Superficie K3 e spazi di moduli

Claudio Fontanari

Trento, maggio 2014

Definizione: la dimensione di Kodaira $\kappa(X)$ di una varietà proiettiva X è la massima dimensione dell'immagine di X in $\mathbb{P}^N$ tramite la mappa razionale determinata dal sistema lineare $|mK|$, dove K è il divisore canonico e $m \geq 1$, oppure -1 se $|mK| = \emptyset$ per ogni $m \geq 1$.

Esempio: sia C una curva liscia di genere g. Allora

- $\kappa(C) = -\infty$ se e solo se $g = 0$

- $\kappa(C) = 0$ se e solo se $g = 1$

- $\kappa(C) = 1$ se e solo se $g \geq 2$.

Esempio: siano C, D due curve lisce e $S = C \times D$. Allora

- Se C or D è razionale, allora $\kappa(S) = -\infty$

- Se C and D sono ellittiche, allora $\kappa(S) = 0$

- Se C è ellittica e $g(D) \geq 2$, allora $\kappa(S) = 1$

- Se C e D sono di genere $g \geq 2$, allora $\kappa(S) = 2$.

Definizione: Una superficie liscia S è una superficie K3 se $q := h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, $K := K_S \sim 0$. In particolare, $\kappa(S) = 0$.

Esempi di superficie K3:

Lemma (Beauville, IV.11) Sia $S \subset \mathbb{P}^{r+2}$ una superficie intersezione completa di ipersuperficie $H_1, \ldots, H_r$ di gradi $d_1, \ldots, d_r$ rispettivamente. Allora $\mathcal{O}_S(K_S) \cong \mathcal{O}_S(\sum d_i - r - 3)$.

$\sum d_i - r - 3 = 0$ con $d_i \geq 2$ per ogni i implica:

- $r = 1$ e $d_1 = 4$
- $r = 2$ e $(d_1, d_2) = (2, 3)$
- $r = 3$ e $(d_1, d_2, d_3) = (2, 2, 2)$.

Lemma (Beauville, VIII.9) Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ un'intersezione completa di dimensione d. Allora $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ per $0 < i < d$.

In generale: per ogni valore di $g \geq 3$ esistono superficie $K3$ di grado $2g-2$ in $\mathbb{P}^g$.

C curva liscia di genere g su S superficie K3

Riemann-Roch:

$h^0(S, \mathcal{O}_S(C)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(C^2 - C.K) = 2 + \frac{1}{2}C^2$

($h^1(S, \mathcal{O}_S(C)) = h^1(S, \mathcal{O}_S(-C)) = 0$
segue da $0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0$)

Aggiunzione:

$$\omega_C = \mathcal{O}_S(K + C)_{|C} = \mathcal{O}_S(C)_{|C}$$

Conseguenze:

$C^2 = 2g - 2$ e $h^0(S, \mathcal{O}_S(C)) = g + 1$

Il sistema lineare $|C|$ su S taglia su C la serie canonica, in particolare $|C|$ definisce un morfismo $\varphi : S \to \mathbb{P}^g$ la cui restrizione a C è il morfismo canonico $C \to \mathbb{P}^{g-1}$.

Se C non è iperellittica allora φ è birazionale.

Problema: determinare per quali valori di g una curva canonica generale di genere $g \geq 3$ in $\mathbb{P}^{g-1}$ è sezione iperpiana di una superficie K3 liscia in $\mathbb{P}^g$.

$\mathcal{F}_g = \{(S, L) : S$ superficie K3 liscia,
L fibrato in rette molto ampio di grado
$2g-2$ su $S\}$/isomorfismo

$\dim \mathcal{F}_g = 19$

$h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) = \binom{4+3}{4}, \dim PGL(4) = 15$

$\mathcal{P}_g = \{(S, C) : S$ superficie K3 liscia,
C curva liscia di genere g tale che
$(S, \mathcal{O}_S(C)) \in \mathcal{F}_g\}$/isomorfismo

$\dim \mathcal{P}_g = 19 + g$

$\mathcal{M}_g = \{C : C$ curva liscia di genere $g\}$/iso

$\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$

Condizione necessaria affinché la proiezione

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathcal{P}_g & \to & \mathcal{M}_g \\ (S,C) & \to & [C] \end{array}$$

sia dominante è $19+g \geq 3g-3$, ovvero $g \leq 11$.

Teorema:
(i) Mori e Mukai, 1983: se $g = 11$ allora π è dominante.
(ii) Mukai, 1987: se $g \leq 9$ allora π è dominante, ma se $g = 10$ allora π non è dominante.

Due approcci:

Mukai, 1987: esiste una varietà omogenea $X = G/P \subset \mathbb{P}^N$ di dimensione 5 tale che la generica superficie K3 polarizzata da una curva di genere 10 si ottiene tagliando X con un generico piano di codimensione 3. In particolare, una curva canonica di genere 10 su una K3 generale giace in realtà su una famiglia tridimensionale di K3.

