Enrico Giusti

Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici

Bollati Boringhieri

Capitolo 3

Origini della geometria

Ancora meno soddisfacente appare, a una seconda riflessione, la concezione che poco fa abbiamo chiamato naturalistica, che vede gli oggetti matematici come astrazioni dagli oggetti naturali. Contro questa ipotesi abbiamo menzionato l'esistenza delle geometrie non euclidee; e in effetti il loro apparire nel secolo passato ha minato sostanzialmente le basi empiriche su cui essa poggiava. Ma a ben vedere, serie obiezioni si possono muovere partendo da molto più lontano, già dalle stesse origini della matematica.

È opinione comune che una delle prime attività matematiche dell'uomo sia stato il contare. Certo le origini dei numeri si perdono nella preistoria; già le prime testimonianze di cui disponiamo, i papiri egizi o le tavolette babilonesi, ci mostrano un sistema numerico completamente formato. Ora, da dove vengono i numeri? di quali oggetti reali sarebbero la formalizzazione matematica? Forse delle tigri di Vfnkw? A questa domanda il naturalismo non dà risposte.

Ma anche il terreno più sicuro, la geometria, riserva delle sorprese. Guardiamo nell'undicesimo libro degli *Elementi* di Euclide la definizione della sfera; troveremo

> La sfera è una figura racchiusa da una semicirconferenza che gira attorno al diametro fino a tornare al luogo da cui era partita,[1]

una definizione per molti versi sorprendente, di certo diversa da quella che ci si sarebbe aspettati. Nessun accenno al fatto che tutti i punti della sfera sono equidistanti dal centro;[2] la sfera è la fi-

[1] *Elementi*, Libro 11, Definizione 14.

[2] Una definizione della sfera come luogo dei punti dello spazio equidistanti dal centro, analoga a quella della circonferenza, si trova in opere successive agli *Elementi* di Euclide, come ad esempio negli *Sferici* di Teodosio (II-I secolo a. C.) o tra le *Definizioni* di Erone (I secolo d. C.).

gura generata ruotando una semicirconferenza, una definizione che evoca più il tornio dell'operaio che il compasso del geometra.

Peraltro, anche la definizione del cerchio:

> Il cerchio è una figura piana racchiusa da una linea, detta circonferenza, tale che le rette tirate da un punto interno ad essa sono tutte uguali[3]

benché più geometrica di quella della sfera, è anch'essa, a ben vedere, piuttosto lontana dai canoni naturalistici.

In essa non c'è traccia di rotondità, come dovremmo aspettarci se il cerchio fosse l'archetipo delle figure rotonde; al suo posto l'uguaglianza di segmenti, per di più tirati da un punto non meglio precisato, che niente hanno a che fare con la figura geometrica. Per intenderci, Euclide avrebbe potuto dire

> Il cerchio è una figura piana racchiusa da una linea, detta circonferenza, ugualmente rotonda in ogni sua parte,

o qualcosa di simile; in ogni caso avrebbe potuto dare una definizione basata sul tratto caratteristico della circonferenza: l'uniformità della curvatura.

Ma, si dirà, questa definizione non è minimamente operativa, da essa non si può ricavare nulla. Questo è senz'altro vero, ma è forse più operativa la definizione di retta che negli *Elementi* precede di poco quella di circonferenza? Quando Euclide dice

> La linea retta è quella che giace ugualmente tra i suoi punti,[4]

una definizione in cui non è facile trovare conferme dell'ipotesi naturalistica, non pensa certo di usarla nelle dimostrazioni. D'altra parte il ruolo delle definizioni nella matematica classica non è quello di servire da fondamenti delle dimostrazioni – questa semmai è la funzione dei postulati e degli assiomi –, ma di chiarire la natura dell'oggetto definito, una natura che né per la retta né per il cerchio sembra derivare da un'astrazione da analoghi oggetti reali.

Ma allora, se non sono idealizzazioni di oggetti «quasi diritti» o «quasi circolari», da dove vengono la retta e il cerchio matematici? Per dare una risposta a questa domanda, dobbiamo fare un passo indietro di qualche secolo.

[3] *Elementi*, Libro 1, Definizione 15.

