

ELEMENTI DI EUCLIDE

Jean-Pierre Vernant: *Les origines de la pensée grecque* (1962)

Obiettivo: ricercare l'insieme delle condizioni che hanno condotto la Grecia dalla civiltà dei palazzi micenei, vicinissima ai regni orientali contemporanei, all'universo sociale e spirituale della *polis*.

Tesi: L'avvento della città non si limita a segnare una serie di trasformazioni economiche e politiche: implica un cambiamento di mentalità, la scoperta di un altro orizzonte intellettuale, l'elaborazione di un nuovo spazio sociale centrato sull'*agorà*, la piazza pubblica.

Scomparsa del personaggio dell'*anax* miceneo, il principe la cui potenza eminente controlla e regola per mezzo dei suoi scribi tutta la vita sociale;

promozione della parola che diviene, nel suo utilizzo profano, in quanto libero dibattito, discussione, argomentazione contraddittoria, l'arma politica per eccellenza, strumento della supremazia nello stato;

carattere di piena pubblicità dato alle manifestazioni della vita sociale come ai prodotti dello spirito, esposti ormai sotto forma di scritture agli occhi di tutti i cittadini se si tratta di leggi e decreti, sottomessi alla critica e alla controversia quando si tratti di opere individuali;

sostituzione degli antichi rapporti gerarchici di dominio e di sottomissione con un nuovo tipo di legame sociale fondato sulla simmetria, la reversibilità, la reciprocità tra cittadini definiti come "*simili*" o "*uguali*"...

BIBLIOGRAFIA

Jean-Pierre Vernant: *Le origini del pensiero greco*, Milano, Feltrinelli, 2007, pp. 7-10.

Il primo libro di Euclide, a ritroso

He was forty yeares old before he looked on geometry, which happened accidentally, being in a gentleman's library in ..., Euclid's *Elements* lay open, and 'twas the 47th Element liber I. He read the proposition. 'By God,' sayd he, 'this is impossible!' So he reads the demonstration of it, which referred him back to such a proposition: which proposition he read: that referred him back to another, which he also read, and sic deinceps [slowly but surely], that at last he was demonstratively convinced of that trueth. This made him in love with geometry.

BIBLIOGRAFIA

John Aubrey (1626–1697): *The Life of Thomas Hobbes*, in: *Brief Lives*, Penguin Classics, New York (2000), pp. 427-428.

Il libro I degli Elementi di Euclide si apre con una lista di definizioni, assiomi e postulati, procede con una lista di proposizioni, e si conclude con la dimostrazione del teorema di Pitagora e del suo inverso.

Noi lo rileggeremo al contrario: partendo, cioè, dalla dimostrazione del teorema di Pitagora, risalendo all'indietro in un processo di progressiva riduzione a proposizioni via via più elementari, e arrivando infine a scoprire gli assiomi e i postulati.

BIBLIOGRAFIA

Piergiorgio Odifreddi: *Divertimento geometrico*, Bollati Boringhieri, Torino, 2003, pp. 33-50.

Euclide: *Elementi*

Richieste

<1> Sia stato richiesto di condurre una linea retta da ogni punto a ogni punto.

<2> E di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in <linea> retta.

<3> E che con ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio.

<4> E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

<5> E che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono gli <angoli> minori dei due retti.

BIBLIOGRAFIA

Euclide: *Tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi, Bompiani 2007, p. 781.

Enrico Giusti: *Origini della geometria*

Possiamo avanzare un'ipotesi: che gli oggetti matematici provengano non dall'astrazione di oggetti reali, di cui descriverebbero i tratti caratteristici, ma da un processo di *oggettualizzazione delle procedure*. Essi non derivano da una realtà esterna, indipendente dall'uomo, di cui rappresenterebbero l'essenza depurata dalle impurità materiali, ma formalizzano l'operato umano. Si tratta sempre, e non potrebbe essere altrimenti, di un processo di astrazione, un cristallizzare in pochi tratti invariabili la varietà infinita delle operazioni effettivamente compiute, ma l'astrazione avviene non a partire dai dati della realtà, ma dalle operazioni della tecnica; la matematica non è figlia della natura, ma dell'arte.