Mappe gaussiane:

X varietà proiettiva, L fibrato in rette su X

$$\begin{aligned}\gamma_X(L) : \bigwedge^2 H^0(X, L) &\rightarrow H^0(X, \Omega^1_X \otimes L^{\otimes 2}) \\ s \wedge t &\rightarrow sdt - tds\end{aligned}$$

Wahl, 1987:

C curva liscia, K fascio canonico,

$\gamma_C(K)$ suriettiva $\Rightarrow$

se il modello canonico di C è una sezione iperpiana di una superficie $S \subset \mathbb{P}^g$ allora S è un cono su C.

Ciliberto, Harris e Miranda, 1988:

C curva canonica generale di genere $g = 10$ oppure $g \geq 12 \Rightarrow \gamma_C(K)$ suriettiva.

Conclusione:

$\pi(\mathcal{P}_{10})$ definisce un divisore effettivo $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}_{10}$.

$\overline{\mathcal{M}}_g$ = spazio dei moduli delle curve stabili di genere g

stabile = proiettiva, connessa, ridotta, di genere aritmetico g con al più nodi ordinari come singolarità, tale che ogni componente razionale contiene almeno tre punti singolari; equivalentemente, il gruppo di automorfismi della curva è finito.

$\overline{\mathcal{M}}_g$ è una varietà irriducibile proiettiva normale con singolarità di tipo quoziente finito (localmente quoziente di una varietà liscia per un gruppo finito) e canoniche (ogni forma pluricanonica sulla parte liscia si estende a una forma pluricanonica su una desingolarizzazione).

Problema: studiare la geometria birazionale di $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Severi, 1915:

le curve di dato genere p formano una varietà algebrica H irriducibile. Ritengo probabile che la varietà H sia razionale o quanto meno che nell'equazione di una curva piana di genere p i moduli si possano far comparire razionalmente. La considerazione delle curve piane minime di dato genere p, mostra agevolmente che questo fatto è vero per $p \leq 11$; la considerazione delle curve sghembe minime di genere p, definite come intersezioni parziali di superficie, permette di salire ad ulteriori valori di p; ecc.

$\Delta := \overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g$ bordo (di codimensione 1)

Componenti irriducibili:

- Δ_0, il cui elemento generico è rappresentato da una curva irriducibile con un solo nodo;

- Δ_i ($i = 1, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$), il cui elemento generico è l'unione di una curva liscia di genere i e una di genere $g-i$ che si intersecano in un nodo.

δ, δ_i le classi di Δ, Δ_i ($i = 0, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$) in $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$

$\lambda := c_1(\Lambda)$, dove Λ è il fibrato di Hodge, informalmente: fibrato vettoriale di rango g la cui fibra sul punto $[C]$ in $\mathcal{M}_g$ è lo spazio delle forme olomorfe $H^0(C, K_C)$

$\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$ è generato da λ e δ_i ($i = 0, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$)

Harris e Mumford, 1982:

K divisore canonico di $\overline{\mathcal{M}}_g$

$K = 13\lambda - 2\delta$

Eisenbud e Harris, 1987:

E^r_d divisore di Brill-Noether in $\overline{\mathcal{M}}_g$, corrispondente alle curve C di genere g che possiedono una serie lineare speciale g^r_d di dimensione r e grado d con numero di Brill-Noether $\rho(g, r, d) = g - (r+1)(g-d+r) = -1$

$$E^r_d := m\left((g+3)\lambda - \left(\frac{g+1}{6}\right)\delta_0 - \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor}(i(g-i))\,\delta_i\right)$$

Corollario:

Se $g \geq 23$ allora $K = cE^r_d + E$ con E effettivo e $c \geq 0$, in particolare la dimensione di Kodaira di $\overline{\mathcal{M}}_g$ è positiva per $g \geq 23$.

Problema: e se $g \leq 22$?

Harris e Morrison, 1990:

Congettura: se $E = a\lambda - b\delta$ è un divisore effettivo su $\overline{\mathcal{M}}_g$, allora

$$\frac{a}{b} \geq 6 + \frac{12}{g+1}$$

In particolare, per $g \leq 22$ nessun multiplo di K è effettivo e la dimensione di Kodaira è negativa.

Problema: come provare la Congettura?

Principio: se $B \subset \overline{\mathcal{M}}_g$ è una curva passante per il punto generale di $\overline{\mathcal{M}}_g$, allora per ogni divisore effettivo E su $\overline{\mathcal{M}}_g$ si ha $E.B \geq 0$. In particolare, se $E = a\lambda - b\delta$, allora

$$\frac{a}{b} \geq \frac{\delta.B}{\lambda.B}$$

$f : S \to B$ fascio di curve di genere g
S liscia, f semistabile, $g(B) = 0 \Rightarrow$
$\lambda.B = \chi(\mathcal{O}_S) + g - 1$
$\delta.B = e(S) + 4(g - 1)$

Tan, 1998:
La Congettura vale per $g \leq 11$, $g \neq 10$.

