Prima edizione: aprile 1965
Dodicesima edizione: luglio 1977

Lucio Lombardo-Radice

Istituzioni di algebra astratta

con "Esercizi e complementi"
a cura di V. Corbas e G. Panella

Edizione riveduta

Feltrinelli

Prefazione

Questo libro non è stato scritto per i colleghi universitari e per i ricercatori matematici: è stato scritto, innanzitutto e soprattutto, per gli studenti del primo anno del corso di laurea in matematica, per i quali è previsto, a partire dal 1961-62, un esame " fondamentale " di algebra. (Di altre categorie di Lettori che questo libro ambirebbe avere, si dirà tra un momento.)

Questa prefazione, invece, è scritta per i colleghi dell'Università e per gli altri matematici di professione, cioè per coloro che conoscono già gli argomenti trattati nel libro (tutte le prefazioni, del resto, sono scritte di necessità in un meta-linguaggio rispetto al linguaggio del testo). Sento infatti il bisogno di dare ai colleghi e " correligionari " matematici di professione qualche spiegazione preliminare.

Non mi preoccupano le imperfezioni, che so e immagino numerose. Non sono un " perfezionista ": preferisco una tempestività efficace a una messa a punto che faccia perdere a un'opera il suo momento. Se questo mio libro, come spero, ha in sé qualche motivo di validità, meriterà una seconda edizione; e allora potrò farne una revisione davvero efficace, perché lo avrò letto non solo con gli occhi miei e con quelli dei miei collaboratori immediati, ma con quelli del pubblico al quale è destinato, e dei colleghi matematici che avranno voluto servirsene. Se, invece, questo mio libro non andrà avanti, ciò accadrà per sua intrinseca debolezza; neanche la piú esauriente messa a punto di ogni minuto particolare lo avrebbe potuto salvare dalla sua sorte.

Nel presentare questo mio libro ai colleghi matematici voglio rispondere innanzitutto a una domanda che è legittimo fare, e che io mi sono posta piú volte: " perché non utilizzare uno degli ottimi manuali stranieri di algebra astratta oggi esistenti, invece di scrivere delle istituzioni italiane che si riconoscono in partenza cariche di imperfezioni?"

Non ho creduto il caso di fare una bibliografia dei testi d'algebra stranieri che ho consultato : volta a volta ho atto citazioni, in modo da invogliare il

Lettore a ricercare questa o quell'opera. Dirò qui soltanto che mi sono stati particolarmente utili tre algebristi di grande classe, con le loro numerose opere didattiche: il francese Dubreil, l'americano Jacobson, il sovietico Kuroš. E, naturalmente, come per tutti i matematici della mia generazione, fondamentale nella mia prima formazione culturale di algebrista è stato il trattato dell'olandese van der Waerden. Perché non adottare una delle magnifiche opere di questi (o di altri) insigni autori come testo per gli studenti italiani del primo anno di matematica?

Non escludo che nella mia decisione di scrivere, malgrado ciò, un nuovo testo, non abbia giocato (inconsciamente) il gusto e l'ambizione di "faire le livre." Credo però abbiano prevalso motivi impersonali e razionali, che passo ad esporre.

È vero, sí, che la ricerca scientifica ha carattere internazionale e che — al livello della ricerca e della "cultura di frontiera" dalla quale la ricerca parte — siamo tutti cittadini della stessa polis matematica, e non piú italiani o americani o francesi o russi. Se, però, non esiste una ricerca matematica nazionale, esiste — io credo — una didattica con un'impronta e una tradizione nazionale. Si scrivono Note e Memorie per lettori apolidi (o, se si vuole, per lettori cosmopoliti); si scrivono libri di testo per cittadini di un paese, per giovani allievi di una scuola nazionale, che possiedono una lingua e una tradizione culturale.

