$A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_\delta B_\delta$ in einem beliebig gewählten Punkte stützt. Bei allgemeiner Wahl dieser δ Durchstoßpunkte wird der Raum S_{r-2} noch weitere $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p - \delta$ Sehnen von D treffen, die untereinander und von den vorhergehenden verschieden sind. Projiziert man daher von dem festgelegten Raum S_{r-2} aus die Kurve D auf eine Ebene α, so erhält man in α eine Kurve C von der n-ten Ordnung mit $d' = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ Doppelpunkten; von diesen rühren δ, die wir die Doppelpunkte R nennen, von den Sehnen $A_1 B_1, \dots, A_\delta B_\delta$ her, während die anderen $d = d' - \delta$, die wir die Doppelpunkte Q nennen wollen, von den übrigen das Projektionszentrum durchdringenden Sehnen herstammen. Auf diese Weise ist die Kurve Γ birational in eine ebene Kurve C transformiert, die nur gewöhnliche Doppelpunkte besitzt, so daß den δ auf Γ festgelegten Punktepaaren $\delta = d' - d$ Doppelpunkte von C entsprechen (jeder von diesen ist Ursprung von zwei verschiedenen Zweigen).

In dieser Transformation entspricht jeder linearen Schar von Γ, für die die δ Punktepaare neutral sind, eine lineare Schar von C, für welche die in den Doppelpunkten R zusammenfallenden Punktepaare neutral sind, d. h. eine lineare Schar, die auf der Kurve C mit den vorgeschriebenen Doppelpunkten Q und den $\delta = d' - d$ virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkten R existiert. Man kann nun ohne weiteres die Ergebnisse, die oben für die linearen Scharen auf der Kurve C mit den vorgeschriebenen Doppelpunkten Q angegeben wurden, auf die linearen Scharen von Γ übertragen, für welche die δ Punktepaare neutral sind, und hieraus ergeben sich dann die oben ausgesprochenen Sätze.

Der Begriff der zu einer gegebenen ebenen Kurve *nicht adjungierten Kurven* ist für den allgemeinen Fall von Kurven mit beliebigen Singularitäten von M. Noether ausführlich entwickelt worden (Math. Ann. **15**, 507 (1879)). Man gelangt in diesem allgemeinen Fall zu *zwei verschiedenen Formen des Riemann-Rochschen Satzes;* in dem von uns betrachteten Fall von Kurven, die nur gewöhnliche Doppelpunkte besitzen, fallen die beiden Sätze zusammen. Etwas früher als Noether beschäftigte sich F. Lindemann mit der Ausdehnung des Riemann-Rochschen Satzes auf nicht adjungierte Kurven (Untersuchungen über den Riemann-Rochschen Satz, Programmschrift, Leipzig 1879).

13. Über die Klassifikation der Raumkurven und Überraumkurven, über die Berechnung der Mannigfaltigkeitsstufe der zu einer gegebenen Kurve gehörigen linearen Scharen und über die Normalkurven des Geschlechts p.

1. Familien algebraischer Raum- oder Überraumkurven. Unterfamilien. Eine *irreduzible* algebraische Mannigfaltigkeit von algebraischen

Kurven n-ter Ordnung in einem Raume $S_r (r \geq 3)$, die nicht in einer umfassenderen irreduziblen Mannigfaltigkeit von Kurven derselben Ordnung enthalten ist, wird eine *Kurvenfamilie* des Raumes S_r genannt.

Jede irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit H von Kurven n-ter Ordnung des Raumes S_r, der die allgemeine Kurve C der Familie V angehört, ist ganz in V enthalten. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde die Mannigfaltigkeit H, sobald sich C in V bewegt, eine Mannigfaltigkeit beschreiben, die umfassender wäre als V und V enthielte.

Eine irreduzible Mannigfaltigkeit W von Kurven aus V, die einer bestimmten Eigenschaft P genügen, ist eine *Familie von Kurven, die der vorgeschriebenen Eigenschaft genügen*, vorausgesetzt, daß sie nicht in einer umfassenderen Mannigfaltigkeit von Kurven aus V enthalten ist, die der Bedingung P genügen; in bezug auf V wird sie eine *Unterfamilie* genannt.

So bilden z. B. die rationalen Kurven 5-ter Ordnung ohne mehrfache Punkte im Raume S_3 eine Familie V, deren allgemeine Kurve eine einzige 4-fach schneidende Sekante besitzt. Innerhalb V bilden die rationalen Kurven 5-ter Ordnung mit unendlich vielen 4-fach schneidenden Sekanten eine Unterfamilie W; jede dieser Kurven 5-ter Ordnung liegt auf einer Fläche 2-ter Ordnung, deren eine Regelschar aus den genannten unendlich vielen 4-fach schneidenden Sekanten besteht. Ebenso bilden die rationalen Kurven 5-ter Ordnung mit einem Doppelpunkt innerhalb V eine Unterfamilie W', usw.

