CAPITOLO III.

§ 15. Le serie segate su una curva piana dalle curve aggiunte.

60. Nel Cap. preced. abbiamo studiato delle proprietà generali delle serie lineari, indipendentemente dalla costruzione effettiva di queste. Per tale costruzione, da cui poi faremo discendere l'esistenza di serie con dati caratteri, conviene ora che ricorriamo alla rappresentazione dell'ente algebrico con una *curva piana semplice*. Questa curva potremo supporla dotata di sole *singolarità ordinarie* (punti multipli a tangenti distinte); poichè, se già non fosse, si può render tale con un numero finito di trasformazioni quadratiche del piano ([90]).

Indichiamo con s in generale la multiplicità di un punto singolare per la curva piana γ d'ordine m (cosicchè le somme rispetto ad s che avremo da considerare si estenderanno a tutti i punti multipli di γ). Dicesi *curva aggiunta* ([91]) di γ ogni curva che in ciascun punto multiplo, s-plo, di γ abbia la multiplicità $s-1$ almeno. È chiaro che una serie lineare segata su γ da un sistema lineare *qualunque* di curve si può intendere staccata da un sistema *di curve aggiunte*, bastando aggiungere a tutte le curve del sistema primitivo una curva aggiunta fissa (ad es. la 1.ª polare di un punto rispetto a γ) per mutarlo in un sistema di curve aggiunte, che all'infuori di nuovi punti fissi segherà su γ la serie lineare primitiva.

61. Le curve aggiunte di γ d'un dato ordine l (abbastanza grande) formano un sistema lineare che sega su γ una serie lineare g_n^r di cui vogliamo determinare (per quanto si può) i caratteri.

Anzitutto la dimensione h di quel sistema lineare di curve aggiunte sarà:

$$(1) \qquad h \geq \frac{l(l+3)}{2} - \Sigma \frac{s(s-1)}{2},$$

([90]) V. i lavori citati al n.º 38 del sig. NOETHER (Math. Ann., IX e XXIII); e del sig. BERTINI (la cui dimostrazione geometrica è di una notevole semplicità). Si potrebbe anzi — ma ciò non occorre per noi — riferire biunivocamente l'ente algebrico o la curva piana ad una curva piana che non abbia altri punti multipli che *nodi*. Anche di questa proposizione è stata data una dimostrazione geometrica semplicissima dal sig. BERTINI (*Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche*, Rivista di mat., I, 1891).

([91]) Cfr., anche pel seguito, la Memoria BRILL-NOETHER.

ossia, introducendo il genere p di γ che vale (n.° 38)

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \Sigma \frac{s(s-1)}{2}, \tag{2}$$

sarà:

$$h \geq \frac{l(l+3)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} + p. \tag{1'}$$

Nella (1), e quindi anche nella (1'), il segno d'uguaglianza varrebbe se le condizioni che i singoli punti multipli di γ impongono alle aggiunte d'ordine l, pel fatto che in un punto s-plo di γ queste curve devon avere un punto $(s-1)$-plo, fossero tutte distinte (e quindi in numero di $\Sigma s(s-1)/2$). In caso opposto la differenza fra il 1.° membro h ed il 2.° di quelle disuguaglianze esprimerà quante fra quelle ($\Sigma s(s-1)/2$) condizioni sono conseguenza delle rimanenti (indipendenti fra loro). — Ponendo

$$l = m - 3 + \alpha,$$

la (1') si potrà anche scrivere così:

$$h \geq m\alpha + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} + p - 1. \tag{1''}$$

Se $l < m$, ossia $\alpha < 3$, non vi saranno nel detto sistema lineare d'ordine l curve che contengano γ; sicchè la dimensione r della serie segata su γ da quel sistema sarà (n.° 13) la stessa che quella del sistema, vale a dire $r = h$. Se invece $l \geq m$, ossia $\alpha \geq 3$, vi saranno curve aggiunte d'ordine l, cioè curve del sistema, spezzate nella curva γ ed in una curva (qualunque) d'ordine $l - m$, ossia $\alpha - 3$; e saranno (quante le curve piane di tal ordine, cioè) ∞^t, ove $t = \alpha(\alpha-3)/2$. Dunque (n.° cit.) la dimensione r della serie lineare sarà in tal caso

$$r = h - t - 1,$$

espressione che coincide con $r = h$ per $\alpha = 1, 2$, cioè per $l = m-2$, $m-1$. In conseguenza introducendo r nella (1'') potremo dire che: *la dimensione* r *della serie lineare segata su γ dalle curve aggiunte d'ordine* $l = m - 3 + \alpha$, *quando quest'ordine è* $l \leq m - 3$ *è*

$$r \geq m\alpha + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} + p - 1, \tag{3 a}$$

e quando invece è $l > m - 3$

$$r \geq m\alpha + p - 2. \tag{3 b}$$

Quanto poi all'*ordine* n *della serie medesima* si ha sempre evidentemente (togliendo le intersezioni che cadono necessariamente nei punti multipli di γ):

$$n = ml - \Sigma s(s-1) ;$$

ossia, introducendo p con la (2):

(4) $$n = m\alpha + 2p - 2 .$$

62. Dalle (3 a), (3 b) e (4) segue che per la g_n^r segata su γ dal sistema di tutte le sue aggiunte d'ordine l si ha:

(5 a) $$n - r < p \quad \text{se} \quad l \leq m - 3$$

(5 b) $$n - r \leq p \quad \text{se} \quad l > m - 3 .$$

63. Dall'esistenza che così è provata di serie lineari g_n^r per le quali $n - r \leq p$, osservando (n.° 29) che $n - r \geq 0$, si trae $p \geq 0$: ossia *il genere di un ente algebrico (irriduttibile) è sempre* ≥ 0.

Se poi è precisamente $p = 0$, si trae $n - r = 0$, e quindi (n.° cit.) che γ è razionale: proposizione inversa di quella del n.° 34. Dunque *gli enti algebrici di genere zero sono gli enti razionali.*

64. La formola (1'') per h prova che *curve aggiunte a* γ *di un dato ordine* l $>$ m $-$ 3 *esistono sempre* (se $m > 2$).

Quanto alle *aggiunte d'ordine* $m - 3$, per esse quella formola (1'') dà $h \geq p - 1$, sicchè *ne esisteranno certo* se $p \geq 1$. Per $p = 0$ *non ve ne sono*, giacchè altrimenti renderebbero negativo il valore di n dato dalla (4). Per $p = 1$ ve n'è *una sola*, perchè la (4) dà $n = 0$, e però quelle aggiunte (cioè i gruppi che esse segano su γ) non posson essere infinite. — In generale le curve aggiunte d'ordine $m-3$, o, come diremo più brevemente (secondo l'uso), « le φ » di γ segano su questa curva una serie lineare d'ordine $2p - 2$ e di dimensione $r \geq p - 1$; la quale, se $p > 1$, sarà rappresentata da una particolare curva (d'ordine $2p - 2$ appartenente ad S_r ove $r \geq p - 1$). Vedremo poi che è precisamente $r = p - 1$.

65. *Ogni serie lineare* $g_{n'}^{r'}$ si può staccare su γ mediante curve aggiunte di un certo ordine l (n.° 60): vale a dire i suoi gruppi sono *resti* di certi k punti fissi rispetto alla g_n^r che è segata su γ da *tutte* le aggiunte d'ordine l. Si ha dunque:

$$n' = n - k ;$$

e, supposto che *la* $g^{r'}_{n'}$ *sia completa,* e quindi comprenda *tutti* quei resti

$$r' \geq r - k\,.$$

Dunque:

$$n' - r' \leq n - r\,.$$

In base al n.º 62 otteniamo così la seguente proposizione. *Per ogni* g^r_n *completa di un ente algebrico di genere* p *si ha:*

$$n - r \leq p\,, \quad \textit{ossia} \quad r \geq n - p\,;$$

e se poi, riferito l'ente ad una curva piana d'ordine m, *la serie si può staccare su questa mediante un sistema lineare di curve* φ *(aggiunte d'ordine* m — 3), *sarà:*

$$n - r < p\,, \quad \textit{ossia} \quad r > n - p\,.$$

Al n.º 55 abbiam visto che un gruppo di n punti dell'ente algebrico, od in generale una serie lineare d'ordine n, sta sempre in una serie completa ben determinata. Ora potremo aggiungere che la dimensione di questa serie completa è $\geq n - p$; sicchè la serie completa d'ordine n determinata da un dato gruppo di n punti sarà certo infinita quando $n > p$.

Il teorema precedente ci dà pure che: *per le curve normali d'ordine* n *e genere* p *appartenenti ad* S_r *si ha* $n - r \leq p$, *ossia* $r \geq n - p$.

Sia che ci riferiamo alle g^r_n *complete,* ovvero alle curve d'ordine n di S_r *normali,* avremo in particolare che: se $p = 0$ sarà $r = n$; se $p = 1$ sarà $r = n - 1$, non potendo essere $r > n - 1$, cioè $r = n$, altrimenti (n.º 29) l'ente sarebbe razionale.

66. Una serie lineare d'ordine n e dimensione $> n - p$ presenta, come vedremo, delle particolarità che riguardano anche i suoi gruppi, e quindi le serie lineari minori d'ordine n in essa contenute. Perciò noi chiameremo *speciali* tutte le serie lineari d'ordine n (in particolare i gruppi di n punti) contenute in serie d'ordine n e dimensione $> n - p$. Se una serie speciale è completa, la sua dimensione sarà certo $> n - p$.

I resti di k punti qualunque rispetto ad una serie speciale completa g^r_n (anche se fra quei k punti vi sono dei punti fissi di questa) formano una serie completa (n.º 56), che è ancora speciale, perchè d'ordine $n - k$ e dimensione $\geq r - k > n - k - p$. Ne deriva che se una serie speciale (completa o no) ha punti fissi, sarà speciale anche la serie che rimane astraendo da questi.

Diremo anche *speciali* le curve imagini di serie speciali. Le curve speciali d'ordine n e genere p saranno dunque quelle che hanno spazi normali di dimensione $> n - p$.

Per una g_n^r *completa non speciale*, od una curva *normale non speciale* d'ordine n appartenente ad S_r, sarà $r = n - p$.

Per $p = 0$ e $p = 1$ non vi sono serie lineari speciali o curve speciali (v. la fine del n.^0 65). Per $p > 1$ invece abbiam visto (n.^0 cit.) che si ottengono serie lineari speciali staccandole su una curva piana mediante sistemi lineari di curve φ. Dimostreremo presto (§ 17) che in questo modo si posson ottenere *tutte* le serie speciali. — Prima però sarà utile che esaminiamo la cosa per una classe speciale di enti: quelli *iperellittici.*

§ 16. Digressione sugli enti ellittici ed iperellittici.

67. Gli enti algebrici sui quali esiste una serie lineare g_2^1, vale a dire (n.^0 30) un'involuzione razionale di 2.^0 grado, diconsi *iperellittici* (92). Chiamando λ il parametro (o funzione razionale dell'ente algebrico) che è in corrispondenza biunivoca con le singole coppie dell'involuzione (parametro che è determinato, a meno di una trasformazione lineare), la corrispondenza (1, 2) che si avrà fra λ ed i corrispondenti punti dell'ente trae (n.^0 22) che le coordinate di questi punti si potranno esprimere sotto la forma:

$$x_i = A_i(\lambda) + B_i(\lambda)\sqrt{R(\lambda)}, \tag{1}$$

essendo le A_i, B_i ed R polinomi in λ. Si può supporre che $R(\lambda)$ non abbia radici doppie: allora l'equazione

$$R(\lambda) = 0 \tag{2}$$

darà gli elementi di diramazione della g_2^1 ossia i punti doppi di questa. Se l'ente algebrico ha il genere p, i punti doppi della g_2^1 sono (n.^0 33) $2p + 2$; e tale sarà dunque il grado del polinomio $R(\lambda)$, supposto che $\lambda = \infty$ non corrisponda ad un elemento di diramazione, nel qual caso invece il grado di R si ridurrebbe a $2p + 1$.