A 18 anni, un giovane o una ragazza si disorientano e si scoraggiano facilmente se, entrando all'Università, si trovano di fronte a un linguaggio, a un discorso, a una mentalità del tutto nuovi. La connazionalità — che è un fatto culturale, e non solo linguistico — offre le migliori condizioni per comprendere le difficoltà reali dei giovani di fronte a nuovi studi. Il fatto che questo volume sia basato sulle esperienze di tre corsi di algebra, di qualche centinaio di esami; il fatto che esso abbia raggiunto la forma attuale dopo due stesure intermedie, discusse a fondo con i miei assistenti; la partecipazione alla riunione nazionale indetta dal Conarm a Pisa per esaminare e dibattere i problemi del nuovo insegnamento — tutto ciò non rende in alcun modo questo libro migliore di tanti analoghi testi stranieri; può essere però che lo renda piú adatto alla formazione matematica dello studente italiano di oggi, migliore hic et nunc.

Tuttavia, la ragion d'essere piú profonda di questo libro è un'altra. E non è una ragione interna alla matematica: è, piuttosto, il problema della collocazione della matematica nella cultura.

Se avessi pensato (se pensassi) che la matematica è solo tecnica e non anche cultura generale; solo calcolo e non anche filosofia, cioè pensiero valido per tutti, non avrei fatto il matematico (non continuerei a farlo). Sono uno dei non pochi intellettuali italiani che, in un succedersi di generazioni, hanno seguito all'Università i corsi di studi di matematica per una "infezione filosofica liceale," come diceva di sé conversando con gli allievi uno dei grandi maestri che ho avuto la fortuna di avere nell'Ateneo romano tra il 1934 e il 1938: Federigo Enriques. All'Università, il maestro che predilessi e prescelsi fu Gaetano Scorza: colui che piú di ogni altro mi sembrò sentire con contenuta passione, e mi fece sentire, la matematica come arte, come filosofia, come pensiero. L'indirizzo di ricerca che decisi di seguire sin dagli anni universitari fu l'algebra astratta, non solo per virtú e per stimolo del maestro Gaetano Scorza, ma perché mi sembrò di vedere concentrata nell'algebra astratta la piú potente "carica" innovatrice di pensiero.

Questo modo (mio come di tanti altri) di essere matematico corrisponde a una tradizione umanistica della matematica, particolarmente forte e consapevole in Italia (fare altri nomi oltre a quelli decisivi nella storia personale di chi scrive sarebbe, all'incirca, scrivere la storia della matematica italiana negli ultimi cento anni). È una tradizione che è, nello stesso tempo, un'antica e spesso drammatica lotta del matematico italiano per affermare — fuori della sua "provincia scientifica" — il valore della sua scienza come cultura e pensiero di tutti.

Questo volume vorrebbe perciò essere un libro di informazione culturale e di formazione mentale da tutti utilizzabile (almeno in parte). Vorrebbe esporre quei fondamenti dell'astrazione matematica di oggi che debbono diventare "senso comune" domani, non diversamente da quanto è accaduto per il principio posizionale nella numerazione. Poiché, allo stato attuale, ritengo che il corso d'algebra del primo anno di matematica sia destinato essenzialmente a far pervenire le menti dei giovani a un certo livello di astrazione coll'introduzione di certi procedimenti mentali standard, ho giudicato possibile scrivere un volume che sia insieme manuale scolastico e libro di "cultura disinteressata." Un "libro da leggere" per curiosità o per esigenza intellettuale e non solo per il dovere di sostenere un esame.

Un libro di aggiornamento della propria cultura professionale e della propria mentalità matematica in vista di una modernizzazione di tutto l'insegnamento matematico, per i colleghi che insegnano negli Istituti di istruzione secondaria. Un libro per arricchire e rinvigorire il proprio pensiero (di sperimentatore naturalista o di indagatore di fenomeni umani) con la conoscenza di alcuni nuovi livelli raggiunti dall'astrazione matematica, cioè di strutture mentali utili — a mio avviso — in ogni tipo di ricerca (utili al "pensare in generale" e non al solo "pensare matematico").

Di un siffatto — e ambizioso — proponimento alcune scelte sono a mio parere conseguenza necessaria.

Prima di tutto, una scelta di linguaggio. Questo è un libro di mate-

matica " discorsivo ": è stato volutamente scelto, per scriverlo, il linguaggio comune.