[4] *Ibid.*, Definizione 4.

Tutte le testimonianze degli autori greci sono concordi sul fatto che la matematica, e in particolare la geometria, sia sorta in Egitto, e poi di qui sia stata introdotta in Grecia. In un notissimo passo, Erodoto ci ha tramandato le circostanze della sua nascita. Parlando del faraone Sesostri, regnante attorno al 2000 a. C., egli racconta:

Dicevano che questo re distribuì il territorio fra tutti gli egiziani, dando a ciascuno un lotto uguale di forma quadrata, e che in base a questa suddivisione si procurava le entrate, avendo imposto il pagamento di un tributo annuo. Se da un podere il fiume asportava una qualche parte, il proprietario, recatosi presso il re, gli segnalava l'accaduto: egli allora mandava funzionari che osservavano e misuravano di quanto il terreno era divenuto più piccolo, affinché per l'avvenire il proprietario pagasse in proporzione il tributo. Io ritengo che in seguito a ciò sia stata inventata la geometria e sia poi passata in Grecia.[5]

Gli agrimensori egizi erano chiamati dai greci «arpedonapti», annodatori di funi. Il motivo di questo nome è evidente: le funi e i picchetti sono gli strumenti principali della geometria pratica non solo nell'antichità, ma almeno fino al secolo XVII. Gli arpedonapti egizi e gli ingegneri del Rinascimento usano per la geometria sul terreno tecniche estremamente simili; alle pitture tombali dell'antichità fanno riscontro quasi specularmente le illustrazioni dei trattati di ingegneria militare e civile del Cinquecento e del Seicento.

I picchetti segnano in terra i punti; le funi annodate ad essi tracciano le due linee più semplici e più importanti della geometria: la retta e il cerchio. La prima, semplicemente tendendo una fune tra due punti, un'operazione di cui resta ancora un'immagine nelle espressioni «tirare una retta», «tirare una perpendicolare», proprie di molte lingue moderne; il secondo, il cerchio, facendo ruotare uno dei due punti attorno all'altro che rimane fisso.

Se confrontiamo queste due operazioni con le definizioni degli *Elementi*, possiamo scorgere in filigrana una corrispondenza se non totale, certo molto più evidente di quella con gli oggetti naturali.

Per il cerchio si tratta di una corrispondenza evidente: l'uguaglianza delle distanze del centro dai punti della circonferenza, che male si accordava con la curvatura delle figure circolari, è invece un'immediata traduzione in termini matematici della corda tesa, sempre di lunghezza uguale, tra il centro e la periferia.

[5] *Le storie*, II, 109.

Ma per molti versi anche la definizione di linea retta – che per Euclide è sempre una linea finita, un segmento: anche qui un rinvio alle corde? – rimanda all'operazione di tendere una corda tra due punti (σημεῖα, letteralmente: segni), che ne costituiscono i confini. Il suo essere retta non dipende dall'essere diritta, o dal fatto che essa realizza la distanza minima tra due punti, ma rinvia probabilmente all'uniformità della tensione: essa «giace uniformemente rispetto ai suoi segni»,[6] una proprietà che diventa ancor più suggestiva se letta insieme alla definizione che la precede: «I segni sono gli estremi della linea».[7]

Questa interpretazione è rafforzata dai primi tre postulati, che riproducono quasi esattamente le operazioni dell'agrimensore; tirare una retta tra due punti:

Si chiede di tirare una linea retta da un qualsiasi segno a un qualsiasi altro segno,

prolungare una retta data:

E di produrre subito dopo per diritto una linea retta finita,

descrivere una circonferenza:

E con qualsiasi centro e intervallo descrivere un cerchio.[8]

Si realizza così una corrispondenza quasi totale tra gli oggetti della geometria teorica e le operazioni sul terreno. Per condurre una retta tra due punti, l'agrimensore li segnerà con due picchetti, annoderà una corda a uno di essi, e la fisserà all'altro dopo averla tirata. Da queste operazioni il geometra trarrà due definizioni e un postulato: tra due punti, che ne rappresentano gli estremi, si può sempre tracciare una retta, che giace uniformemente tra di essi.[9]

Allo stesso modo, l'ingegnere traccerà un cerchio con un dato centro e con un intervallo fissato prima tirando una retta tra il centro e il punto che misura l'intervallo, e poi, scalzato il picchetto da questo punto, lo farà ruotare descrivendo la circonferenza. Di qui la definizione di cerchio e il postulato relativo.