Viceversa sian date comunque delle espressioni della forma (1). Da esse sarà definito un ente iperellittico nel quale le singole coppie di una g_2^1 (coppie provenienti dalla bivalenza del radicale quadratico

(92) Ad esempio per $p = 2$ esiste sempre una g_2^1: la serie staccata sulla curva piana dalle φ (v. n.^0 64); sicchè *ogni ente di genere 2 è iperellittico.*

che compare in quelle espressioni) corrispondono biunivocamente ai valori del parametro λ; purchè però, nel caso particolare in cui un gruppo generico di valori delle x_i si ottenga dalle (1) non per *un* sol valore di λ, ma per m valori, si consideri come ***punto dell'ente*** non il solo insieme delle x_i ma l'insieme di queste e di *un* valor corrispondente di λ (cioè si conti m volte, ossia come m-plo, l'ente descritto dal gruppo delle x_i) (93).

Dalla rappresentazione (1) degli enti iperellittici segue subito (n.° 22) che per l'equivalenza di due enti iperellittici di genere p, cioè perchè si possa stabilire fra essi una corrispondenza biunivoca, è ***sufficiente*** che entro le rispettive involuzioni g_2^1 abbiano gli stessi birapporti i $2p+2$ elementi di diramazione, cioè che abbiano gli stessi birapporti le radici delle corrispondenti equazioni (2). E questa condizione è anche ***necessaria*** se $p>1$, perchè allora ognuno dei due enti contiene una sola g_2^1 (n.° 35), e la corrispondenza biunivoca fra gli enti dovrà pure riferire biunivocamente le loro g_2^1 facendo corrispondere gli elementi di diramazione. Di qui, e dalla possibilità di scegliere *ad arbitrio* nelle (1) il polinomio $R(\lambda)$ di grado $2p+2$, segue che *i moduli (indipendenti) dell'ente iperellittico di genere* $p>1$ *sono* $2p-1$: i birapporti indipendenti dei $2p+2$ elementi di diramazione della g_2^1. — Se poi si suppone che i due enti iperellittici a cui si riferivano le osservazioni precedenti coincidano, si vede che condizione necessaria e sufficiente perchè *un ente iperellittico di genere* $p>1$ *ammetta una corrispondenza biunivoca fra i suoi punti* diversa da quella che è data dalla g_2^1 è che entro questa serie si possa fare una trasformazione biunivoca, vale a dire bilineare, che muti in sè il gruppo dei $2p+2$ elementi di diramazione; ossia che ammetta una trasformazione bilineare in sè l'equazione (2). Ecc. ecc.

---

(93) Del resto è facile vedere che nel caso particolare in cui le (1) definiscano non una corrispondenza (1, 2) ma invece una corrispondenza $(m, 2)$, con $m>1$, fra il parametro λ (ossia un ente razionale) ed il punto x di un ente algebrico, questo (non più contato m volte, come sopra, ma riguardato come semplice) sarà *razionale*: vale a dire è razionale un aggruppamento dei punti λ (di un ente razionale) ad m ad m quando ogni punto sta in 2 gruppi dell'aggruppamento. Invero rappresentando λ sui punti di una curva razionale normale d'ordine m di S_m, quei gruppi di m punti saranno segati su quella curva da una ∞^1 d'iperpiani tale che per ogni punto della curva (e quindi di S_m) passano 2 iperpiani: questa varietà sarà dunque di 2.ª classe (l'insieme degl'iperpiani tangenti di un cono di 2.° ordine); e quindi *razionale*.

Quest'osservazione (il cui sviluppo è in qualche relazione col n.° 23) è il risultato di una conversazione avuta col sig. ENRIQUES, il quale pure rilevò con me che essa si può notevolmente estendere.

68. L'ente algebrico di genere $p = 1$ dicesi *ellittico*. Esso contiene (pel n.° 65) infinite g_2^1 (serie complete), le quali son tali che da una coppia di punti dell'ente è individuata una tal serie: in particolare sarà individuata una g_2^1 dandone un punto doppio (dei 4 che essa ha). Ora se A, A' sono punti doppi di due g_2^1, la corrispondenza univoca involutoria che è determinata fra i punti dell'ente che forman coppie in quella g_2^1 che contiene la coppia AA' muterà l'una nell'altra quelle prime due g_2^1: donde segue che i birapporti delle due quaterne dei loro elementi di diramazione sono uguali. Dunque le infinite g_2^1 di un ente ellittico hanno le quaterne dei loro elementi di diramazione tutte projettive, cioè con lo stesso birapporto: e questo dicesi *birapporto dell'ente ellittico*.

Ciò premesso, il ragionamento che si faceva al n.° prec. per $p > 1$ si potrà ancora applicare al caso di $p = 1$. Avremo di nuovo che condizione non solo *sufficiente*, ma anche *necessaria* perchè fra due enti ellittici si possa stabilire una corrispondenza biunivoca (e quindi infinite) è che essi abbiano lo stesso birapporto. Questo è dunque *il modulo* di un ente ellittico. Vale la formola $2p - 1$ anche per $p = 1$.

69. Possiam determinare facilmente nel caso dell'ente iperellittico di genere $p > 1$ la costituzione delle *serie speciali* (n.° 66: come ivi notammo le serie speciali esistono solo per $p > 1$).

Abbiasi su quell'ente una serie lineare g_n^r priva di punti fissi, la quale non sia composta mediante la serie g_2^1. Sarà rappresentata da una curva d'ordine n di S_r, semplice o multipla, ma tale sempre che le coppie della g_2^1 son rappresentate su essa da coppie di punti essenzialmente distinti, eccetto solo i $2p + 2$ punti doppi della g_2^1. La rigata delle congiungenti queste coppie di punti sarà dunque (applicando il principio di corrispondenza ad un fascio d'iperpiani projettanti le coppie stesse; cfr. del resto la prima formola del n.° 50) d'ordine

$$\frac{1}{2}[2n - (2p + 2)],$$

ossia $n - p - 1$. Ora siccome questa rigata appartiene ad S_r il suo ordine dev'essere $\geq r - 1$. Dunque:

$$n - p - 1 \geq r - 1, \quad \text{ossia} \quad r \leq n - p \text{ [94]}.$$

---

[94] Segue che una curva *semplice* iperellittica di genere p ha sempre l'ordine ($\geq p + r$ se r è la dimensione dello spazio a cui essa appartiene, e quindi) $\geq p + 2$; e che se il suo ordine è precisamente $p + 2$ la curva è piana e le rette conte-

Ma una serie speciale d'ordine n o ha dimensione $> n - p$, o è contenuta in una serie di tal dimensione. Dunque *sull'ente iperellittico di genere* p *una serie lineare speciale priva di punti fissi è necessariamente composta mediante la* g_2^1 : e quindi, se si tratta di una g_n^r, essa non è altro che un'involuzione di dimensione r e di grado $n/2$ entro l'ente razionale che ha per elementi le coppie della g_2^1.

Se una serie lineare g_n^r così composta è *completa*, essa deve abbracciare *tutti* i gruppi di $n/2$ elementi di quest'ente razionale, cioè dev'essere $r = n/2$,

$$(3) \qquad n = 2r\,.$$

E riprendendo l'ipotesi che sia speciale, e quindi (perchè completa)

$$(4) \qquad r > n - p\,,$$

dalla (3) e da questa si trae:

$$(5) \qquad r \leq p - 1\,, \qquad n \leq 2p - 2$$ (95).

Queste relazioni (5), le quali *limitano la dimensione e l'ordine delle serie speciali*, varranno poi anche nel caso che queste non siano complete; perchè valgono per le serie complete (dello stess'ordine e di maggior dimensione) che le contengono.

Possiamo applicarle subito alla serie lineare speciale che su una curva piana iperellittica di genere p è segata dalle φ: serie lineare che abbiam visto (n.º 64) essere d'ordine $n = 2p - 2$ e dimensione $r \geq p - 1$. Da quest'ultima relazione confrontata con la prima delle (5) si deduce che è precisamente $r = p - 1$. Quella stessa (5), oppure la (3), ci prova che la detta serie non è contenuta in una di pari ordine e maggior dimensione: vale a dire che la serie è completa. Inoltre essa non ha punti fissi, perchè altrimenti la serie che si avrebbe prescindendo da questi dovrebbe ancora verificare la (3) e quindi avere l'ordine $2p - 2$. Si vede dunque, nel caso iperellittico, che le φ sono precisamente ∞^{p-1} e staccano sulla curva fondamentale una serie lineare completa priva di punti fissi: la quale è composta con la g_2^1, vale a dire non è altro che *la* g_{2p-2}^{p-1} *costituita da tutti gli* ∞^{p-1} *gruppi di* $p - 1$ *coppie della* g_2^1.

---

nenti le coppie della g_2^1 formano una rigata di 1.º grado, ossia un fascio, cioè concorrono in un punto il quale dunque sarà multiplo secondo p per la curva. Se la curva è sghemba ed il suo ordine ha il valor minimo $p + 3$, essa starà su una quadrica; ecc.

(95) Volendo considerare anche le serie *non speciali* complete composte con la g_2^1, per esse si avrà in luogo della (4): $r = n - p$; e quindi combinando con la (3) si ha, invece delle (5): $r = p$, $n = 2p$.

§ 17. Le serie speciali sopra un ente qualunque.

70. Il procedimento che abbiam seguito nel n.° prec. per gli enti iperellittici si può estendere ad enti algebrici qualunque: solo, in luogo della rigata costituita dalle rette congiungenti le coppie di punti della g_2^1 su una curva iperellittica, si dovrà considerare la varietà degli spazi che contengono i gruppi di una g_m^1 sopra una curva qualunque, ricorrendo ad una formola generale del § 13.

Suppongasi dunque che sull'ente algebrico di genere p esistano simultaneamente due serie g_n^r, g_m^1 prive di punti fissi, tali che sulla curva C (semplice o multipla) d'ordine n di S_r imagine della g_n^r i gruppi della g_m^1 appartengano in generale a spazi S_{m-1}, cioè si compongano di punti linearmente indipendenti (sicchè $m-1 \leq r$). Abbiamo allora (n.° 52):

$$(1) \qquad n - p = \nu + m - 1 + z ;$$

ove nel caso di $m-1=r$ si deve porre $\nu = 0$, mentre quando $m-1<r$ il simbolo ν rappresenta l'ordine della varietà di dimensione m costituita dagli ∞^1 spazi S_{m-1}. Ora la massima dimensione che possa avere lo spazio cui appartiene una varietà irriduttibile di dimensione m e d'ordine ν è appunto, come si sa, $\nu + m - 1$. Sarà dunque:

$$\nu + m - 1 \geq r ,$$

relazione valida anche nel primo caso. Si ha poi sempre $z \geq 0$. In conseguenza la formola fondamentale (1) ci dà:

$$n - p \geq r .$$

Segue che *quando* $\mathrm{n}-\mathrm{r}<\mathrm{p}$ *i gruppi di punti di una* g_m^1 *sopra la curva di genere* p, *ordine* n, *appartenente ad* $\mathrm{S_r}$ *appartengono a spazi di dimensione* $\leq m-2$ (96).

---

(96) Così sopra una curva di genere p dello spazio ordinario, la quale abbia l'ordine $<p+3$ se è sghemba, $<p+2$ se è piana, le terne di punti di una g_3^1 stanno su rette (formanti una rigata razionale); ecc.

Se si applica la formola più generale del n.° 52, relativa ad un'involuzione di grado m e di genere qualunque π, anzi che quella sopra adoperata che si riferisce al caso di $\pi=0$, si avrà il seguente risultato più generale: *quando* $n-r<p-m\pi$ *i gruppi di punti di un'involuzione di grado* m *e genere* π *sopra una curva d'ordine* n *e genere* p *appartenente ad* S_r *stanno in spazi di dimensione* $\leq m-2$. V. Castelnuovo: *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Rend. Acc. Lincei, 1891).