In secondo luogo, una scelta di metodo. *Ho cercato di non imporre nulla al* Lettore *(" devi fare cosí, i motivi li vedrai molto piú tardi "); ho cercato sempre non solo di far capire il testo pagina per pagina, ma di far comprendere il perché di* quel *testo, di* quella *successione di pagine. Perciò, quasi sempre, il procedimento " naturale " di formazione di un nuovo concetto precede la sua definizione formale. Da ciò, il rilievo dato alla genesi storica dei concetti e dei metodi dell'algebra astratta (ad essa sono dedicate sette* Note storiche *separate solo tipograficamente dal testo).*

In terzo luogo, una scelta di contenuto. *Essendo prevalente l'esigenza della* impostazione mentale, *era necessario — a mio avviso — non solo iniziare con gli " insiemi privi di struttura " e dare una certa ampiezza alla esposizione dei concetti e delle costruzioni insiemistiche, ma anche assumere quei concetti e quelle costruzioni come " prototipi " per tutti i successivi sviluppi. Dalla linea concettuale: insiemi-corrispondenze biunivoche-equipotenza, si passa infatti in modo naturale alla linea: struttura algebrica concreta-isomorfismo-struttura algebrica astratta. Cosí dalla linea: insieme-equivalenza-insieme quoziente, discende facilmente la catena logica: insieme con operazioni-equivalenza componibile rispetto alle operazioni-struttura quoziente. O ancora: le operazioni sui sottoinsiemi di un insieme, la costruzione di nuovi insiemi a partire da due (o piú) insiemi servono da " base mentale " per analoghi, o piú complicati, procedimenti costruttivi relativi a questo o a quel tipo di struttura algebrica e alle sue substrutture.*

Alcuni concetti-tipo e alcuni procedimenti-tipo sono esposti, in tutta la loro generalità, nel secondo *capitolo. Che è secondo però solo nella logica della scrittura, ed è invece* ultimo *nella logica della lettura di chi affronta per la prima volta un testo di algebra astratta.*

L'esperienza mi fa ritenere impossibile — oggi come oggi — la utilizzazione di tutto *il materiale contenuto in questo volume in un corso di algebra per il primo anno universitario. La sovrabbondanza del materiale risponde ad alcuni precisi motivi. Innanzitutto, consentire ai colleghi che volessero servirsi del volume una certa varietà di scelte. In secondo luogo, dare al principiante un testo che possa essergli utile anche quando principiante non sarà piú, al quale possa tornare per un ampliamento della sua cultura algebrica* dopo *l'esame. In terzo luogo, offrire al lettore " filosofo " alcune conquiste del pensiero matematico, di carattere concettuale-critico, che interessano invece solo marginalmente chi voglia impadronirsi della* tecnica *algebrica (mi riferisco soprattutto alla distinzione tra " insieme " e " classe," e alla conseguente rimozione delle classiche antinomie della teoria degli insiemi, argomenti ai*

quali sono dedicati alcuni paragrafi del capitolo primo che possono essere omessi senza pregiudizio del successivo studio).

Chi voglia comprendere l'algebra astratta, non importa se per esigenze strumentali o per curiosità intellettuale, deve accompagnare la lettura di un testo (sempre relativamente " passiva ") con l'impegno attivo di risoluzione di problemi. Il volume è perciò corredato da un gran numero di esercizi e complementi, raccolti da Vassili Corbas e Gianfranco Panella. In ognuna delle quattro sezioni nelle quali sono suddivisi (gruppi; anelli; reticoli; spazi vettoriali) gli esercizi salgono *molto gradualmente di difficoltà. Dalla verifica quasi automatica, che può incoraggiare la ragazza, il giovane sgomenti per le inconsuete astrazioni delle prime lezioni, si sale su su fino al vero e proprio problema, che può interessare e appassionare anche lo studioso esperto.*

La raccolta (e la creazione!) di esercizi e complementi, è stata fatica intelligente di Panella e Corbas, non mia. Già questo fatto indica che l'opera, nel suo complesso, è frutto di una collaborazione. Ma, se pure scritto da me, anche il " testo " deve essere considerato un " lavoro di gruppo." È il risultato di tre anni di collaborazione, di amicizia, di discussione e di critiche reciproche del " collettivo di lavoro " dei corsi d'algebra di Roma svoltisi tra il 1961 e il 1964, collettivo composto da me e dai miei assistenti Michael V. D. Burmester, Vassili Corbas, Gianfranco Panella (Burmester ci ha lasciati da qualche mese, chiamato ad insegnare a Londra; non ha perciò potuto aiutarmi nella correzione delle bozze, per la quale debbo ringraziare soprattutto l'attentissimo e " criticissimo " Corbas, ma anche Panella, e il dottor Galileo Violini, un giovane fisico teorico appassionato all'algebra).

