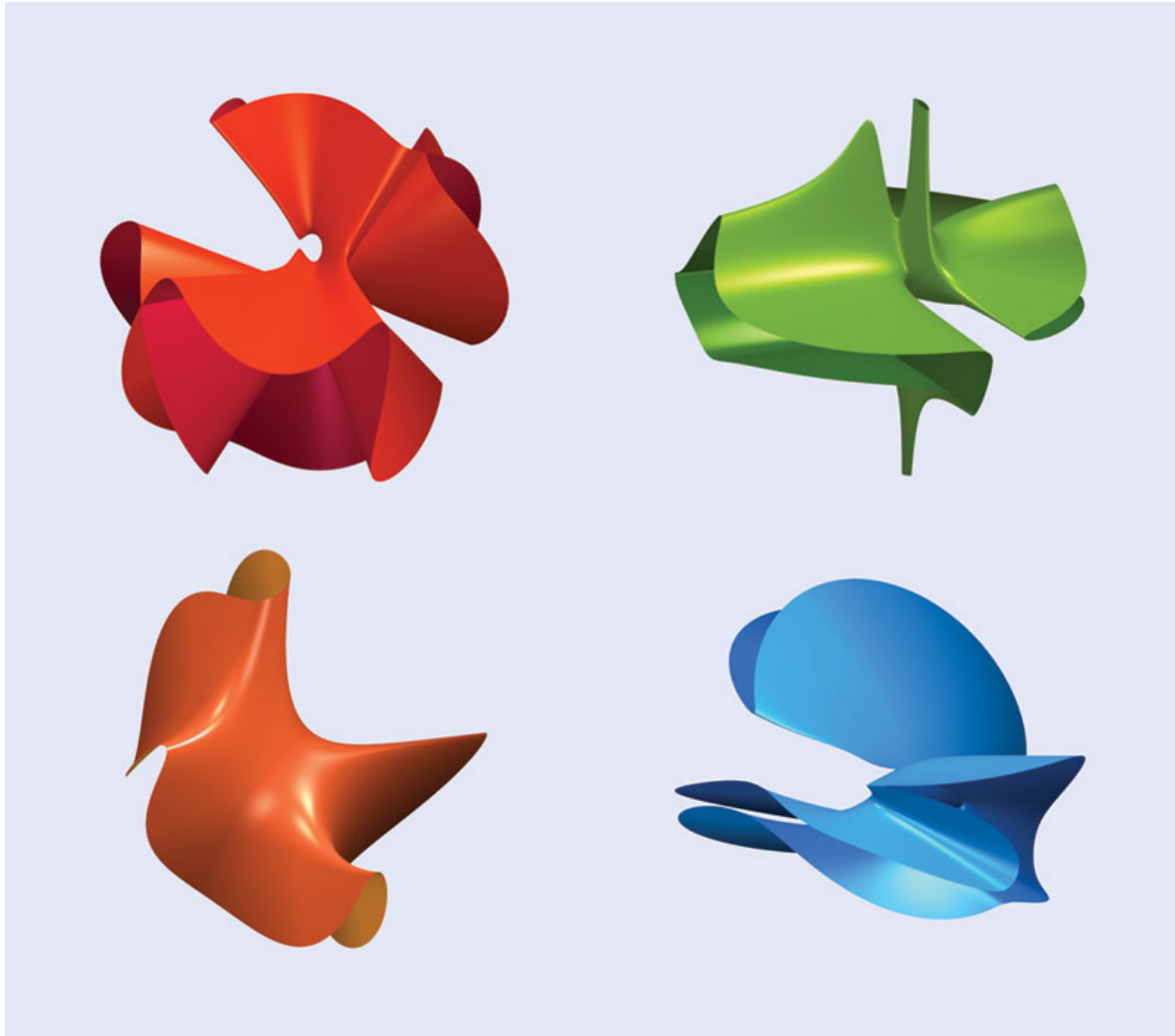


Enrico Bombieri 1940-

Gino Fano 1871-1952



Fano varieties





Pasquale del Pezzo 1859-1936

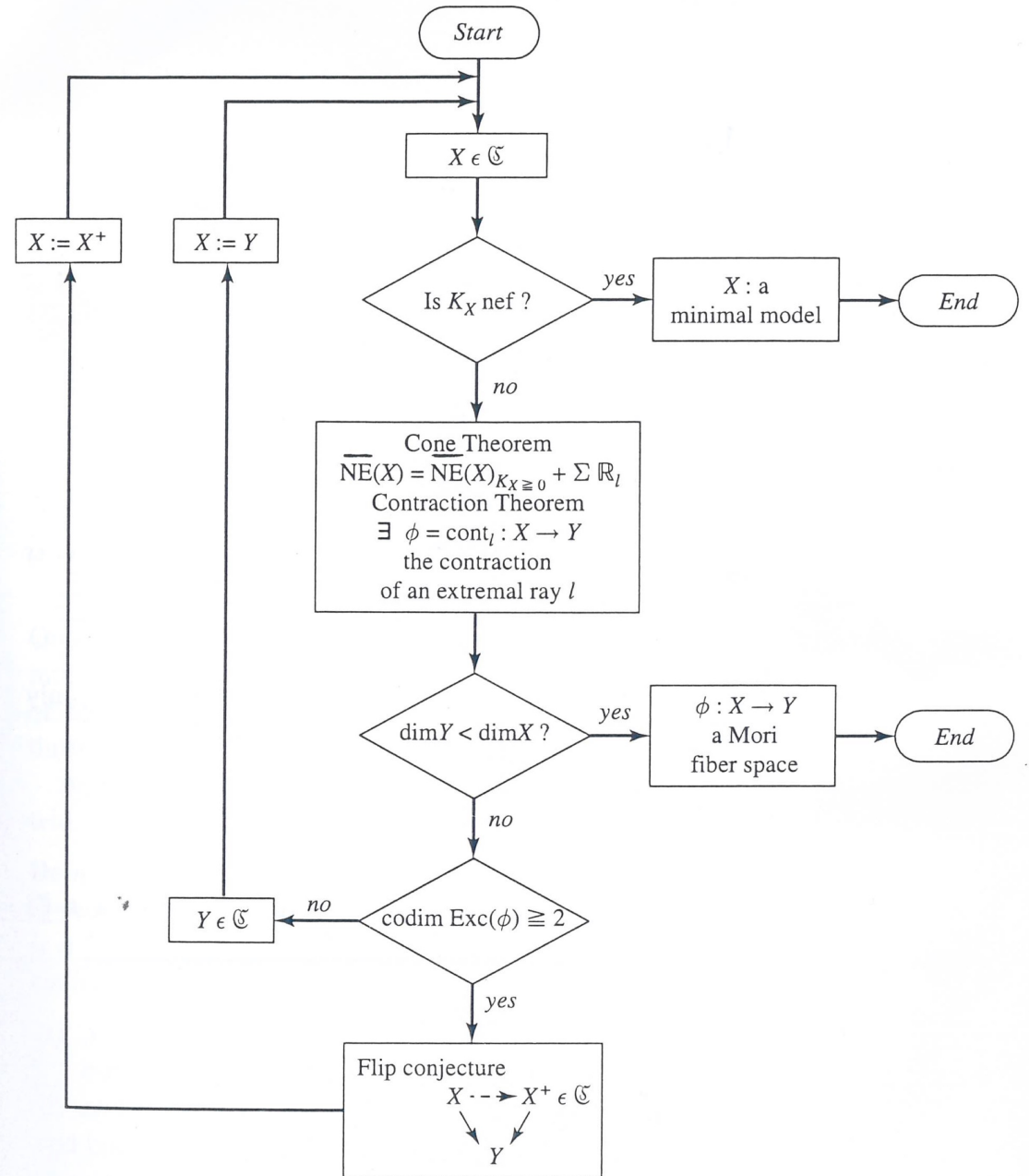


Heisuke Hironaka 1931 -

Sighefumi Mori 1951-

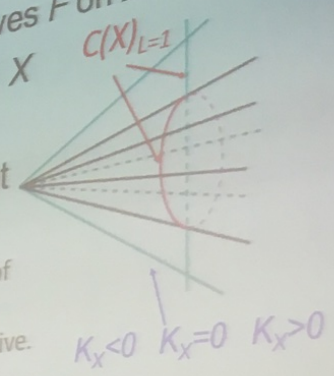


Minimal Model Program in Dimension 3 or Higher (in Arbitrary Dimension)



Kleiman's Cone of curves

- Cone, $C(X) \subset \mathbb{R}$ -v.s. $H_2(X, \mathbb{R})$ spanned by the classes $[F]$ of curves F on X .
- $C(X)$ is an **invariant** of X
- X is **projective** iff \exists a divisor L s.t. $C(X)_{L=1}$ cpt (Kleiman).

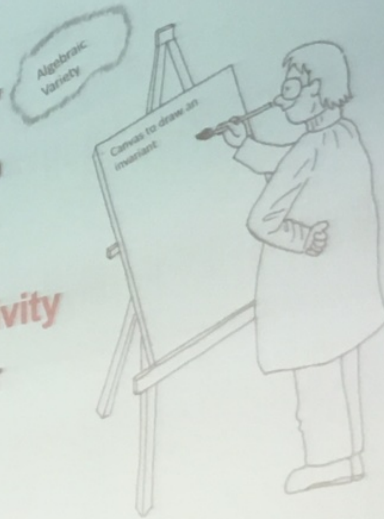


The class $[F]$ of a fiber F of $f: S \rightarrow C$ must be on the bdry of $C(X)$ if Y is projective.