71. Abbiasi ora sulla stessa curva C rappresentante la g_n^r, sempre coll'ipotesi $n - r < p$, una serie lineare qualunque g_Q^q: dimostreremo che i suoi gruppi G_Q appartengono a spazi di dimensione $\leq Q - q - 1$. Invero se di un gruppo G_Q di quella serie si fissano $q - 1$ punti generici, i rimanenti $Q - q + 1$ formano un gruppo di una serie lineare ∞^1; e quindi, per la proposizione precedente (n.^{0} 70), appartengono ad un $S_{Q-q-1-\delta}$, ove $\delta \geq 0$. Se potesse il numero δ mutare con la scelta dei primi $q - 1$ punti entro al G_Q, si prenda per δ il minimo valor possibile. Indi fra quei $Q - q + 1$ punti che appartengono all'$S_{Q-q-1-\delta}$ se ne prendano $Q - q$ tali che anch'essi determinino questo spazio, cioè non stiano in uno spazio minore (cosa che si vede subito esser possibile). Allora ogni altro punto di G_Q insieme con quei $Q - q$ ne darà $Q - q + 1$ i quali apparterranno ad un $S_{Q-q-1-\delta'}$ con $\delta' \geq \delta$, e questo spazio dovrà coincidere con quello, di dimensione non minore, determinato dai $Q - q$ punti. Dunque quest'ultimo spazio, $S_{Q-q-1-\delta}$, contiene tutti i punti del gruppo G_Q.

Osservando poi che una curva speciale di genere p e d'ordine n è sempre projezione di una appartenente ad un S_r con $n - r < p$; e d'altra parte che la proposizione dimostrata vale anche nel caso che la g_Q^q avesse punti fissi, come si vede applicandola alla serie che rimarrebbe astraendo da questi; possiamo enunciarla così: *Sopra una curva speciale i gruppi di punti di una serie lineare qualunque* g_Q^q *stanno in spazi di dimensione* $\leq Q - q - 1$.

È questo il *lemma* da cui dedurremo tutte le principali proprietà delle serie speciali: esso è dovuto al sig. CASTELNUOVO (97).

72. Anzitutto applichiamolo al caso che la serie g_Q^q non sia altro che la g_n^r *speciale* segata su una curva speciale di genere p, ordine n, di S_r, dagl'iperpiani S_{r-1}. I suoi gruppi dovranno stare in spazi di dimensione $\leq n - r - 1$; mentre *appartengono* a quegli S_{r-1}. Dunque sarà $n - r - 1 \geq r - 1$, ossia $n \geq 2r$. *Per una serie lineare speciale* g_n^r, *o per una curva speciale d'ordine* n *di* S_r, *si ha sempre*

$$n \geq 2r. \tag{1'}$$

Se la serie lineare speciale avesse punti fissi, la (1′) varrebbe per

---

(97) *Ricerche di geom.*, ecc. n.^{0} 14. Fra i perfezionamenti di quel lavoro (accennati qui nella nota al n.^{0} 56) pensati poi dal CASTELNUOVO vi era appunto l'uso più sistematico di quella proposizione.

quella che se ne otterrebbe astraendo da questi; e quindi, a maggior ragione, per la serie primitiva.

73. Da questo teorema segue che *la serie speciale segata su una curva piana dalle sue* φ (n.º 64) *è precisamente di dimensione* $p-1$, *coi* $2p-2$ *punti tutti variabili, e completa.* Poichè, se, astraendo da x punti fissi, essa si riducesse ad una serie speciale d'ordine $2p-2-x$, e di dimensione $p-1+y$, ovvero contenuta in una dello stesso ordine e di tal dimensione, applicando la (1′) si avrebbe:

$$2p-2-x \geq 2(p-1+y),$$

donde:

$$x=0, \qquad y=0.$$

74. La stessa formola (1′), applicata ad una serie g_n^r speciale *completa*, per la quale dunque:

$$r \geq n-p+1,$$

ci dà (sommandola con questa, tal quale, oppure raddoppiata):

$$(2) \qquad r \leq p-1, \qquad n \leq 2p-2;$$

precisamente come al n.º 69 per gli enti iperellittici. Ed anche qui potremo dire che queste due relazioni (2) varranno pure, a maggior ragione, per le g_n^r speciali *parziali*. Valgon dunque per tutte le g_n^r speciali, o le curve speciali d'ordine n di S_r.

Ne segue che *se* $r > p-1$, *o se* $n > 2p-2$, *la* g_n^r, *oppure la curva d'ordine* n *di* S_r, *son certo non speciali; sicchè ove la serie sia completa, o la curva sia normale, sarà* $r = n - p$.

Quindi una superficie a sezioni iperplanari di genere p, d'ordine $n > 2p-2$, appartiene al più ad S_{n-p+1}; ecc. ecc.

75. Applicando il lemma del n.º 71 ad una g_{2p-2}^{p-1} situata su una curva C di genere $p > 1$ e d'ordine $2p-2$ che appartenga ad S_{p-1}, si ha che i suoi gruppi di $2p-2$ punti dovranno stare in spazi S_{p-2}, e però saranno i gruppi di punti segati su C dagl'iperpiani. Ora una curva quale la C si ha come imagine della g_{2p-2}^{p-1} (n.º 73) che sopra la curva piana è segata dalle sue φ: noi vediamo dunque che sull'ente non esisterà un'altra g_{2p-2}^{p-1} che quella rappresentata dalla C. *Sopra un ente algebrico di genere* $p > 1$ *esiste una sola serie* g_{2p-2}^{p-1}.

Questa serie lineare speciale si può chiamare *la serie canonica*, e *canonici* i suoi gruppi di $2p-2$ punti. Così pure si posson chiamare *curve canoniche* del genere p quelle d'ordine $2p-2$ appartenenti ad S_{p-1}: le quali curve, quando rappresentano uno stesso ente algebrico, cioè quando sono in corrispondenza biunivoca, sono fra loro projettive (perchè rappresentano una medesima serie lineare). *La geometria sull'ente algebrico di genere* $p > 1$ (geometria delle trasformazioni *birazionali* dell'ente) *equivale alla geometria projettiva delle curve canoniche di genere* p.

La rappresentazione algebrica delle curve canoniche si ha, ad es., considerando una curva piana d'ordine m

$$f(x) = 0\,, \tag{3}$$

p sue aggiunte d'ordine $m-3$ linearmente indipendenti $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{p-1}(x)$; e ponendo:

$$y_0 : y_1 : \ldots : y_{p-1} = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_{p-1}(x)\,, \tag{4}$$

per definire, con la (3), i punti y della curva canonica. Questa viene anche chiamata *la curva delle* φ (98).

Nel caso iperellittico (n.° 69) la serie canonica è *composta* con la g_2^1; la curva canonica si riduce ad una curva *doppia*, la curva (razionale normale) d'ordine $p-1$ di S_{p-1} contata due volte. In nessun altro modo una curva d'ordine $2p-2$ di S_{p-1} può esser *multipla*: e però in un ente che non sia iperellittico la serie canonica non sarà mai composta, le curve canoniche son semplici, le φ che passano per un punto generico della curva piana non passano di conseguenza per altri.

§ 18. Digressione. Applicazione alle curve aggiunte ed al *Restsatz*.

76. Gli ultimi risultati ci permettono di completare quelli del § 15 relativi alle curve aggiunte. Colà avevamo ottenuto (n.° 61) per la dimensione della serie lineare g_n^r segata su una curva piana d'ordine m e genere p da tutte le aggiunte di un dato ordine $m-3+\alpha$ maggiore di $m-3$:

$$r \geq m\alpha + p - 2\,, \tag{1}$$

e per l'ordine della serie stessa:

$$n = m\alpha + 2p - 2\,. \tag{2}$$

Poichè quest'ordine è $> 2p-2$ (o quella dimensione è $> p-1$) la

(98) Com'è noto, le forme $\varphi(x)$ si posson anche definire come i *differenziali di 1.ª specie* esistenti sull'ente algebrico (p dei quali sono linearmente indipendenti).

serie *non* sarà speciale (n.⁰ 74); e per conseguenza

(3) $$r \leq n - p\,.$$

Di qui e dalla (2) si trae subito, confrontando con la (1), che in questa come nella (3) vale il segno d'uguaglianza.

Questo fatto, per quanto si riferisce alla (3), ci prova (tenuto conto che la serie non è speciale) che: *la serie lineare segata sulla curva piana d'ordine* m *da tutte le sue aggiunte di un dato ordine* $>$ m $-$ 3 *è completa*; come già s'era visto (n.⁰ 73) per la serie segata dalle aggiunte d'ordine $m - 3$.

Il valere poi il segno d'uguaglianza nella (1), ossia nella ($3\,b$) del n.⁰ 61 per $l > m - 3$, — come pure nella ($3\,a$) dello stesso n.⁰ per $l = m - 3$ (quest'ultimo fatto in forza del n.⁰ 73), — dimostra (v. l'osservazione che nel n.⁰ 61 fa seguito alla relazione (1′)) che: *per le curve aggiunte d'ordine* $\geq$ m $-$ 3 *di una curva piana d'ordine* m *i passaggi pei punti multipli di questa* (s $-$ 1 *volte per un punto* s-plo) *costituiscono condizioni tutte distinte.* — Ciò non varrebbe più per curve aggiunte d'ordine $< m - 3$ (cfr. n.⁰ 85).

77. *Le aggiunte di un dato ordine qualunque (ove esistano) segano sulla curva piana d'ordine* m *una serie lineare completa.* Ciò è dimostrato (n.ⁱ 73 e 76) per le aggiunte di un dato ordine $\geq m - 3$. Ora dall'esser vero per le aggiunte di un dato ordine minore di m, ad es. per le aggiunte d'ordine $m - 1$, si trae facilmente che vale anche per le aggiunte di un ordine minore, $m - 1 - a$, se esistono. Invero queste ultime curve, insieme con una curva α d'ordine a, fissata ad arbitrio purchè irriduttibile e non passante pei punti multipli della curva fondamentale γ, dànno curve aggiunte d'ordine $m - 1$: sicchè la serie lineare che esse segano su γ si compone di resti degli am punti d'incontro di α con γ rispetto alla serie lineare segata su γ dalle aggiunte d'ordine $m - 1$. Ed abbraccia *tutti* questi resti, poichè ogni aggiunta d'ordine $m - 1$ che passi per quegli am punti dovrà contenere in conseguenza tutta la curva α d'ordine a, e quindi spezzarsi in questa ed in curve aggiunte d'ordine $m - 1 - a$. Applicando dunque il teorema del n.⁰ 56 avremo che, essendo completa la serie data dalle aggiunte d'ordine $m - 1$, è pure completa quella segata dalle aggiunte d'ordine $m - 1 - a$.

78. Applicando lo stesso teorema del n.⁰ 56 ai resti di k punti qualunque rispetto alla serie completa (n.⁰ 77) segata sulla curva piana γ dalle sue aggiunte di un dato ordine avremo: *Le aggiunte*

di un dato ordine passanti per dati punti di γ vi segano, fuori di questi (e dei punti multipli di γ) una serie lineare completa.

Di qui si trae un modo per costruire la serie completa d'ordine n che su γ è individuata da un dato gruppo qualunque di punti G_n. Si conduca per questo una curva aggiunta ψ (il che si può sempre fare, prendendola d'ordine abbastanza elevato), e sia $G_{n'}$ il resto (fuori dei punti multipli di γ) della sua intersezione con γ. Le aggiunte, dello stesso ordine di ψ, passanti per $G_{n'}$, segheranno ulteriormente γ secondo una serie lineare completa che comprende il gruppo G_n: cioè secondo la serie voluta. — Mutando la curva aggiunta ψ muterà $G_{n'}$, anzi muterà anche n' se cambia l'ordine di ψ: ma si otterrà sempre come risultato la stessa serie completa d'ordine n. Si ha così (almeno in parte) quello che i sig[i]. BRILL e NOETHER chiamano *Restsatz* (99), cioè: *se due gruppi di* n *punti sono resti o corresiduali rispetto ad un gruppo di* n′ *punti nel senso che formino con questo l'intersezione di γ (fuori dei punti multipli) e di due curve aggiunte, essi sono pure tali rispetto ad ogni altro resto dell'uno dei due.*

Si vede come in sostanza questo teorema derivi dalla proprietà fondamentale che presentano rispetto ad una curva piana γ le sue aggiunte di un dato ordine di segarla secondo una serie lineare *completa*: proprietà che qui s'è dedotta, in ultima analisi, dalla formola (6) del § 13. Da essa poi s'è tratto il *teorema del resto* applicando un altro fatto essenziale (di carattere più semplice) stabilito nel § 14. Il teorema fondamentale $A\varphi + B\psi$ del NOETHER (v. la prefazione) da cui BRILL e NOETHER traggono quel *Restsatz* è più complesso, ed adempie insieme per questo scopo ai due uffici dei §§ 13 e 14.