Anche ai miei allievi di quei tre corsi di algebra debbo molto: li ringrazio per la loro attenzione, per il loro interesse, per la loro confidenza: sono loro che mi hanno fatto molto spesso capire che cosa " andava " e che cosa " non andava."

Questo libro è dedicato a una persona che non lo leggerà mai, impegnata com'è in altra e lontana scienza: a mia moglie. Ma senza di lei non sarei io, in quel poco o molto di buono che ho, neppure come algebrista.

Lucio Lombardo-Radice

Roma, 25 febbraio 1965.

Capitolo primo

Insiemi privi di struttura

1*. *Il metodo della matematica moderna: assiomatizzazione, studio di strutture formali*

Che cosa è la matematica moderna? in che cosa si differenzia da quella "classica?" in particolare, qual è la differenza tra l'algebra astratta studiata nel primo anno del corso di laurea in Matematica, e l'algebra elementare delle scuole medie superiori?

Una esauriente risposta a tali interrogativi è la *conclusione*, non la *premessa*, di un volume che si proponga di esporre i fondamenti, e i primi sviluppi, dell'algebra astratta. Ci sembra tuttavia opportuno dare al Lettore un orientamento mentale preliminare, un'idea generale, e sia pure generica, del *metodo* che verrà seguito, un'indicazione della "strada di pensiero" che dovrà percorrere. A tale orientamento dedicheremo i primi due numeri del primo capitolo. Essi potranno essere omessi in prima lettura, dovranno comunque essere riletti dallo studente al termine dello studio dell'intero volume.

La matematica è sempre astrazione

La matematica è *sempre* astrazione. Anche gli elementarissimi *numeri naturali* (interi positivi) sono astrazioni. La matematica moderna si differenzia da quella classica per *un più elevato grado di astrazione*, raggiunto, in primo luogo, coll'impiego sistematico del procedimento della *assiomatizzazione*. Per una prima illustrazione di tale procedimento, prenderemo le mosse dagli *interi relativi* (positivi, negativi, lo zero).

[1] Contrassegneremo con un asterisco,*, i numeri che possono essere omessi senza un essenziale pregiudizio per la comprensione del seguito.

Proprietà formali degli interi

Consideriamo alcune proprietà notevoli degli interi relativi. *In primo luogo*, sono definite due operazioni: l'addizione (simbolo: $+$), e la moltiplicazione (simbolo: $\cdot$, o semplice giustapposizione) tra interi, cioè due " leggi di composizione " che associano, ciascuna, a ogni coppia[2] di interi: (a, b) un ben determinato intero c ($c = a + b$ si chiama la *somma*, $c = a \cdot b$ il *prodotto* di a e b). Ambedue le leggi di composizione verificano le " proprietà formali " della *associatività* e della *commutatività*; sono connesse tra di loro dalla *legge distributiva*, che è anch'essa una " proprietà formale." (Le proprietà formali sono relazioni tra interi identicamente soddisfatte, o *identità*, cioè uguaglianze verificate per qualsiasi sostituzione di interi al posto delle lettere-indeterminate che in esse compaiono; così, $a + b = b + a$ è verificata quando al posto delle lettere a e b si sostituiscano interi relativi comunque scelti.) Osserviamo ancora che lo 0 è elemento " indifferente," o *neutro*, per la addizione, cioè che: $0 + a = a + 0 = a$ quale che sia l'intero a, e che ogni intero a possiede un opposto, $-a$, cioè che l'equazione: $a + x = 0$, ammette una e una sola soluzione quale che sia la scelta dell'intero a.