Wir haben gesehen, daß in der Ebene die irreduziblen Kurven n-ter Ordnung mit d gewöhnlichen Doppelpunkten eine einzige Familie bilden (Anhang F, Nr. 11, S. 347). Im Raum S_r dagegen $(r \geq 3)$ verteilen sich die irreduziblen Kurven n-ter Ordnung ohne mehrfache Punkte im allgemeinen auf mehrere Familien. So verteilen sich z. B. im Raum S_3 die Kurven 4-ter Ordnung auf zwei verschiedene Familien V_1, V_2; die allgemeine Kurve von V_1 ist eine elliptische Kurve 4-ter Ordnung (*erster Art*), während die allgemeine Kurve von V_2 eine rationale Kurve 4-ter Ordnung (*zweiter Art*) ist. Beide Familien haben die Dimension 16; sie haben die Unterfamilie der rationalen Kurven 4-ter Ordnung mit einem Knotenpunkt gemeinsam, und diese hat die Dimension 15.

Bei der Frage nach der *Klassifikation der algebraischen Raum- oder Überraumkurven* kann man sich offenbar auf die irreduziblen Kurven beschränken; denn die einzelnen Bestandteile einer zerfallenden Kurve, die in einer Familie veränderlich ist, beschreiben je eine Familie irreduzibler Kurven. Das Problem selbst besteht in folgendem: *Man soll für jeden Wert der Ordnung n alle möglichen Familien von irreduziblen Kurven n-ter Ordnung ohne mehrfache Punkte bestimmen, die dem Raum S_r angehören.*

Osservazione

<u>Bemerkung</u>. Will man die Ergebnisse der Klassifikation der Kurven ohne mehrfache Punkte auf Kurven mit beliebigen Singularitäten anwenden, so muß man für die Kurven des S_r dieselbe <u>Forderung</u> aufstellen, die wir schon in Nr. 4 des Anhangs F (S. 318) für die ebenen Kurven aufgestellt haben. Diese Forderung, die wir im Falle der ebenen Kurven in Nr. 10 des Anhangs F (S. 342) für $n \geqq p+2$ bewiesen haben und in Nr. 10 des Anhangs G (S. 398) für $n \geqq \frac{2}{3}p+2$ noch beweisen werden, sagt aus, daß eine irreduzible Kurve des S_r mit beliebigen Singularitäten immer als Grenzfall einer Kurve ohne mehrfache Punkte aufgefaßt werden kann. Die mit beliebigen Singularitäten ausgestatteten Kurven werden sich auf eine gewisse Anzahl Unterfamilien verteilen, die in den Kurvenfamilien ohne mehrfache Punkte enthalten sind.

alternativa

Im folgenden werden wir niemals Gelegenheit haben, uns des angeführten Postulats zu bedienen; *es wird überdies in Nr. 5 (S. 369) für $n \geqq p+r$ und in Nr. 10 (S. 399) für $n \geqq \frac{r}{r+1}p+r$ bewiesen werden.*

Von jetzt ab sollen die Kurven, mit denen wir uns zu beschäftigen haben, immer frei von mehrfachen Punkten angenommen werden, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird.[1])

2. Eigentliche und uneigentliche Doppelpunkte einer Familie. Es sei V eine Familie irreduzibler Kurven C von der n-ten Ordnung im Raume $S_r (r \geqq 3)$, und p sei das Geschlecht der allgemeinen Kurve C.

In der Ebene kann bei einer irreduziblen Kurve n-ter Ordnung vom Geschlecht p, die in einer Familie von Kurven mit $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ Doppelpunkten veränderlich ist, kein weiterer Doppelpunkt auftreten, ohne daß ihr wirkliches Geschlecht kleiner wird. Im Raum S_r dagegen $(r \geqq 3)$ sind zwei Möglichkeiten denkbar: entweder wird bei der Entstehung eines neuen Doppelpunktes das wirkliche Geschlecht der in V veränderlichen Kurve C gleich $p-1$, oder sie behält ihr wirkliches Geschlecht p bei. Bezeichnet man die Grenzkurve, die den Doppelpunkt O besitzt, mit C_0, so nennen wir O *einen eigentlichen Doppelpunkt in bezug auf die Kurven von V*, wenn C_0 das wirkliche Geschlecht $p-1$ hat, dagegen einen *uneigentlichen Doppelpunkt*, wenn C_0 das Geschlecht p besitzt.[2])

1) Vgl. die bibliographischen Angaben über die Klassifikation der Kurven am Schluß dieses Anhangs G (S. 400).