79. La proprietà fondamentale suddetta, di segare su γ una serie completa non spetta in generale al sistema di *tutte* le curve di un dato ordine. È facile verificare, scrivendo (analogamente al § 15) la dimensione e l'ordine della serie g_n^r e imponendo la condizione (n.° 65) $n - r \leq p$, che il modo più naturale per avere un sistema lineare di curve di dato ordine l che seghi su γ una serie *completa* consiste nell'assoggettare le curve d'ordine l ad avere in ogni punto s-plo di γ un punto $(s-1)$-plo (100). Ma anche se si considerano curve ag-

(99) Mem. cit., p. 273.

(100) Anche un'altra considerazione può indurre fin da principio a dar la preferenza alle curve aggiunte di γ per la *geometria su* γ. Se su questa curva si sega una serie lineare di dimensione abbastanza elevata mediante un sistema lineare di curve che in un punto P s-plo per γ o non passino o abbiano un punto sem-

giunte per cui un punto s-plo P di γ sia, non solo $(s-1)$-plo, ma s-plo, esse daranno fuori dei punti multipli di γ una serie lineare completa: giacchè l'imporre ad una curva aggiunta che abbia in P un punto s-plo anzi che solo $(s-1)$-plo equivale ad imporle il passaggio per gli s punti di γ che cadono in P; e quindi si è ridotti ad applicare il principio del n.° 78.

Ne segue che dato un *sistema lineare* ∞^k *di curve piane (irriduttibili) del genere* p *determinato dai punti base* e con n intersezioni variabili delle curve del sistema (ossia del *grado* n, seguendo la denominazione introdotta dal sig. JUNG), su ognuna di queste le altre segano una serie lineare g_n^{k-1} *completa*. Sarà dunque (n.° 65):

$$k \geq n - p + 1\,;$$

ed avrà luogo il segno d'uguaglianza se la serie non è speciale, ad es. se $n > 2p-2$, oppure $k > p$; il segno d'inuguaglianza se la serie è speciale. — Ora una superficie razionale d'ordine n (semplice o multipla), la quale sia *normale*, è appunto rappresentata sul piano da un sistema lineare di curve che non sta in uno dello stesso ordine e grado e di maggior dimensione (n.° 26), e che per conseguenza è determinato dai punti base ([101]). In conseguenza potremo dire che *una superficie razionale normale ha per sezioni iperplanari delle curve normali*. Se n è l'ordine e p il genere di queste curve, la superficie appartiene ad S_{n-p+1} od a spazi superiori secondo che le curve non sono ovvero sono speciali. Ecc. ([102]).

§ 19. Il teorema RIEMANN-ROCH.

80. Ritornando al § 17 ed al lemma (n.° 71) che ivi avevamo stabilito e cominciato ad applicare, noi possiamo dedurne per le serie

---

plice, doppio, ... $(s-2)$-plo, il passaggio di un gruppo della serie lineare per gli s punti di γ che cadono in P si avrà imponendo alle curve del sistema un nuovo passaggio per P, e quindi importerà solo 1 condizione, o 2, o 3, ... o $(s-1)$: sicchè quegli s punti di γ presentano particolarità per la serie: formano un gruppo *neutro*. Perchè ciò non accada deve P essere almeno $(s-1)$-plo per le curve del sistema.

([101]) Viceversa è facile vedere, in forza del n.° 26, che una superficie rappresentata da un tal sistema lineare è certo normale; perchè non può accadere che il sistema sia tale che, aggiungendogli una curva fissa, venga a stare entro un sistema lineare di maggior dimensione (ed ordine) ma dello stesso grado del primitivo.

([102]) V. la mia Nota: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* (Rend. Palermo, 1, 1887) [V. p. 105 di questo volume].

lineari *speciali* una proprietà caratteristica che dà ragione del loro nome.

Applichiamolo in fatti al caso di una serie lineare g_n^r sopra la curva canonica (n.º 75), d'ordine $2p-2$ appartenente ad S_{p-1}: esso ci dice che *i gruppi di quella serie stanno in spazi di dimensione* $\leq n-r-1$. Ora poichè quei gruppi stanno in S_{p-1}, ciò non avrà alcun significato se $n-r \geq p$. Ma se invece $n-r<p$, ad es. se la serie è speciale e completa, e se inoltre si suppone $r>0$, quel fatto costituirà una *particolarità* per i gruppi della serie; giacchè lo spazio determinato da n punti *qualunque* della curva è l'S_{p-1} se $n \geq p$, se no un S_{n-1}: in ambi i casi uno spazio la cui dimensione *non* è nelle ipotesi attuali $\leq n-r-1$. Dunque *i gruppi di una serie lineare speciale infinita d'ordine* n *sono veramente speciali, nel senso che un gruppo qualunque di* n *punti dell'ente algebrico* NON *sta in generale in una tal serie* (103).

Di un gruppo di n punti che debba far parte di una g_n^r speciale completa si potranno prendere ad arbitrio sull'ente *al più* $n-r$ punti; giacchè sulla curva canonica i rimanenti r punti dovranno stare sull'S_{n-r-1} che congiunge quegli $n-r$.

81. La proprietà dei gruppi di una g_n^r sopra la curva canonica di stare in spazi di dimensione $\leq n-r-1$ si può anche enunciare dicendo che per essi passano $\infty^{r'}$ iperpiani S_{p-2}, ove $r' \geq p-1-$ $-(n-r)$, ossia:

$$r' \geq p-1-n+r, \tag{1}$$

mentre per un gruppo generico di n punti ne passerebbero ∞^{p-1-n}. S'intende che quest'esponente, od anche r', potrebb'essere negativo e così *svanirebbe* la corrispondente infinità. — Possiamo anche dire che ogni gruppo della g_n^r sta in $\infty^{r'}$ gruppi canonici, od in $\infty^{r'}$ curve φ (sulla curva piana γ), valendo la relazione (1); ossia che esso impone *al più* $n-r$ condizioni (invece di n) agl'iperpiani di S_{p-1}, o ai gruppi canonici, o alle φ, che lo debbano contenere. Tali gruppi canonici, o φ, ecc., esisteranno certo, vale a dire sarà per la (1) $r' \geq 0$, nel caso che $n-r<p$, ad es. nel caso delle serie speciali complete.

82. Il risultato ottenuto si può precisare meglio. Per stabilirlo avevamo fatto uso del lemma del n.º 71, ossia, in ultima analisi, di

(103) Così la serie lineare *completa* determinata da un gruppo di n punti presi in modo generico, se $n>p$ sarà una g_n^{n-p} (non speciale), se $n \leq p$ sarà la g_n^0 che si riduce a quel solo gruppo.

una formola del § 13. Lo completeremo ricorrendo al § 14: appunto come per il *Restsatz* (n.° 78) avevamo adoperato elementi di quei due paragrafi.

Fissiamo come ipotesi che la serie lineare g_n^r dei n.i prec.i sia completa, cioè che r significhi la dimensione della serie *completa* determinata da un gruppo G_n di n punti; ed inoltre che essa sia *speciale*, sicchè $n - r < p$. *Esisteranno* allora (n.° prec.) $\infty^{r'}$ resti $G_{n'}$ di G_n rispetto alla serie canonica e formeranno (n.° 56) una serie *completa* $g_{n'}^{r'}$; ove han luogo la (1) e

(2) $$n + n' = 2p - 2\,.$$

Ma, per le relazioni esistenti fra le due serie complete g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ residue rispetto alla serie canonica (n.° 58), ogni gruppo $G_{n'}$ della seconda starà su ∞^r gruppi canonici, e quindi applicando alla $g_{n'}^{r'}$ la (1) si avrà:

(1′) $$r \geq p - 1 - n' + r'.$$

Sommando queste due formole (1) e (1′), e tenendo conto della (2), si vede che in quelle varrà il segno $=$. Restano dunque pienamente precisate le cose precedenti col seguente teorema, al quale secondo l'uso (v. n.° seg.) daremo il nome di *teorema* RIEMANN-ROCH:

Se un gruppo G_n *determina una serie completa di dimensione* r *e sta in* $\infty^{r'}$ *gruppi canonici (o curve* φ*) si ha:*

(3) $$r' = p - n + r - 1\,,$$

sicchè G_n starà certo in gruppi canonici ($r' \geq 0$) se è speciale (cioè $n - r \leq p - 1$), e viceversa [104]. *In altri termini* G_n *impone precisamente* n — r *condizioni (anzi che* n*) ai gruppi canonici (od alle* φ*) che vengano obbligati a contenerlo* [105].

Possiamo anche enunciarlo sotto quest'altra forma (dovuta ai sig.i BRILL e NOETHER, ed alla quale il sig. KLEIN dà il nome di *teorema di reciprocità*): *se due gruppi risp. di* n *ed* n′ *punti formano, presi insieme, un gruppo canonico, sicchè:*

(2) $$n + n' = 2p - 2\,,$$

---

(104) Invece di dire che G_n sta in $\infty^{r'}$ gruppi canonici, o φ, si dica che *sta in* $(r'+1)$ *gruppi canonici,* o φ, *linearmente indipendenti.* Allora il caso che *non* stia in tali gruppi corrisponderà ad $(r'+1) = 0$, $r' = -1$; ed anche allora varrà la (3) poichè essendo la g_n^r completa non speciale è $r = n - p$.

(105) Ad esempio se una coppia di punti impone *una* sola condizione ai gruppi canonici, essa determina una g_2^1, e quindi l'ente è *iperellittico*: in altri termini se la curva canonica ha un punto doppio essa è una curva doppia.

e se le serie complete d'ordini n, n′ *da essi determinate (serie residue rispetto alla serie canonica) hanno le dimensioni* r, r′, *avrà luogo la relazione* (3), *oppure :*

$$n - n' = 2(r - r'), \tag{4}$$

che si trae dalla (3) raddoppiandola e sottraendone la (2).

83. Si può porre il teorema RIEMANN-ROCH sotto un'altra forma, più analitica, che ci dà ragione del suo nome. Proponiamoci cioè di cercare il numero delle costanti da cui dipende una funzione razionale dell'ente algebrico la quale debba avere tutti i suoi infiniti (semplici) *fra* i punti di un dato gruppo G_n. Se la serie lineare completa g_n^r determinata da questo gruppo si può staccare dall'ente mediante l'equazione :

$$\lambda_0 \psi_0(x) + \lambda_1 \psi_1(x) + \ldots + \lambda_r \psi_r(x) = 0, \tag{5}$$

ed in particolare il gruppo G_n è dato da

$$\psi_0(x) = 0, \tag{6}$$

la detta funzione razionale dell'ente si avrà (n.º 30) dividendo una forma generica (5) per la (6), cioè sarà :

$$\lambda_0 + \lambda_1 \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + \ldots + \lambda_r \frac{\psi_r(x)}{\psi_0(x)};$$

cosicchè conterrà linearmente $r + 1$ costanti arbitrarie $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$. In conseguenza il risultato del n.º preced. si potrà enunciare così :

Le funzioni razionali dell'ente algebrico di genere p, *i cui infiniti (semplici) sono fra gli* n *punti di un dato gruppo, dipendono linearmente da* n − p + 2 + r′ *costanti, se per quel gruppo passano* $\infty^{r'}$ *gruppi canonici* (od iperpiani di S_{p-1}; o se in esso s'annullano $r' + 1$ funzioni φ, o differenziali di 1.ª specie, linearmente indipendenti).

Nel n.º 5 della *Theorie der Abel'schen Functionen* il RIEMANN pel caso di $n > p$ ottiene in generale (dalla rappresentazione delle funzioni razionali dell'ente mediante integrali di 2.ª specie) che quelle funzioni razionali dipendono da $n - p + 1$ costanti (il che corrisponde all'ipotesi che per gli n punti non passi alcuna φ, ossia $r' + 1 = 0$), ed inizia il calcolo per $n \leq p$. Questo calcolo, con l'introduzione delle φ che passano pei dati punti, fu poi fatto completamente dal ROCH [106]; il quale così ottenne la proposizione generale ora esposta.

---

(106) *Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen* (Journal für Math., 64, 1864).