Proprietà formali come identità

In secondo luogo, notiamo che anche la divisione dei numeri (interi relativi) in positivi, negativi, e nulli (lo zero), dà luogo ad alcune proprietà formali. Così, dato un qualunque numero a non nullo, *uno*, e *uno solo* dei due numeri a, $-a$ è positivo (simbolo: > 0); inoltre, dati due numeri positivi quali si vogliano, anche la loro somma e il loro prodotto sono positivi (se $a > 0$, $b > 0$, allora anche $a + b > 0$, $a \cdot b > 0$).

Per i polinomi: le stesse proprietà formali

In luogo dei numeri interi relativi, consideriamo ora *polinomi* a coefficienti interi relativi:

$$a = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \qquad a_0 \neq 0,^3$$
$$b = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m, \qquad b_0 \neq 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

[2] L'ordine degli elementi nell'interno della coppia non ha importanza in questo caso, perché: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$, cioè perché le operazioni sono commutative.

[3] Nell'ipotesi che il coefficiente, a_0, del termine di grado massimo, x^n, sia non nullo, si dice che il polinomio ha grado *effettivo* n; a_0 si chiama allora il coefficiente *direttore* del polinomio a.

Osserviamo che, per denotare un polinomio generico, indeterminato, abbiamo usato lettere latine minuscole: a, b, ... così come avevamo fatto per indicare numeri interi relativi indeterminati, discostandoci dalla notazione funzionale abituale: $a(x)$, $b(x)$, ..., colla quale si sottolinea che i polinomi a, b, ... sono espressioni nell'indeterminata x: il simbolo a potrà intendersi come abbreviazione del simbolo $a(x)$, né vi potranno essere equivoci, perché i coefficienti (numeri interi) vengono da noi rappresentati da lettere latine minuscole munite di indice: a_0, a_1, ..., a_i, ...

Orbene: anche tra polinomi sono definite due operazioni, che continuano a chiamarsi con i nomi di addizione e moltiplicazione, e a denotarsi con i medesimi simboli delle omonime operazioni tra interi (tutto ciò è ben noto dall'algebra elementare). Di più, per x positivo sufficientemente grande, diciamo per ogni numero reale[4] $x > N$, essendo N un intero positivo abbastanza grande, si ha che il polinomio $a = a(x)$, considerato come funzione della variabile reale x, ha lo stesso segno di a_0 (*prevale* il contributo del termine di grado più elevato, da un certo " momento " in poi: come si intuisce, e come verrà rigorosamente dimostrato nel corso parallelo di Analisi matematica). Chiamando un polinomio $a \neq 0$ " positivo " o " negativo " a seconda che il suo coefficiente direttore a_0 è positivo o negativo, si vede senza difficoltà che sono verificate le medesime proprietà formali prima enunciate relativamente all'" essere positivo " nel caso degli interi relativi.

La definizione assiomatica unifica formalmente teorie diverse

A questo punto occorre compiere quella " operazione mentale " che è la prima caratteristica della matematica moderna. Occorre *prescindere* dalla natura degli elementi a, b, c, ..., non pensare più ad essi come a numeri interi, o a polinomi, o ad altro che sia; occorre invece considerarli come *puri simboli*, suscettibili di assumere volta a volta i più svariati significati concreti. Occorre, nello stesso tempo, prescindere dal significato concreto delle operazioni (nel nostro esempio: $+$ e $\cdot$), dalle proprietà e relazioni (nel nostro caso, dalla proprietà di essere positivo, in simboli: " > 0 "; anche lo 0 è un simbolo caratterizzato formalmente dal fatto di essere " elemento neutro " rispetto all'operazione " $+$ "!).

Prescindere della natura degli elementi..

... e dal significato concreto delle operazion e relazioni

[4] Il concetto di numero reale si suppone noto; per la definizione assiomatica dei numeri reali, v. il c. X.

Che cosa resta? Resta un sistema (insieme) di elementi di natura non precisata, a priori " qualsiasi ": a, b, c, ..., nel quale sono definite due " leggi di composizione " $+$ e $\cdot$, anch'esse di natura non precisata, e una relazione, o proprietà (l'essere un elemento " positivo "), anch'essa di natura non precisata; resta il fatto che " addizione," " moltiplicazione," " essere positivo " debbono verificare le proprietà formali sopra elencate.