Guardiamo nell'undicesimo libro degli Elementi di Euclide la definizione della sfera; troveremo: *La sfera è una figura racchiusa da una semicirconferenza che gira attorno al diametro fino a tornare al luogo da cui era partita*, una definizione per molti versi sorprendente, diversa da quella che ci si sarebbe aspettati. Nessun accenno al fatto che tutti i punti della sfera sono equidistanti dal centro; la sfera è la figura generata ruotando una semicirconferenza, una definizione che evoca più il tornio dell'operaio che il compasso del geometra. (...) Se l'essere equidistanti dal centro non è una proprietà ma un modo di generazione della circonferenza, corrispondente a far girare un punto attorno a un altro; un simile procedimento di costruzione genera la sfera mediante la rotazione del semicerchio. Si spiega così la differenza di definizione tra il cerchio e la sfera, differenza (...) non geometrica, ma generativa.

BIBLIOGRAFIA

Enrico Giusti: *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino, 1999, pp. 22-26.

Assiomi o postulati?

Assiomi

Verità auto-evidenti che non richiedono dimostrazione.

Postulati

Affermazioni scelte arbitrariamente come punti di partenza della teoria, da cui tutti gli altri risultati vengono dedotti.

BIBLIOGRAFIA

Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000, pp. 28-29.

David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie* (1899)

Si deve poter dire al posto di punti, rette e piani, tavoli, sedie e boccali di birra.

Principio di continuità

I. 1 Costruire sulla retta limitata data un triangolo equilatero.

Principio di sovrapposizione

Sì:

I.4 Qualora due triangoli abbiano i due lati rispettivamente uguali a [i] due lati, e abbiano anche l'angolo, quello compreso dalle rette uguali, uguale all'angolo, avranno anche la base uguale alla base, e il triangolo sarà uguale al triangolo, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli.

I.8 Qualora due triangoli abbiano i due lati rispettivamente uguali a [i] due lati, e abbiano anche la base uguale alla base, avranno anche l'angolo compreso dalle rette uguali uguale all'angolo.

No:

I. 26 Qualora due triangoli abbiano due angoli rispettivamente uguali a due angoli e un solo lato, o quello agli angoli uguali oppure quello che si tende sotto uno solo degli angoli uguali, uguale a un solo lato, avranno anche i restanti lati [rispettivamente] uguali ai restanti lati, e il restante angolo al restante angolo.

<4> E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

BIBLIOGRAFIA

Euclide: *Tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi, Bompiani 2007.

Rette parallele

I. 29 Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, allora gli angoli alterni interni sono uguali.

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, si ottiene subito una contraddizione con <5>.

Corollario. Se per un punto ci fossero due rette parallele a una retta data, le due rette formerebbero lo stesso angolo con una trasversale e quindi dovrebbero coincidere.

Assioma di Playfair (1748-1819). Fissati una retta e un punto, esiste *al più una* retta passante per il punto e parallela alla retta data.

BIBLIOGRAFIA

Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000, pp. 38-39.

Critiche moderne

L'esistenza di un punto di intersezione segue da un *principio di continuità*. Consideriamo il piano cartesiano sopra il campo dei numeri razionali, i cui punti sono coppie ordinate di numeri razionali, e sia AB l'intervallo unitario sull'asse delle x. Allora il vertice C del triangolo equilatero, che dovrebbe essere il punto $(1/2, \sqrt{3}/2)$, non esiste in questa geometria. (p. 30)

Il *principio di sovrapposizione* implica che si possono muovere le figure da una parte all'altra del piano senza modificare i loro lati e i loro angoli. Pertanto esso implica una certa omogeneità della geometria: il comportamento locale delle figure in una parte del piano è lo stesso che in un'altra parte. Se si pensa alle moderne teorie cosmologiche, dove la curvatura dello spazio cambia in presenza di grandi masse gravitazionali, questa è un'assunzione geometrica non banale (p. 33).

BIBLIOGRAFIA

Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000.