Ciò spiega la denominazione di *teorema* RIEMANN-ROCH (n.^{0} 82) introdotta per iniziativa dei sig^i. BRILL e NOETHER. Non è però inutile rilevare in pari tempo che il ROCH, invece di parlare di funzioni razionali i cui infiniti *sono fra* i punti di G_n, dice che gl'infiniti *sono* i punti di G_n: il che costituisce un'inesattezza, poichè se la g_n^r completa determinata da G_n (e quindi ogni g_n^1 contenente G_n) avesse qualche punto fisso non esisterebbero funzioni razionali aventi n soli infiniti risp. nei punti di G_n; le funzioni razionali i cui infiniti sono *fra* i punti di G_n sarebbero tutte quante *finite* (n.^{0} 30) in quei punti che son fissi per la g_n^r (cfr. il n.^{0} 87).

84. Il teorema RIEMANN-ROCH abbraccia tutte quante le proprietà viste precedentemente (§ 17) delle serie speciali, e permette di precisar meglio qualcuna di esse. Così dal fatto (v. la fine del n.^{0} 80) che di un gruppo G_n che debba far parte di una g_n^r speciale si posson prendere ad arbitrio sull'ente *non più* di $n-r$ punti, mentre quando la g_n^r è data si posson prendere ad arbitrio r punti per determinare un suo gruppo, si trae che $r \leq n-r$, ossia

$$n \geq 2r;$$

cioè la proposizione del n.^{0} 72, dalla quale poi nei n.^{i} 73 e 74 abbiam dedotto varie conseguenze.

Osserviamo inoltre, appunto in relazione colla fine del n.^{0} 80, che se per avere un gruppo G_n che determini una g_n^r speciale completa ed infinita si posson prendere ad arbitrio *precisamente* $n-r$ punti della curva canonica C, deve lo spazio S_{n-r-1} che congiunge $n-r$ punti qualunque di C incontrare ulteriormente questa curva in r punti. Ora si vede facilmente che se C è curva *semplice*, cioè (v. la fine del n.^{0} 75) se l'ente non è iperellittico, la cosa non è possibile se non quando quello spazio sia un iperpiano ([107]), cioè:

$$n-r=p-1.$$

In tal caso la (3) ci dà $r'=0$; sicchè i gruppi G_n saranno i resti rispetto alla serie canonica di $n'=2p-2-n$ punti indipendenti

([107]) V. il principio della Memoria del sig. DEL PEZZO, *Sulle projezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad n dimensioni* (Rend. Acc. Napoli, 1886); non che il n.^{0} 2 della Nota del sig. BERTINI, *Intorno ad alcuni teoremi*, ecc., citata alla fine del n.^{0} 59 (ed il ragionamento del sig. CASTELNUOVO riferito in quella Nota).

rispetto a questa, cioè formanti una $g^0_{n'}$ completa. Dunque: tolto il caso che l'ente sia iperellittico; e tolto il caso delle g^r_n complete che son residue rispetto alla serie canonica di un numero qualunque di punti indipendenti rispetto a questa, supposto cioè:

$$n - r < p - 1 ,$$

saranno *meno* di $n - r$ i punti dell'ente che si posson assumere ad arbitrio per formare un gruppo di una g^r_n speciale completa ([108]). Con tali restrizioni sarà dunque $r < n - r$ ossia

$$n > 2r .$$

In questo modo viene ulteriormente precisato il cit. n.° 72. Il segno d'uguaglianza, cioè la

$$n = 2r$$

potrà valere solo, oltre che nel caso iperellittico (n.° 69), per g^r_n le quali diano

$$n - r \geq p - 1 ,$$

donde (combinando con quella) $r \geq p - 1$; e quindi per nessun'altra serie *speciale* che la serie canonica g^{p-1}_{2p-2}.

§ 20. Alcune applicazioni note.

85. Un'ovvia applicazione del teorema RIEMANN-ROCH serve per rispondere alla questione se una curva piana γ di genere p e d'ordine n sia projezione di una curva dello stesso ordine appartenente allo spazio ordinario o ad uno spazio superiore ([109]). Ciò equivale a dire (v. n.° 26) che la g^2_n staccata su γ dalle rette del suo piano è contenuta in una g^r_n con $r > 2$. La cosa si decide subito se la curva, ossia la g^2_n, *non è speciale*: γ avrà per spazio normale S_{n-p}. In caso contrario, ad esempio se $n < p + 2$, si esprimerà che la serie *completa* contenente la g^2_n, cioè contenente un gruppo di questa, è di dimensione r, dicendo (teorema RIEMANN-ROCH) che quel gruppo sta in $\infty^{p-n+r-1}$ curve φ, cioè aggiunte d'ordine $n - 3$ di γ. Ora siccome quel gruppo si compone di n punti in linea retta, le aggiunte d'ordine $n - 3$ che lo contengono saranno quelle che si spezzano

---

([108]) V. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Abhandl. d. k. Akad. zu Berlin, 1882), teor. III''.

([109]) Per lo spazio ordinario veggasi ad es. NOETHER, loc. cit., § 3; per uno spazio qualunque il § 4 della Nota del sig. BERTINI, *Intorno ad alcuni teoremi*, ecc.

nella retta stessa ed in aggiunte d'ordine $n-4$. Sicchè quel fatto si esprimerà dicendo che γ ammette $\infty^{p-n+r-1}$ curve aggiunte d'ordine $n-4$. Se si contano come *distinte* le condizioni che i punti multipli di γ impongono alle aggiunte d'ordine $n-4$ si trova (n.⁰ 61) che queste curve sono ∞^{p-n+1} : l'essere invece $\infty^{p-n+r-1}$ significa che $r-2$ di quelle condizioni sono conseguenza delle rimanenti. Dunque: *condizione necessaria e sufficiente perchè una curva piana di genere* p *e d'ordine* n, *la quale sia speciale (ad esempio tale che* $\mathrm{n}<\mathrm{p}+2$), *sia projezione di una curva normale dello stesso ordine di* $\mathrm{S_r}$ *è che precisamente* $\mathrm{r}-2$ *fra le condizioni che i passaggi pei suoi punti multipli impongono alle sue curve aggiunte d'ordine* $\mathrm{n}-4$ *siano conseguenza delle rimanenti* (110). (Cfr. la fine del n.⁰ 76).

Con ciò si ha pure un modo per riconoscere se una data curva di uno spazio qualunque S_k sia projezione di una curva dello stesso ordine di uno spazio superiore S_r. Basterà applicare il teorema precedente alla curva γ d'ordine n projezione della curva data da un S_{k-3} sopra un piano; oppure applicarlo addirittura alla data parlando (anzi che di curve aggiunte a γ) di *coni aggiunti* d'ordine $n-4$ uscenti da un S_{k-3}, e (anzi che di punti s-pli di γ) di spazi S_{k-2} s-secanti della curva data uscenti pure dall'S_{k-3}, ecc.

Si osservi anche come si possan subito trasportare con la legge di dualità le considerazioni precedenti. Così il fatto che una curva piana di genere p e d'ordine $n>p+2$ è sempre projezione di una curva sghemba dello stesso ordine dà, per dualità (nello spazio ordinario, sostituendo prima alla curva piana il cono projettante), quest'altro: *una curva piana di genere* p *e di classe* $\mathrm{n}'>\mathrm{p}+2$ *sta sempre su una superficie sviluppabile, non conica, della stessa classe.* Ecc.

86. La questione trattata nel n.⁰ prec. conduce naturalmente a pensare quest'altra: se una curva d'ordine n (di uno spazio qualunque) sia projezione di una curva d'ordine $n+1, n+2, \ldots$ da uno spazio che ne contenga $1, 2, \ldots$ punti. Basterà che ci limitiamo a vedere se una curva C d'ordine n di S_r sia projezione di un'altra C' d'ordine $n+1$ di S_{r+1} da un punto P' di C'. Indicando con P la traccia su C della retta tangente in P' a C', ciò equivale a ve-

(110) Si noti che l'esistenza di curve aggiunte d'ordine $n-4$ trae già di conseguenza che la curva è speciale (perchè i suoi gruppi di n punti in linea retta staranno su aggiunte d'ordine $n-3$). — Il teorema esposto si può completare considerando anche le curve aggiunte d'ordine $<n-4$: v. i lavori citati.

dere se la serie lineare g_n^r che è segata su C dagli S_{r-1} del suo spazio S_r, quando ai suoi gruppi si aggiunga il punto fisso P, dia origine ad una g_{n+1}^r *parziale* (perchè projezione della g_{n+1}^r che su C' è segata dagl'iperpiani passanti per P', la quale è contenuta nella g_{n+1}^{r+1} segata da *tutti* gl'iperpiani), oppure *completa*.

Domandiamo dunque se aggiungendo ai gruppi di una g_n^r sopra un ente di genere p un punto fisso P si può ottenere una g_{n+1}^r *completa*. Perchè ciò accada occorre anzitutto, evidentemente, che già la g_n^r sia completa. Inoltre questa serie dev'essere speciale, altrimenti sarebbe $n - r = p$, e quindi $(n+1) - r > p$, sicchè (n.⁰ 65) la g_{n+1}^r *non* sarebbe certo completa. Supposto che sian soddisfatte quelle due condizioni, cioè che la g_n^r sia speciale e completa, un suo gruppo G_n imporrà, pel teorema RIEMANN-ROCH, $n - r$ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerlo; e per esprimere che anche la g_{n+1}^r è completa si dovrà similmente dire che il suo gruppo costituito da G_n con P impone ai gruppi canonici $(n+1) - r$ condizioni, cioè una condizione di più: vale a dire che non tutti i gruppi canonici passanti per G_n passano anche per P. Dunque *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie completa d'ordine* n + 1 *che contiene un dato gruppo di* n + 1 *punti abbia un punto* P *(di questo gruppo) per punto fisso è che i rimanenti* n *punti del gruppo stiano in gruppi canonici (uno almeno) nei quali non stia* P. Questa proposizione è dovuta al sig. NOETHER [111], che le dà il nome di *teorema di riduzione (Reductionssatz)*.

Ed ora, in base ad essa, possiamo rispondere così alla domanda postaci da principio. *Una curva di genere* p *e d'ordine* n NON *è projezione di una curva d'ordine* n + 1 *di uno spazio superiore solo quando essa è speciale e tale che i gruppi canonici passanti per gli* n *punti in cui essa è segata da un dato iperpiano non abbiano altri punti comuni.* — Ad esempio una curva piana d'ordine n è projezione di una curva sghemba d'ordine $n+1$ da un punto di questa solo quando essa non è speciale, cioè non ammette delle curve aggiunte d'ordine $n - 4$; e quando, essendo speciale, queste curve aggiunte hanno sulla data curva (fuori dei punti multipli) dei punti

---

([111]) V. il n.⁰ 3 della Nota *Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionentheoretischen Satzes des Herrn* WEIERSTRASS (Journal für Math., 97, 1884); cfr. anche Math. Ann., XXXVII, p. 424. — Questo teorema di riduzione si può pure, seguendo il sig. NOETHER, mettere al principio (dopo il teorema del resto) di una trattazione algebrico-geometrica delle serie lineari: veggasi la Memoria del sig. BERTINI pubblicata con questa.

fissi comuni (ognun dei quali si potrà poi assumere come traccia della tangente alla curva sghemba nel centro di projezione).

87. Il *teorema di riduzione* si può (col sig. NOETHER, loc. cit.) enunciare sotto forma più analitica così: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni razionali di un ente algebrico i cui infiniti (semplici) sono fra* n + 1 *punti dati siano tutte finite in uno,* P, *di questi, è che esista almeno un gruppo canonico (una φ) che contenga i rimanenti* n *punti ma non* P. (Cfr. la fine del n.⁰ 83).