Formalizzazione completa delle teorie matematiche

Ecco, dal punto di vista moderno, che cosa è il punto di partenza di una teoria: un sistema di ipotesi formali (*assiomi*) relativo a operazioni, relazioni ecc. di natura non precisata (" arbitraria ") definite tra elementi anche essi di natura non precisata (" arbitraria "). La teoria procederà, da questo punto di partenza, come successione di costruzioni e di deduzioni logico-formali, nelle quali non si impiegano cioè altro che le regole della logica formale (ordinaria) e gli assiomi formali sui quali la teoria è fondata.

Algebra elementare e algebra astratta

Siamo ora in grado di dare un primo chiarimento della differenza tra algebra elementare e algebra astratta, avendo presenti gli esempi addotti. L'*algebra elementare* considera, studia *separatamente* la teoria degli interi relativi e quella dei polinomi in una indeterminata a coefficienti interi. L'*algebra astratta* sviluppa, al posto di queste *due* teorie (e delle molte altre suscettibili della medesima formalizzazione), una *unica* teoria, quella degli *anelli ordinati*, chiamando " anello ordinato " ogni possibile insieme con operazioni $+$ e $\cdot$ e con una definizione dell'" essere positivo " soddisfacenti gli assiomi formali sopra elencati, che dal punto di vista elementare venivano considerati come proprietà formali delle omonime operazioni e definizioni concrete, nell'ambito degli interi o dei polinomi.

Dall'astratto al concreto

La teoria astratta degli anelli ordinati potrà essere *applicata* alla teoria dei numeri interi, a quella dei polinomi in una indeterminata a coefficienti interi, a *ogni* teoria matematica " concreta " (elementi, operazioni ecc. presi in un senso *determinato*) riducibile allo schema formale descritto. L'impostazione assiomatica, pertanto, lungi dal rendere l'indagine più complicata, la semplifica, riducendola all'essenziale: e l'essenziale è la *struttura formale*.

L'astratto come pluralità di concreti

Il più elevato grado di astrazione così raggiunto non significa perciò in alcun modo fuga in elucubrazioni di scarsa o nulla utilità pratica; si è — al contrario! — conquistato un

mezzo straordinariamente potente, atto a risolvere, con un solo ragionamento formale, parecchi problemi concreti a prima vista diversissimi (potenzialmente: infiniti problemi concreti diversi, se infiniti sono i " modelli " concreti con la medesima struttura formale). Quanto più astratta è la matematica, tanto più essa è *semplice* ed *utile*.

2*. *Concetto di struttura matematica. Riduzione di una struttura multipla a strutture semplici*

Con il procedimento di assiomatizzazione che abbiamo cercato di delineare nel paragrafo 1, oggetto della ricerca matematica divengono alcune *strutture formali*: tra elementi non precisati nella loro natura esistono delle connessioni non precisate nella loro natura, definite solo da alcune loro proprietà formali (gli assiomi).

È opinione di chi scrive che non sia però vera l'affermazione inversa; che, cioè, non sia giusto affermare che ogni possibile struttura formale interessa la matematica. Certo, sarebbe vana presunzione il volere predeterminare quali strutture formali presentino interesse (siano " importanti ") per la matematica; è anche vero, però, che lo sviluppo storico concreto della matematica, e la *logica interna* di tale sviluppo, mettono in primo piano *determinate* strutture formali, e precisamente quelle strutture che " schematizzano " fenomeni, processi, situazioni che presentano un concreto interesse per la prassi dell'umanità associata.

Metodo formale, fondazione non formale

Si reintroduce così, in qualche misura, quella *applicabilità* della matematica a problemi concreti (naturalistici, economici, logici, ecc.) che occorre invece completamente mettere da parte nella *trattazione* assiomatica delle teorie. L'assiomatizzazione è un *metodo* puramente logico-formale; la *scelta degli assiomi*, cioè la scelta delle teorie formali da sviluppare, implica invece valutazioni che vanno al di là della logica e della matematica pure (" meta "-logiche e " meta "-matematiche). Insomma: mentre lo *sviluppo* di una teoria matematica può, anzi *deve*, essere portato avanti con il metodo astratto e formale prima tratteggiato, la *fondazione* della teoria è un fatto più complesso; proprio nel momento (pre-matematico) della fondazione, appare il legame