Dim.:
$D \subset X \subset \mathbb{P}^g$ la realizzazione di una curva generica di genere $g \leq 11$, $g \neq 10$ come sezione iperpiana di una superficie K3,
F un fascio (di Lefschetz) in $|D|$,
$f : S \to B$ il fascio semistabile ottenuto scoppiando i $D^2 = 2g - 2$ punti base di F,
$\chi(\mathcal{O}_S) = \chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q + p_g = 2$

$$\begin{aligned} e(S) &= e(X) + D^2 = 12\chi(\mathcal{O}_X) - K_X^2 + D^2 \\ &= 22 + 2g \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda.B = g + 1$ e $\delta.B = 6(g + 3)$

$\Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{\delta.B}{\lambda.B} = 6 + \frac{12}{g+1}.$

$\square$

$\overline{\mathcal{K}}$ la chiusura di $\mathcal{K}$ in $\overline{\mathcal{M}}_{10}$
$[\overline{\mathcal{K}}] = a\lambda - b_0\delta_0 - \sum_{i=1}^{5} b_i\delta_i$

Cukierman e Ulmer, 1993: $a = 7$, $b_0 = 1$.

Farkas e Popa, 2002: $b_i \geq b_0$, $1 \leq i \leq 5$.
In particolare,

$$\overline{\mathcal{K}} + \sum_{i=1}^{5} (b_i - b_0)\delta_i$$

è un divisore effettivo in $\overline{\mathcal{M}}_{10}$ che contraddice la Congettura.

Risultati sulla dimensione di Kodaira di $\overline{\mathcal{M}}_g$:

- $\kappa(\overline{\mathcal{M}}_g) = -\infty$ per $g \leq 16$ (Severi, Sernesi, Verra, Chang-Ran)

- $\kappa(\overline{\mathcal{M}}_g) = 3g - 3$ per $g = 22$ (Farkas) e $g \geq 24$ (Eisenbud-Harris-Mumford)

- $\kappa(\overline{\mathcal{M}}_g) \geq 2$ per $g = 23$ (Farkas).

Problema: determinare il cono effettivo di $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Rulla, 2001:

Proposizione: il cono effettivo di $\overline{\mathcal{M}}_3$ è l'inviluppo convesso di Δ_0, Δ_1 e del divisore H corrispondente al luogo iperellittico.

Domanda: il cono effettivo di $\overline{\mathcal{M}}_g$ è simpliciale per ogni g, magari generato dai Δ_i e da analoghi di H (ad esempio, il divisore di Brill-Noether)?

Osservazione: il cono effettivo non è noto nemmeno in genere zero!

$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Fulton, Keel-McKernan 1996:

Congettura: ogni divisore effettivo su $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ è linearmente equivalente a una combinazione effettiva di divisori di bordo.

Keel, 2000; Vermeire, 2002:

La Congettura di Fulton è falsa per $n \geq 6$.

Idea: $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ è ottenuto a partire da $\mathbb{P}^3$ scoppiando successivamente cinque punti generali e le trasformate proprie delle corde per ogni coppia di punti (modello di Kapranov). La trasformata propria di una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$ è un divisore effettivo che non è combinazione lineare effettiva di divisori di bordo.

Hassett-Tschinkel, 2002; Castravet, 2009:

Determinazione di un sistema di generatori per il cono effettivo di $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$.

Sia X una varietà proiettiva.

L'anello di Cox di X è:

$$\mathrm{Cox}(X) = \bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}(X)} H^0(X, L).$$

Se l'anello di Cox di X è finitamente generato, allora X è un *Mori dream space*; in particolare, il cono effettivo di X è finitamente generato.

Catravet-Tevelev, 2013:

Teorema: $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ non è un *Mori dream space* per $n \geq 134$.

Problema: determinare il cono ampio di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ ha una stratificazione naturale per tipo topologico, gli strati di codimensione k corrispondono alle curve con almeno k punti singolari.

Fulton e Keel-McKernan, 1996:

Congettura: un divisore su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è ampio se e solo se ha intersezione positiva con tutti gli strati unidimensionali.

Gibney, Keel e Morrison, 2002:

Teorema: la Congettura di Fulton su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è implicata dalla Congettura corrispondente su $\overline{\mathcal{M}}_{0,g+n}$, pertanto la Congettura è vera su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ per ogni g e per ogni n se e solo se è vera su $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ per ogni n.

Domanda: se un divisore su $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ ha intersezione non-negativa con tutti gli strati unidimensionali, ne segue che è linearmente equivalente a una combinazione effettiva di divisori di bordo?

Osservazione: una risposta affermativa implicherebbe la Congettura di Fulton: infatti, se D è un divisore come nella domanda e C è un ciclo effettivo unidimensionale tale che $D.C < 0$, allora $C \subseteq \Delta$ e si conclude per induzione.

Farkas e Gibney, 2003; Larsen, 2012:

Teorema: per $n \leq 7$ la risposta è affermativa.

Pixton, 2013:

Controesempio: per $n \geq 12$ la risposta è negativa.