Da esso si trae facilmente, seguendo il sig. NOETHER (112), un elegante teorema del WEIERSTRASS, anzi una generalizzazione di esso. Abbiansi sull'ente algebrico n punti *qualunque*, in tal numero però che per essi non passi alcun gruppo canonico (alcuna φ): li ordineremo convenientemente, e chiamandoli $P_1 P_2 \ldots P_n$ considereremo i gruppi di punti che si ottengono da

$$G_m = (P_1 P_2 \ldots P_m),$$

ponendo $m = 1, 2, \ldots, n$, e li assumeremo come gruppi dei punti infiniti di funzioni razionali dell'ente: ossia considereremo delle g^1_m contenenti quei gruppi G_m. Anzitutto prendiamo tanti degli n punti dati da avere un gruppo $G_{\mu+1} = (P_1 P_2 \ldots P_{\mu+1})$ il quale determini una serie completa, priva di punti fissi, e di dimensione 1: sicchè i gruppi minori G_m per $m = 1, 2, \ldots, \mu$ *non* staranno in serie g^1_m. Pel teorema di riduzione i punti $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ imporranno μ condizioni distinte ai gruppi canonici obbligati a contenerli; e questi gruppi passeranno tutti per $P_{\mu+1}$. Se fra gli n punti dati ve ne sono ancora altri pei quali passino tutti quei gruppi, indichiamoli con $P_{\mu+2}, P_{\mu+3}, \ldots, P_{\mu_1-1}$ e poi indichiamo con P_{μ_1} un nuovo punto (degli n). La serie completa determinata da $G_{\mu+2}$ *non* avrà (pel teorema di riduzione) il punto $P_{\mu+2}$ come punto fisso, e quindi sarà ∞^2 (perchè deve contenere la $g^1_{\mu+2}$ che si ha aggiungendo $P_{\mu+2}$ ai gruppi della $g^1_{\mu+1}$ determinata da $G_{\mu+1}$) e non avrà nemmeno punti fissi nei punti precedenti (perchè non ne ha la $g^1_{\mu+1}$ nominata). Similmente non avranno punti fissi le serie determinate da $G_{\mu+3}, \ldots, G_{\mu_1-1}$. Invece la serie completa determinata da G_{μ_1} avrà P_{μ_1} per punto fisso. Ai gruppi canonici che li devon contenere i punti $P_1 \ldots P_{\mu_1}$ impongono $\mu + 1$ condizioni distinte. Se quei gruppi passano ancora per altri punti degli n dati li indicheremo con $P_{\mu_1+1}, P_{\mu_1+2}, \ldots, P_{\mu_2-1}$;

---

(112) Nota citata (Journal für Math., 97).

e con P_{μ_2} indicheremo un nuovo punto. La serie completa determinata da G_{μ_1+1} non avrà per punti fissi nè P_{μ_1} nè P_{μ_1+1}, perchè ogni gruppo canonico che passa per G_{μ_1-1} e per uno di questi due punti passa pure per l'altro; nè ha punti fissi nei punti di G_{μ_1-1}, perchè non ne ha la serie determinata da questo gruppo. Similmente non hanno punti fissi le serie complete determinate da $G_{\mu_1+2}, \ldots, G_{\mu_2-1}$; mentre quella determinata da G_{μ_2} avrà P_{μ_2} per punto fisso. Ed ora si continui, considerando i gruppi canonici passanti per G_{μ_2} — ai quali gruppi canonici sono con ciò imposte $\mu+2$ condizioni distinte —, e quei nuovi punti fra gli n dati che son comuni ad essi; ecc. Si arriverà fino ad aver un gruppo G_{μ_l} che imporrà $p-1$ condizioni distinte ai gruppi canonici, vale a dire che starà in un solo gruppo canonico: sarà evidentemente $l=p-\mu-1$. S'indicheranno allora con $P_{\mu_l+1}, \ldots, P_{\mu_{l+1}-1}$ i nuovi punti fra gli n dati, che stanno in quel gruppo canonico; e finalmente con $P_{\mu_{l+1}}, \ldots, P_n$ i rimanenti.

Allora fra i gruppi di punti G_m i soli che determinino serie complete dotate di punti fissi saranno quelli che corrispondono ai valori seguenti di m:

$$1,\quad 2,\ldots,\quad \mu,\quad \mu_1,\quad \mu_2,\ldots,\quad \mu_{l+1},$$

(ognun dei quali imponeva ai gruppi canonici una nuova condizione, rispetto al gruppo precedente), i quali complessivamente sono in numero di p. Possiamo esprimer ciò in altro modo dicendo che: *tra le funzioni razionali dell'ente che sono infinite risp. nei soli punti dei vari gruppi* G_m $(m=1, 2, \ldots)$ *mancano solo quelle corrispondenti a* p *valori di* m.

È questa la proposizione con cui il sig. NOETHER generalizza un teorema del WEIERSTRASS. Questo (che nelle Lezioni del sommo analista si trova distinto col nome di *Lückensatz*) si deduce supponendo che gli n punti considerati coincidano: *Tra le funzioni razionali dell'ente i cui infiniti coincidono tutti* (*e siano* m) *in un dato punto* (113) *mancano solo quelle che corrispondono a* p *distinti valori del grado* m, *ossia dell'ordine d'infinità di quel punto.* In altri termini se si considerano le serie lineari complete d'ordine m che hanno un dato punto P come m-plo, i valori di m che corrispondono a serie per cui P è punto fisso sono sempre in numero di p. — Rappresentando l'ente di genere $p>1$ con la curva canonica C di S_{p-1}, mancheranno le funzioni razionali di grado m che sono infinite solo

(113) Cotali funzioni hanno un'importanza particolare in quelle Lezioni.

in P, vale a dire la g_m completa determinata dal punto m-plo P avrà questo punto come punto fisso, se (pel teorema di riduzione) esistono iperpiani che in P incontrino $m-1$ volte, e non m volte la curva C. Ciò accade in un punto *generico* di C pei valori [114]

$$m = 1, 2, \ldots, p;$$

in un ordinario punto d'iperosculazione (di contatto con iperpiani stazionari) per

$$m = 1, \ 2, \ldots, \ p-1, \ p+1;$$

ed in generale in un punto singolare qualsiasi di C (v. n.^{0} 43), il quale sia multiplo secondo i (≥ 1) per la curva [115] e conti $i_1, i_2, \ldots, i_{p-2}$ volte come punto comune a questa ed alla retta tangente, al piano osculatore, ..., all'iperpiano osculatore, per

$$m = 1, \ i+1, \ i_1+1, \ i_2+1, \ldots, \ i_{p-2}+1 \text{ [116]}.$$

§ 21. Sulle corrispondenze univoche e sui moduli di un ente algebrico.

88. La determinazione delle serie lineari esistenti sopra un dato ente algebrico si fa in modo noto, basandosi sulle proprietà fondamentali stabilite nei paragrafi preced., specialmente sul teorema Riemann-Roch: possiamo limitarci a rimandare per essa alla Memoria Brill-Noether [117].

Vogliamo invece fare ancora un cenno sulla questione della possibilità di riferire biunivocamente fra loro due enti algebrici di genere p: il che ci condurrà in pari tempo al numero dei *moduli*,

---

(114) Su questo cfr. anche Noether: *Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen* (Journal für Math., 92, 1882).

(115) Tolto il caso iperellittico si ha sempre $i = 1$: v. la 2.ª nota al n.^{0} 82.

(116) Su questi punti singolari dell'ente algebrico ed i valori di m nel *Lückensatz* è ritornato recentemente il sig. Hurwitz nella Memoria citata al n.^{0} 43 (Math. Ann., XLI, 1892). Nel numero complessivo dei punti d'iperosculazione della curva canonica quale risulta dal n.^{0} 42 egli determina l'influenza di un punto singolare qualunque (v. n.^{0} 43); e giunge al notevole risultato che i punti singolari *distinti* sono sempre in numero $> 2p+2$, tolto il caso iperellittico nel quale sono appunto $2p+2$.

(117) Ed anche, per il numero delle serie minime (quando questo numero è finito), alla Nota del sig. Castelnuovo: *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere* (Rend. Acc. Lincei, settembre 1889).

ed alla determinazione degli enti algebrici con infinite trasformazioni biunivoche in sè.

Se $p=0$, cioè se gli enti son *razionali*, esistono sempre ∞^3 corrispondenze biunivoche fra essi: le corrispondenze bilineari. Non vi son moduli.

Se $p=1$, cioè se gli enti sono *ellittici*, vi è (n.° 68) *un* modulo; e vi sono ∞^1 corrispondenze biunivoche fra i punti di un ente, ossia fra quelli di due enti che abbian lo stesso modulo.

In quei due casi di $p=0$ e $p=1$ ogni punto dell'ente si può, con una trasformazione biunivoca di questo, mutare in ogni altro; non vi sono sull'ente punti *particolari* (dal punto di vista della geometria sull'ente). Quando invece si abbia $p>1$ vi saranno sull'ente dei punti particolari, a cui potremo ricorrere per la nostra questione. Tali sono i punti p-pli della serie canonica, i quali sono in generale (n.° 42, per $n=2p-2$, $r=p-1$) in numero di $(p-1)\cdot p(p+1)$ [118]. Per un punto siffatto P indichiamo con m il minimo numero tale che esista una g^1_m di cui P sia punto m-plo: la g^1_m non avrà punti fissi e sarà *unica*, perchè se vi fosse una g^2_m avente P per punto m-plo, il resto di P rispetto ad essa sarebbe una g^1_{m-1} avente P per $(m-1)$-plo. Sarà $m \leq p$; m sarà il primo dei gradi *non* mancanti di funzioni razionali infinite nel solo punto P, del *Lückensatz* del WEIERSTRASS (v. la fine del n.° 87). — Ciò posto la g^1_m che si sarà in tal modo determinata avrà in tutto $2(m+p-1)$ elementi di diramazione o punti doppi. Di questi possono coincidere in uno stesso punto al più $m-1$ (n.° 36): così appunto accade pel punto m-plo P. Ma siccome $m \leq p$ sarà $2(m+p-1)>4(m-1)$, e quindi la g^1_m avrà più di 4 elementi di diramazione *distinti*. Ora se fra due enti γ, γ' vi è una corrispondenza biunivoca, al punto particolare P di γ dovrà corrispondere uno degli analoghi punti (in numero finito), P', di γ', alla g^1_m determinata da P la g^1_m determinata da P': e la corrispondenza biunivoca fra queste due g^1_m dovrà far corrispondere agli elementi di diramazione dell'una quelli dell'altra. Essendo *più di* 4 questi elementi distinti in ogni g^1_m, le corrispondenze siffatte, possibili fra queste, (corrispondenze projettive o bilineari), saranno in numero finito. Fissata poi una corrispondenza fra le due g^1_m le corrispondenze biunivoche possibili

---

(118) Il ragionamento che segue si può riferire alle curve canoniche del genere p. Allora le corrispondenze biunivoche di cui si parla diventano (n.° 75) *collineazioni*.

fra γ e γ' che dànno origine a quella saranno pure in numero finito: anzi non ve ne potrà essere più di una, quando per quelle coppie di gruppi di diramazione omologhi che contengono più punti doppi si sia fissata anche la corrispondenza tra questi ([119]). Concludiamo dunque che: *fra due enti di genere* $p > 1$, *o sopra un ente di tal genere, non vi può essere che un numero finito di corrispondenze biunivoche* ([120]).

Di qui segue poi che sopra un ente di genere $p > 1$ una corrispondenza biunivoca è sempre *periodica* ([121]), ecc.

([119]) Ciò si può dimostrare geometricamente, riducendosi a provare che *una corrispondenza biunivoca fra i punti di* γ *la quale abbia per punti uniti tutti i* $2(m+p-1)$ *punti doppi di una* g^1_m $(m > 2)$ *è un'identità*. Ed invero *una corrispondenza biunivoca non identica fra i punti di un ente del genere* p *non può avere più di* $2p+2$ *punti uniti*: giacchè determina fra i gruppi di una g^1_{p+1} (che non sia trasformata in sè stessa dalla corrispondenza), quando si considerino come omologhi due gruppi che contengano 2 punti omologhi, una corrispondenza $(p+1, p+1)$ la quale avrà $2p+2$ elementi uniti.

Quest'ultima proposizione si trova al principio del lavoro del sig. HURWITZ (Math. Ann., XLI) citato in nota al n.° 87: da essa e dall'altro risultato ivi ricordato sul numero dei punti singolari *distinti* dell'ente algebrico l'A. trae una nuova dimostrazione del fatto che il numero delle corrispondenze biunivoche fra i punti dell'ente è finito.

([120]) Come si sa, è dovuto al sig. SCHWARZ il teorema che un ente di genere $p > 1$ non può ammettere un'infinità *continua* (analitica) di corrispondenze birazionali: v. *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler, eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen* (Journal für Math., 87, 1879). Che ciò valga anche per un'infinità qualunque, *discontinua*, sembra esser stato dimostrato per la prima volta dal sig. KLEIN in una lettera del 1882 al sig. POINCARÉ (v. p. 16 della Nota di quest'ultimo: *Sur un théorème de* M. FUCHS, Acta math., 7, 1884). Del resto la seconda delle due Note (Math. Ann., XX e XXI, 1882-83) che il sig. NOETHER ha dedicato al teorema del sig. SCHWARZ contiene una dimostrazione che si può estendere al caso di un'infinità discontinua di corrispondenze: ed è appunto quella dimostrazione opportunamente modificata che sopra si è esposta.

