Enrico Giusti

Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici

Bollati Boringhieri

Prima edizione gennaio 1999

Stampato in Italia dalla Stampatre di Torino
ISBN 88-339-1128-4

Nota 7

Curve ed equazioni nella *Géométrie* di Descartes

1. *Soluzioni di problemi: il problema di Pappo*

Nella *Géométrie* Descartes affronta e risolve il problema di Pappo nella sua formulazione più generale:

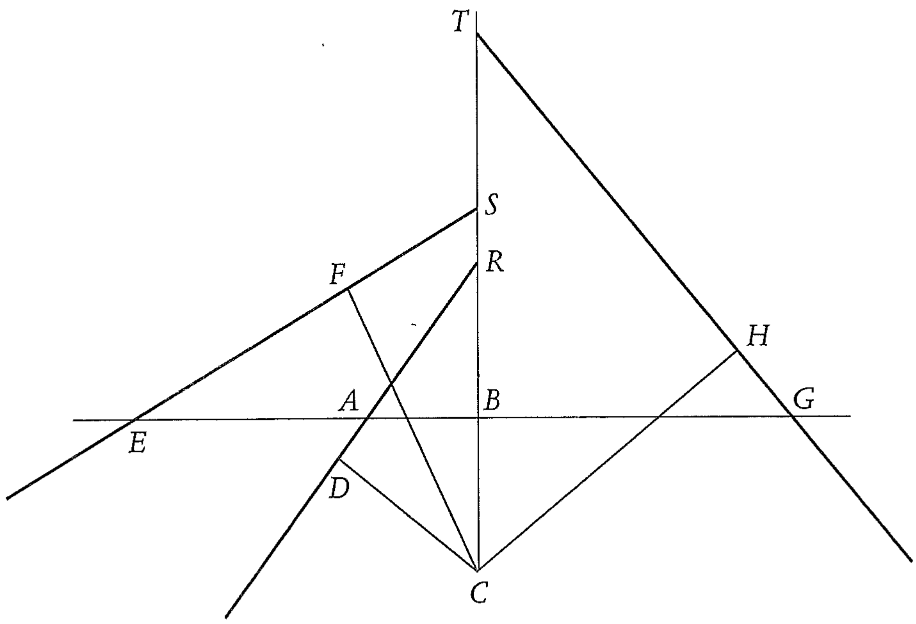
Date per posizione tre, quattro, o più linee rette, innanzi tutto si richiede un punto [C] dal quale sia possibile condurre un ugual numero di linee rette, una su ciascuna delle date, che facciano con queste degli angoli dati, e tali che il rettangolo compreso tra due di quelle che saranno così tracciate da uno stesso punto, stia in un rapporto dato con il quadrato della terza, se non ci sono che tre linee; oppure con il rettangolo compreso tra le altre due se ce ne sono quattro; o, se ce ne sono cinque, che il parallelepipedo costruito con tre di esse stia in un rapporto dato con il parallelepipedo composto dalle due che restano e da un'altra linea data.
... E così questo problema si può estendere a un numero qualsiasi di linee.[1]

Nella figura abbiamo riportato il caso in cui le rette sono quattro e gli angoli sono tutti retti. Se indichiamo con t il rapporto dato, il problema consiste nel trovare il luogo dei punti C tali che

$$CB \times CF = t\, CD \times CH.$$

Descartes prende la retta EG come asse delle x, e pone $AB = x$, $CB = y$, $AE = a$ e $AG = b$. Si tratta dunque di trovare le lunghezze dei tre segmenti CD, CF e CH.

[1] *La Geometria*, p. 549.



Per calcolare il primo, Descartes osserva che gli angoli dei triangoli ARB e DRC sono noti, e quindi sono noti anche i rapporti $RB : AB$ e $CD : CR$. Posto dunque $RB : AB = m$ e $CD : CR = n$, si ha $RB = mx$ e quindi $CR = CB + RB = y + mx$ e $CD = n \times CR = n(y + mx)$.

Analogamente, sono noti gli angoli dei triangoli ESB e FSC e dunque anche i rapporti $SB : EB = p$ e $CF : CS = q$. Ora $EB = EA + AB = a + x$, e quindi $SB = p(a + x)$, da cui $CS = y + p(a + x)$ e infine $CF = q[y + p(a + x)]$.

Allo stesso modo si trova CH. Infatti gli angoli dei triangoli TBG e TCH sono noti, e così anche i rapporti $TB : BG = r$ e $CH : TC = s$. Poiché $BG = AG - AB = b - x$, si ha $TB = r(b - x)$, $TC = y + r(b - x)$ e infine $CH = s[y + r(b - x)]$.

A questo punto basterà moltiplicare i valori trovati, per giungere all'equazione

$$qy[y + p(a + x)] = tns(y + mx)\,[y + r(b - x)].$$

Nel caso generale, Descartes osserva che la lunghezza di ognuno dei segmenti tirati dal punto C ha sempre la forma $cx + dy + e$; moltiplicando tra loro queste lunghezze secondo quanto richiesto, si giunge a un'equazione ognuno dei cui membri avrà un grado uguale al numero di linee che si moltiplicano. Il problema di Pappo si può dunque considerare risolto.