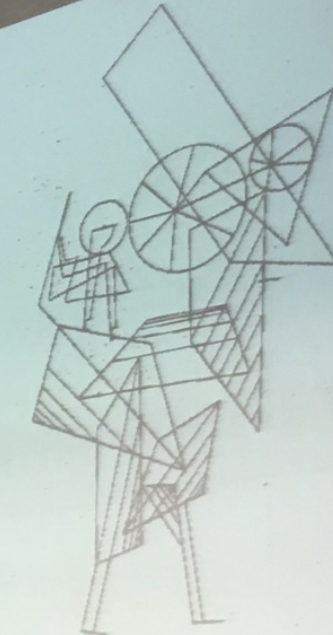
Invariant and CUBISM

- Geometers study figures via **"invariants"**
 - **Invariants** are similar to abstract paintings but, unlike arts, needs **objectivity & reproductivity**
 - An invariant defined for each figure
- This corresponds to **CUBISM** in paintings.



Paul Klee

- Paul Klee (1879-1940)
- "Art does not reproduce what one can see but makes seeable what one cannot see" (1920)



Lenient grandpa (1930)

James McKernan - Christopher Hacon

Breakthrough Prize 2018 Ceremony:

<https://www.youtube.com/watch?v=sul1OZrtMgl&list=PLyF3OMOIy3nGMQbSgIP-6E7wNA3AH4NRM>

vedi anche: <https://breakthroughprize.org/>

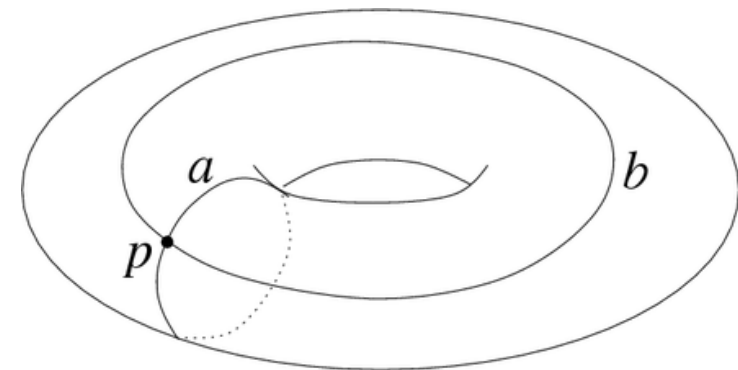
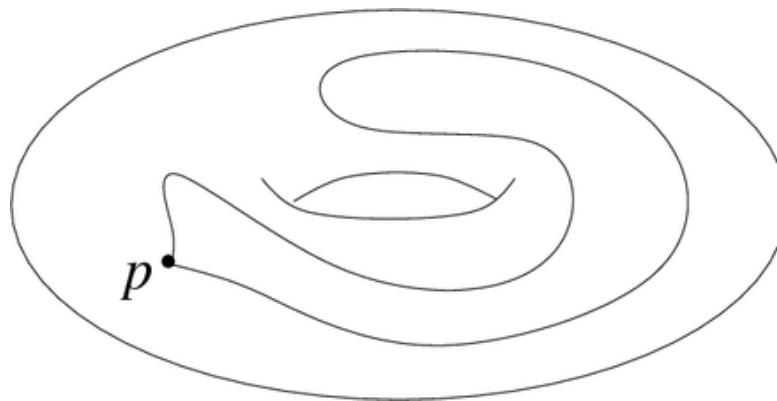
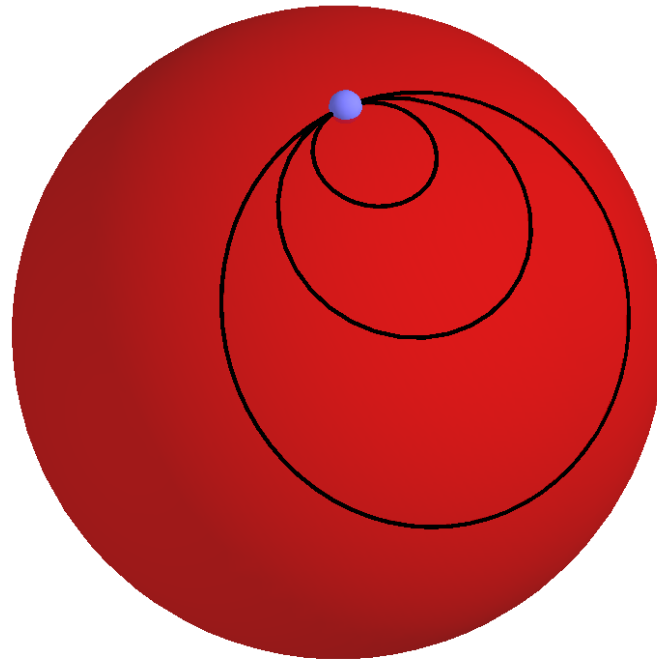
Caucher Birkar:

Fields Medal 2018: «For the proof of the boundedness of Fano varieties and for contributions to the minimal model program»

https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Fields/2018/CAUCHER_FINAL.mp4



Henry Poincaré 1854-1912

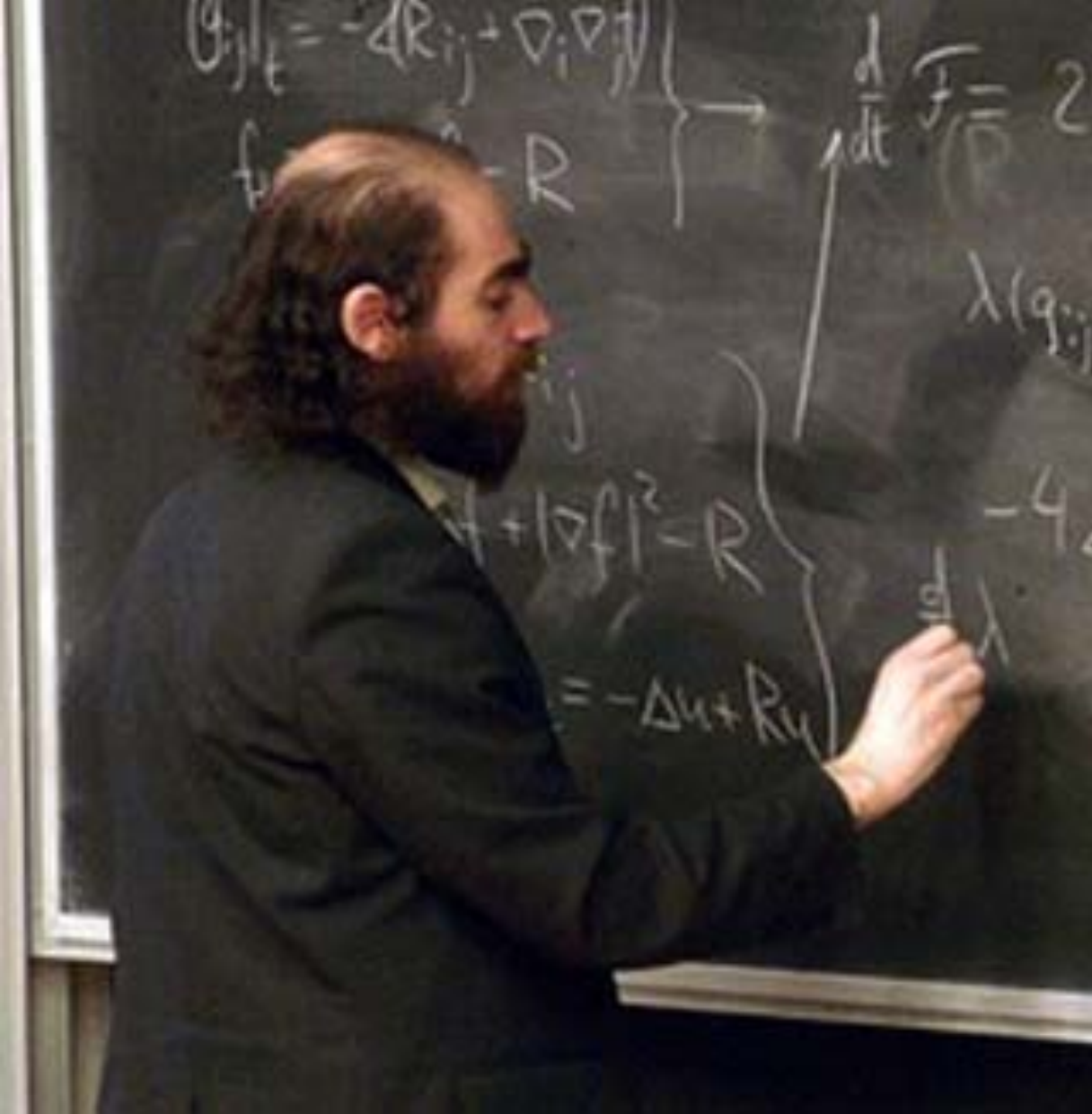




Richard Hamilton 1943-



Shing-Tung Yau 1949-



Gregoriy J. Perel'mann 1966-

Nel 2006 a Perelman viene assegnata la Fields Medal: *per i suoi contributi alla geometria e la sua visione rivoluzionaria della struttura analitica e geometrica del flusso di Ricci.*

Rinuncia alla medaglia, spiegando: *è totalmente irrilevante e chiunque può capire che se la prova è corretta nessun altro riconoscimento è necessario.*