Nuovi importanti risultati sulle corrispondenze biunivoche che possono esistere sopra un ente algebrico si trovano poi nel lavoro del sig. HURWITZ: *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* (Gött. Nachr., 1887; Math. Ann., XXXII), e nell'altro più recente (Math. Ann., XLI) già citato.

([121]) Cfr. i citati lavori del sig. HURWITZ. V. anche una mia Nota (Rend. Ist. Lomb., 1888) citata nella prefazione, per la convenienza di rappresentare l'ente mediante la curva canonica, e quindi le corrispondenze biunivoche sull'ente mediante collineazioni (cicliche) che mutano in sè questa curva (ad es. pel caso delle corrispondenze *involutorie*, cioè degli enti che considereremo al n.° 90).

89. Dal ragionamento precedente si trae anche subito il numero dei moduli. In generale dei $2(m+p-1)$ elementi di diramazione della g_m^1 di γ ve ne saranno $m-1$ coincidenti in quello che contiene il punto P e poi altri $m+2p-1$: in tutto $2p+m$ elementi distinti; e quindi $2p+m-3$ birapporti. Per tutti gli enti equivalenti (per trasformazioni birazionali) a γ questi birapporti avranno gli stessi valori (sebbene non siano individuati questi valori, non essendo il punto P su γ *individuato*, ma solo *determinato* in un numero finito di modi). Viceversa dati questi birapporti, comunque, un *teorema d'esistenza per le funzioni algebriche*, del RIEMANN [122] ci assicura che esistono degli enti di genere p contenenti una g_m^1 con un elemento di diramazione $(m-1)$-plo e $2p+m-1$ elementi di diramazione semplici, i quali abbiano precisamente quei dati birapporti: e ci dice anzi che quegli enti costituiscono un numero finito di *classi* di enti equivalenti (per trasformazioni birazionali). Dunque quei birapporti, nel senso spiegato, si posson riguardare come moduli dell'ente algebrico: *i moduli sono* $2p+m-3$. Se l'ente è *generale* di genere $p>1$, sarà $m=p$ (P sarà un punto p-plo della serie canonica) e quindi *i moduli dell'ente generale di genere* $p>1$ *sono* $3p-3$. Se l'ente è iperellittico, P sarà un punto doppio della g_2^1; si avrà $m=2$, ed il numero dei moduli si ridurrà a $2p-1$ come al n.° 67.

90. Possiamo determinare il numero dei moduli in un altro caso, che pure abbraccia il caso iperellittico: quello di un *ente del genere* p *che contenga una ed una sola involuzione di 2.° grado del genere*

---

(122) *Th. d.* ABEL'*schen Funct.*, n.i 3 e 5: il teorema consiste in questo, che si posson fissare *ad arbitrio* i $2(m+p-1)$ punti di diramazione della superficie ad m fogli distesa sul piano xy per determinare un sistema di funzioni algebriche di $x+iy$ diramate come questa superficie; e questo sistema risulta bene individuato quando si sia fissato per ciascun punto di diramazione quali sono i fogli che esso congiunge. Cfr. anche la determinazione del numero dei moduli, fatta nel n.° 12 di quella Memoria.

Non sembra che finora si sia riusciti a stabilire per via geometrica, od algebrica, il teorema di RIEMANN relativo al numero dei moduli, in modo pienamente soddisfacente. Nella Memoria BRILL-NOETHER esso è dimostrato in vari modi (l'uno dei quali adopera appunto, come sopra si fa, una g_p^1 con punto p-plo): i quali però presuppongono tutti, in sostanza, il suddetto teorema d'esistenza (o qualcosa di equivalente) per completare i conti di costanti con cui si stabilisce l'esistenza di certe curve (ad es. di curve per cui si sono assegnati *ad arbitrio* i birapporti degli elementi di diramazione di una g_m^1, ecc.).

π, vale a dire di un ente che equivalga ad una curva di genere p tracciata sopra una rigata del genere π in guisa da incontrarne due volte le generatrici (e da esser semplice per la rigata): come la curva d'intersezione della rigata con una quadrica. Dal n.^{0} 22 (nota) segue (salva la restrizione ivi indicata) che i moduli di un ente così fatto saranno i moduli dell'ente di genere π costituito dall'involuzione di 2.^{0} grado, più i moduli od invarianti per trasformazioni birazionali che su quest'ente hanno gli elementi di diramazione dell'involuzione, i quali sono (n.^{0} 40) in numero di $2(p-2\pi+1)$. È chiaro che ognuno di questi elementi ha un modulo: tolti i casi di $\pi=0, 1$, nei quali corrispondentemente alle ∞^3, ∞^1 trasformazioni biunivoche ammesse dall'ente di genere π si diminuisce di 3 o di 1 unità il numero complessivo $2(p-2\pi+1)$ dei moduli di quegli elementi. Ma in quei casi aumenta risp. di 3 o di 1 il numero dei moduli di quell'ente, che per $\pi>1$ sarebbe $3\pi-3$. Dunque in tutti i casi *il numero dei moduli dell'ente di genere* p *considerato* sarà:

$$(3\pi-3)+2(p-2\pi+1)=2p-\pi-1 .$$

Quest'espressione, tanto minore quanto maggiore è π, fa vedere che per un ente di genere p il contenere un'involuzione di 2.^{0} grado costituisce una particolarità tanto maggiore quanto più grande è il genere di tale involuzione.

§ 22. **Sulle rigate algebriche.**

91. Termineremo questo lavoro con qualche applicazione alle rigate e varietà costituite da ∞^1 spazi ([123]).

Nel § 13 abbiamo ottenuto, per una varietà M_{k+1} d'ordine ν luogo di una ∞^1 del genere π di spazi S_k, ognun dei quali contenga $k+1$ punti di una curva d'ordine n e genere p, la formola (n.^{0} 52):

$$n-p=\nu-(k+1)\pi+k+z ; \tag{1}$$

e questa (per $\pi=0$) è poi stata fondamentale in questo 3.^{0} Cap. per ottenere le proprietà essenziali delle serie lineari speciali sopra la curva di genere p. Ora da essa possiamo inversamente, valendoci di queste proprietà, dedurre risultati importanti per la varietà M_{k+1}.

([123]) V. i miei lavori sulle rigate e in generale sulle varietà composte di ∞^1 spazi, citati nella prefazione.

Si osservi in fatti che, data ad arbitrio in S_r la varietà M_{k+1}, si posson sempre tracciare su essa infinite curve γ ognuna delle quali incontri gli S_k generatori della M_{k+1} in $k+1$ punti, per modo che sempre, senz'eccezione, il gruppo di $k+1$ punti di ogni S_k si componga di punti linearmente indipendenti, cioè non situati in uno spazio minore, sicchè, pel significato di z nella formola (1) applicata ad una tal curva,

$$z = 0 .$$

Si ottiene, ad esempio, una tal curva segando la M_{k+1} con un cono M_{r-k} projettante da un S_{r-k-2} (che non incontri la M_{k+1}) una curva razionale normale d'ordine $k+1$ (124): giacchè un tal cono è segato da un S_k generatore della M_{k+1} secondo $k+1$ punti, che si posson riguardare come situati su una curva razionale normale d'ordine $k+1$, e quindi non possono giacere in uno spazio inferiore. Ciò posto, se n è l'ordine e p il genere di una curva γ della detta specie, varrà la (1) con $z=0$. Se γ è projezione di una curva γ' dello stesso ordine n appartenente ad uno spazio superiore ad S_r, la M_{k+1} data sarà projezione di una M_{k+1} appartenente a questo spazio superiore, luogo degli S_k contenenti i gruppi di punti di γ' che han per projezioni i gruppi di $k+1$ punti di γ posti negli spazi generatori della varietà data. L'ordine della nuova M_{k+1} sarà ancora ν: poichè in caso opposto dovrebbe qualcuno dei suoi S_k incontrare lo spazio centrale di projezione, donde deriverebbero su γ dei gruppi di $k+1$ punti posti in spazi inferiori ad S_k, il che è contrario all'ipotesi fatta su γ. Adunque la M_{k+1} data è o non è projezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore secondo che la stessa proprietà ha o no una qualunque delle curve γ tracciate su essa nel modo detto. Applicando a queste curve un risultato del n.° 65, e tenendo conto della (1) avremo che: *Una varietà* M_{k+1} *luogo di una* ∞^1 *del genere* π *e d'ordine* ν *di spazi* S_k *ha per spazio normale uno di dimensione*

$$\nu - (k+1)\pi + k ,$$

oppure maggiore: ciò a seconda che le dette curve γ tracciate su essa sono *non speciali* oppure *speciali*. Corrispondentemente a ciò si potrebbe chiamar *speciale* la varietà M_{k+1} nel 2.° caso.

---

(124) Se $r = k+1$, cioè se si tratta di una ∞^1 di spazi S_k in S_{k+1}, per la curva che si vuol costrurre si potrà addirittura assumere una curva razionale normale d'ordine $k+1$ (contata tante volte quanta è la classe di quella ∞^1 di spazi).

Se $\pi = 0$, visto che una M_{k+1}^{ν} non può appartenere ad uno spazio superiore di $S_{\nu+k}$, sarà precisamente questo lo spazio normale: cioè *le* $\mathrm{M}_{\mathrm{k}+1}^{\nu}$ *luoghi di una* ∞^1 *razionale di* S_{k} *son proiezioni di quelle (dello stesso ordine) appartenenti ad* $\mathrm{S}_{\nu+\mathrm{k}}$.

Si avverta che queste proposizioni valgono anche per le varietà ∞^1 di S_k contenute nello spazio S_{k+1}: ν indicherà allora la *classe* della varietà (come già si osservò al n.^{0} 50) ([125]). — Ed anche si noti come applicando ad una curva γ della M_{k+1}, invece che il n.^{0} 65, una proposizione del n.^{0} 86, si possa riconoscere se la M_{k+1} sia projezione di varietà appartenenti a spazi superiori e di ordini *superiori*: il che può anche esser utile.

([125]) In conseguenza, posto $k = 1$, i risultati che nei miei lavori sulle rigate sono stabiliti mediante projezione delle rigate *normali* (v. specialmente, per quelli più generali relativi al genere p, il lavoro dei Math. Ann., XXXIV), in particolare le proposizioni sulle *direttrici* dei vari ordini (ad es. su quelle *d'ordine minimo*) di una rigata, valgono anche per le rigate *piane*, vale a dire per gl'inviluppi piani di rette; dànno cioè le varie curve (punteggiate) che con una data ∞^1 di rette del piano sono in corrispondenza biunivoca e *prospettiva*, ossia tale che ogni punto sta sulla retta omologa; e forniscono così le generazioni di una curva piana algebrica come inviluppo delle rette congiungenti i punti omologhi di due curve in corrispondenza biunivoca. — Similmente si può procedere per $k = 2$, ed applicando metodi analoghi a quelli dei citati lavori sulle rigate si possono ottenere facilmente (*e sarebbe bene che fosse fatto*) dei risultati sulle curve (e rigate) direttrici di una varietà ∞^1 di piani, anche nel caso che questa stia nello spazio ordinario, vale a dire che si tratti dei piani di una sviluppabile ordinaria. Si avranno così le curve (e rigate) riferite prospettivamente ad una ∞^1 di piani, e quindi le generazioni di questa varietà mediante i piani congiungenti i punti omologhi di tre curve in corrispondenza univoca (o mediante i piani congiungenti le rette ed i punti omologhi di una rigata ed una curva in corrispondenza univoca).