[6] Vedi Nota 3.
[7] *Elementi*, Libro I, Definizione 3.
[8] *Ibid.*, Postulati 1-3.
[9] Si noti, una retta giace uniformemente tra i suoi punti, e non fuori. Così la corda tirata è una retta tra i due picchetti, e non al di là di essi.

Possiamo allora avanzare un'ipotesi: che gli oggetti matematici provengano non dall'astrazione da oggetti reali, di cui descriverebbero i tratti caratteristici, ma da un processo di *oggettualizzazione delle procedure*. Essi non derivano da una realtà esterna, indipendente dall'uomo, di cui rappresenterebbero l'essenza depurata dalle impurità materiali, ma formalizzano l'operare umano. Si tratta sempre, e non potrebbe essere altrimenti, di un processo di astrazione, un cristallizzare in pochi tratti invariabili la varietà infinita delle operazioni effettivamente compiute; ma l'astrazione avviene non a partire dai dati della realtà, ma dalle operazioni della tecnica; la matematica non è figlia della natura, ma dell'arte.[10]

In questa formalizzazione, le definizioni e i postulati svolgono un'opera di traduzione dai procedimenti empirici della prassi alle figure e alle operazioni astratte della geometria.

Riletta in questa prospettiva, anche la definizione della sfera acquista uno spessore prima assente. Se l'essere equidistanti dal centro non è una proprietà ma un modo di generazione della circonferenza, corrispondente a far girare un punto attorno a un altro; un simile procedimento di costruzione genera la sfera mediante la rotazione del semicerchio. Si spiega così anche la differenza di definizione tra il cerchio e la sfera, differenza che non poteva passare inosservata allo stesso Euclide. Mentre infatti per la circonferenza l'equidistanza dal centro rimanda a una modalità di costruzione, per la sfera ciò non è più vero: con una corda o un compasso si può disegnare una circonferenza ma non una sfera. La definizione di quest'ultima dovrà tenere conto di questa differenza non geometrica, ma generativa.

Seppure con minore evidenza, anche gli altri oggetti della geometria greca soggiacciono a questo schema interpretativo: le sezioni coniche provengono dall'intersezione di un piano con un cono, generato quest'ultimo dalla rivoluzione di una retta; così come le altre curve vengono introdotte via via mediante la loro costruzione. Si tratta però, via via che ci allontaniamo dai princìpi per addentrarci nelle regioni più riposte della geometria classica, di una costruzione sempre meno materiale e sempre più mentale, che si svolge

[10] A scanso di equivoci, sarà bene puntualizzare che il termine arte non rinvia all'artista, ma all'artigiano.

quasi totalmente nell'ambito della geometria teorica. Nello stesso meccanismo potrebbero rientrare i numeri,[11] non astrazioni da oggetti che non esistono (meno che mai astrazioni da altre astrazioni, come la numerosità, o l'equipotenza, come fino a qualche anno fa sembravano suggerire i programmi delle scuole elementari), ma oggettualizzazioni dell'attività del contare.[12]

In conclusione, la nostra ipotesi sembra adattarsi alla struttura della matematica classica meglio di quanto facesse l'ipotesi naturalistica. D'altra parte a prima vista essa non sembra immune dagli stessi difetti: da quale prassi potrebbero procedere i numeri complessi? quale procedura farebbe emergere un gruppo? Per rispondere a queste e a simili domande dovremo ripercorrere brevemente le tappe che hanno condotto alla scoperta di alcuni tra i più importanti – e più semplici – oggetti matematici.

[11] Qui il condizionale è d'obbligo: data l'assoluta mancanza di documenti, non possiamo che rimandare alla testimonianza di Qwfwq.

[12] Un'interessante ipotesi sull'origine del contare è sviluppata da A. Seidenberg, *The ritual origin of counting*, Arch. Hist. Ex. Sci. **2** (1962), che segnaliamo anche per la ricchissima bibliografia.