Nel caso che la varietà di piani sia *razionale* la cosa è già effettuata nella mia Nota: *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (Atti Acc. Torino, XXI, 1885), ed in quella simultanea del sig. Brill: *Ueber rationale Curven und Regelflächen* (Sitzber. bay. Akad., 1885; ristampata nei Math. Ann., XXXVI, 1890). E quelle stesse quistioni, o le duali, relative ad una curva razionale, piana o sghemba, si ritrovano in lavori più recenti del sig. W. Stahl (*Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven*, Math. Ann., XXXVIII, 1891; *Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven*, Math. Ann., XL, 1892; ecc.) e d'altri; senza che nessuno abbia avvertito come esse sian risolte dai miei lavori sulle rigate, e varietà di piani, razionali. Richiamo l'attenzione su ciò non per la questione di priorità, ma per rilevare come i metodi geometrici da me adoperati diano molto di più che quelli algebrici usati da quegli Autori: diano cioè la risoluzione degli stessi problemi pel genere *p qualunque* (v. ad es. il cit. lavoro, Math. Ann., XXXIV).

92. Limitiamoci ora al caso di $k = 1$, cioè delle rigate. Avremo, come caso particolare, dal n.° prec., che *una rigata di genere* p *e d'ordine* ν *ha per spazio normale un* $S_{\nu-2p+1}$, *od uno spazio superiore.*

Poniamo che la rigata sia *piana*, cioè si riduca al sistema delle tangenti di una curva piana di genere p e *classe* ν. Avremo che se $\nu \geq 2p + 2$ la curva, e precisamente la serie delle sue tangenti, si può sempre ottenere come projezione (contorno apparente) di una rigata (appartenente ad $S_{\nu-2p+1}$ e quindi *non* piana) d'ordine ν. Indicando con n l'ordine e con r il numero delle cuspidi (o più in generale dei punti di diramazione) della curva piana, la relazione (n.° 37) $\nu + r = 2(n + p - 1)$ riduce la condizione $\nu \geq 2p + 2$ a

$$r \leq 2n - 4 .$$

Dunque: *una curva piana (non retta) di genere* p *e di classe* $\nu \geq 2p + 2$, *ossia d'ordine* n *e con un numero di cuspidi (punti di diramazione)* $\leq 2n - 4$, *ad esempio una curva priva di tali singolarità, è sempre il contorno apparente di una rigata non piana (di genere* p *e d'ordine* ν*) da un punto esterno* (126).

Trasportando per dualità (nello spazio) si ha quest'altro teorema: *una curva piana di genere* p *e d'ordine* $n \geq 2p + 2$, *ossia una curva piana di classe* ν *con un numero di flessi (tangenti di diramazione)* $\leq 2\nu - 4$, *sta sempre su una rigata non cono dello stesso ordine.*

In questi enunciati le condizioni che abbiamo imposte alla curva piana son *sufficienti*, ma non *necessarie*. Per riconoscere in qualunque caso se essi valgano anche non verificandosi le dette condizioni si farà così (v. n.° 91). Si costruisca una curva γ, semplice o multipla, in tal corrispondenza con la serie delle tangenti della data curva piana C che ogni tangente di questa abbia due punti omologhi su γ e li contenga, mentre ogni punto di γ abbia per omologa una sola tangente di C (passante per esso); e che la coincidenza dei due punti di γ corrispondenti ad una stessa tangente di C abbia solo luogo per *contatti*, non in punti doppi di γ. Così γ potrà essere (secondo il metodo generale del n.° 91) la curva d'intersezione di una conica con la rigata delle tangenti di C, vale a dire una curva d'or-

(126) Sappiamo poi che quando ad es. è $n \geq p + 3$ la curva è projezione di una curva sghemba dello stesso ordine; sicchè la rigata d'ordine ν su nominata si potrà assumere sviluppabile se la curva piana non ha cuspidi (in caso contrario queste potrebbero esigere che il centro di projezione giaccia sulla sviluppabile). — Osservazione duale (v. n.° 85) per la proposizione duale.

dine 2ν composta di quella conica riguardata come ν-pla; oppure il luogo delle intersezioni delle tangenti di C cogli elementi omologhi di un sistema ∞^1 di coniche in corrispondenza biunivoca con quelle tangenti. In ogni caso si veda se la curva γ così ottenuta è speciale o no. Se non è speciale, le condizioni che sopra abbiam poste per la 1.ª proposizione, cioè $\nu \geq 2p + 2$ od $r \leq 2n - 4$, saranno necessarie. Se invece γ è speciale sarà C il contorno apparente di una rigata non piana d'ordine ν anche se $\nu = 2p + 1$ ossia $r = 2n - 3$; e potrà esserlo anzi per valori minori di ν. — Dualmente si opera per la proposizione duale.

93. Le rigate che al n.º 91 abbiam detto potersi chiamare speciali, quelle cioè d'ordine n e genere p che hanno per spazi normali spazi superiori ad S_{n-2p+1} (cioè $p > 0$), presentano delle proprietà particolari che vogliamo ancora esaminare.

Anzitutto possiam subito vedere che *una rigata d'ordine* n *e genere* $\mathrm{p} > 0$ *che abbia per sezioni iperplanari delle curve normali è un cono.* Invero sia S_r il suo spazio: due S_{r-1} generici taglieranno la rigata secondo due curve normali d'ordine n, le quali dalle generatrici della rigata son riferite univocamente, con un gruppo di n punti uniti nei punti d'incontro della rigata coll'S_{r-2} comune ai due S_{r-1}. La corrispondenza fra le due curve sarà dunque (n.º 57) contenuta in una *collineazione* tra i loro spazi: e questa avendo n punti uniti su un S_{r-2}, con $n \geq (r-2) + 2$ (ossia $n \geq r$, perchè quelle curve d'ordine n degli S_{r-1} sono di genere > 0 e quindi appartengono a spazi inferiori ad S_n), mentre $r - 1$ qualunque di quei punti non stanno in un S_{r-3} (cfr. la nota ([107])), avrà tutti i punti dell'S_{r-2} per punti uniti, cioè sarà una *prospettività*: le rette congiungenti i punti omologhi, in particolare le generatrici della rigata, passeranno per uno stesso punto. La rigata è dunque un cono.

Così ad esempio *se una rigata di genere* $\mathrm{p} > 0$ *e d'ordine* $\mathrm{n} > 2\mathrm{p} - 2$ *appartiene ad un* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p+1}}$, *ovvero ha un tale spazio per spazio normale, essa è un cono.* — Si noti che con quelle ipotesi, $p > 0$ e $n > 2p - 2$, gli spazi normali per le rigate speciali vanno da S_{n-2p+2} ad S_{n-p+1} (v. la fine del n.º 74): sicchè la proposizione ora enunciata si riferisce alle rigate speciali *estreme.*

94. Proposizioni molto più generali potremo ottenere per un'altra via, basata sul teorema Riemann-Roch.

Sia F una rigata di genere $p > 0$ e d'ordine n appartenente ad S_r. Per un numero $i + 1$ di generatrici arbitrarie, ove $i \geq 0$ ed inoltre, per ciò che diremo poi, $i \leq p - 1$, conduciamo un iperpiano S_{r-1}: ciò sarà sempre possibile se

$$(1) \qquad r \geq 2i + 2 .$$

L'intersezione residua di quell'iperpiano con F sarà una curva d'ordine $n - i - 1$, la quale potrà spezzarsi ulteriormente. Comunque però essa sia, non potrà stare in un S_{r-2} nell'ipotesi già fissata di $i \leq p - 1$, altrimenti gl'iperpiani passanti per questo spazio segherebbero F (oltre che in quella curva) in una serie lineare g_{i+1} di generatrici, di cui farebbe parte il gruppo di $i + 1$ ($\leq p$) generatrici che s'era *scelto ad arbitrio*, il che contraddirebbe al teorema Riemann-Roch.

Supposto dunque, per maggior generalità, che quella curva d'ordine $n - i - 1$ si spezzi in una curva γ^m d'ordine m *direttrice* irriduttibile, semplice o multipla, ed in $(n - m - i - 1)$ generatrici (numero ≥ 0), dovrà lo spazio S_h a cui *appartiene* γ essere di dimensione

$$(2) \qquad h \geq r - n + m + i :$$

altrimenti esso, insieme con quelle generatrici (che si appoggiano a γ, e quindi ad S_h), determinerebbe uno spazio di dimensione $r - 2$, o minore, che conterrebbe la curva complessiva.

La curva γ^m di S_h è certo *speciale* se

$$h \geq m - p + 1 ,$$

condizione che è sicuramente soddisfatta, grazie alla relazione (2), se poniamo la seguente condizione

$$(3) \qquad i \geq n - p - r + 1 .$$

Siccome $i \leq p - 1$, questa nuova condizione ha per conseguenza

$$(4) \qquad r \geq n - 2p + 2 ,$$

e quindi esige che F sia una *rigata speciale.* Supposto che così sia, siccome lo spazio normale della rigata sarà S_{n-2p+2} od uno spazio superiore, potremo anche supporre soddisfatta la (4); ed allora la (3) ci darà per i un limite minimo che riescirà $\leq p - 1$, cosicchè la si potrà soddisfare con un valore di i tale che $0 \leq i \leq p - 1$. Se si può fare in modo che quel valore di i verifichi anche l'altra condizione (1), potremo asserire che la curva γ^m da noi costruita è speciale. Ora la (1) varrà certo se $r \geq 2p$ (poichè $p \geq i + 1$); od anche se $n \geq 4p - 2$, perchè da questa e dalla (4) segue $r \geq 2p$. Possiamo dunque dire che *una rigata di genere* $\mathrm{p} > 0$ *e d'ordine* n *la quale sia speciale, cioè abbia per spazio normale un* $\mathrm{S_r}$ *ove* $\mathrm{r} \geq \mathrm{n} -$

$-2p+2$, *contiene sempre una curva direttrice speciale (se esiste un valore di* i *compreso tra* 0 *e* $p-1$, *i limiti inclusi, il quale verifichi le condizioni* (1) *e* (3); *ed in particolare) se è* $r \geq 2p$, *od anche se è* $n \geq 4p-2$. S'intende che quella curva potrà esser *semplice* o *multipla*.

95. Il fatto che la curva γ di genere p, d'ordine m, di S_h è speciale ci dà (n.[i] 74 e 72):

$$h \leq p-1, \qquad m \leq 2p-2,$$
$$m \geq 2h.$$

Ma possiamo ottenere pei numeri h ed m delle limitazioni ulteriori, considerando la serie lineare g_{n-m}^{r-h-1} che sulla rigata F è segata dagl'iperpiani passanti per S_h, e supponendo che questa serie *non* sia speciale. *Basta* perciò che la sua dimensione sia $\geq p$, vale a dire:

$$r \geq p+h+1;$$

oppure che il suo ordine sia $\geq 2p-1$, vale a dire:

$$n \geq 2p+m-1.$$

La 1.ª condizione si verifica certo, in causa della $h \leq p-1$, se poniamo:

$$r \geq 2p;$$

la 2.ª invece, in causa della $m \leq 2p-2$, se poniamo:

$$n \geq 4p-3.$$

Allora dal fatto che quella serie non è speciale seguirà:

$$(n-m)-(r-h-1) \geq p,$$

ossia:

(5) $$m-h \leq n-p-r+1.$$

Questa confrontata con la (3) dà:

(6) $$m-h \leq i.$$

E d'altra parte la (5) stessa, o la (6), in forza della $m \geq 2h$ dànno pure:

(7) $$h \leq n-p-r+1$$

(8) $$h \leq i.$$

Ora s'indichi di nuovo con S_r lo spazio normale per la rigata, e nella costruzione della curva γ fatta nel n.º prec. si prenda per i il valor minimo, cioè, per la (3),

$$i=n-p-r+1,$$

sicchè la condizione (1) diventa:

$$n \geq p + 3i + 1 .$$

Potremo allora completare l'enunciato con cui finiva il n.º prec. così: *Se si pone* $r = n - p - i + 1$, $(0 \leq i \leq p - 1)$, *la rigata contiene una curva direttrice speciale (se* $n \geq p + 3i + 1$ *ed in particolare) se* $n \geq 4p - 2$, *oppure se* $r \geq 2p$ *(vale a dire* $n \geq 3p + i - 1$); *e sotto l'una o l'altra di queste due condizioni lo spazio normale per quella curva sarà di dimensione* $h \leq i$, *mentre l'ordine* m *della curva stessa sarà tale che* $2h \leq m \leq h + i$.

Dando ad i i valori $0, 1, 2, \ldots$ (il primo dei quali riporterà al teorema del n.º 93); ovvero a p i valori $1, 2, \ldots$; si otterranno come casi particolari una serie di proposizioni notevoli relative alle rigate speciali.