2) Vgl. Severi, Rom. Acc. L. Rend. 24_2, 1011 (1915). Eine ganz entsprechende Unterscheidung greift Platz für die Doppelpunkte einer Fläche F des Raumes S_4. Ein Doppelpunkt O von F ist eigentlich oder uneigentlich, je nachdem das Geschlecht der überebenen Schnitte von F beim Durchgehen durch O erniedrigt wird oder nicht. Wenn O eigentlich ist, so bilden die von O ausgehenden Ge-

Wenn z. B. V die Familie der elliptischen Kurven C 4-ter Ordnung des Raumes S_3 und C_0 eine rationale Kurve mit einem Doppelpunkt O ist, so ist dieser Doppelpunkt eigentlich in bezug auf die Kurven von V; wenn dagegen V die Familie der rationalen Kurven C 4-ter Ordnung des S_3 ist, so ist der Doppelpunkt O uneigentlich in bezug auf die Kurven C.

Wir wenden uns wieder zu einer beliebigen Familie V von Kurven C. Man betrachte die Schar g_n^1, die durch ein gegebenes Büschel von Überebenen des Raumes auf der allgemeinen Kurve C ausgeschnitten wird, und konstruiere mit Hilfe dieser g_n^1 die der Kurve C entsprechende Riemannsche Fläche R. Wenn dann C beim Übergang in die Grenzlage C_0 einen eigentlichen Doppelpunkt O erwirbt, so fallen zwei Verzweigungspunkte, die dieselben beiden Blätter verbinden, in einen Punkt zusammen, in dem die beiden Blätter zusammengefügt sind. Wenn dagegen O ein uneigentlicher Doppelpunkt ist, so bleiben die Verzweigungspunkte von R verschieden. Es handelt sich demnach in diesem Fall um eine *zufällige Durchkreuzung* zweier Zweige von C, die verschiedene Ursprünge hatten. Diese Ursprünge werden auch auf der Fläche R fortwährend verschieden bleiben.

Wenn der Punkt O ein eigentlicher Doppelpunkt in bezug auf die Kurven C ist, so kann er gewöhnlich als *virtuell nicht vorhanden* angesehen werden (vgl. S. 322), und dann wird C_0 das *virtuelle Geschlecht* p haben.

Wir projizieren nun die Kurven der Familie V von einem allgemeinen S_{r-3} des Raumes S_r aus auf eine Ebene α. Ihre Projektionen seien mit C' bezeichnet; jede von ihnen wird $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ gewöhnliche Doppelpunkte besitzen. Die Kurve C_0', die Projektion von C_0, wird dieselbe Anzahl von Doppelpunkten haben wie die allgemeine Kurve C', wenn O ein uneigentlicher Doppelpunkt ist (weil dann nämlich C_0' dasselbe wirkliche Geschlecht hat wie C'); sie wird dagegen $d+1$ Doppelpunkte besitzen, wenn O ein eigentlicher Doppelpunkt ist. Bezeichnet man im letzteren Falle die Projektion von O mit O', so sind die übrigen d Doppelpunkte von C_0' die Grenzlagen der d Knotenpunkte von C'. Die Kurve C_0' besitzt also, wenn man sie als Grenzfall von C' betrachtet, den virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkt O', während ihre anderen d Doppelpunkte vorgeschrieben sind.

raden, die der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der Sehnen von F angehören, ein Bündel (einen Stern, s. S. 92) in einem gewissen durch O gehenden Raum S_3; ist aber O uneigentlich, so gehört jede durch O gehende Gerade zu der genannten Mannigfaltigkeit. (Vgl. Severi, Palermo Rend. 15, 33 (1901), Torino Mem. 52_2, (1902), sowie auch das wiederholt angeführte Werk von Bertini, I, S. 211.)

Es sei nun die Variationsvorschrift festgesetzt, nach der C sich der Grenzlage C_0 nähert. Wenn O ein uneigentlicher Doppelpunkt ist, so nähert sich eine der d Sehnen von C, die sich auf das Projektionszentrum stützen, *einer ganz bestimmten* durch O gehenden Geraden, und dies gilt für jede beliebige Lage, die das Projektionszentrum einnehmen kann. Daraus folgt, daß für jene gegebene Variationsvorschrift die von O ausgehenden Geraden, die als Grenzlagen von Sehnen der Kurve C angesehen werden können, sich auf ein System von der Art verteilen, daß es eine einzige unter ihnen gibt, die sich auf einen gegebenen S_{r-3} stützt. Diese Grenzlagen bilden also ein Bündel (einen Stern) mit dem Mittelpunkt O in einem bestimmten Raum S_3. Es ergibt sich daher der Satz:

Wenn die Kurve C der Familie V sich der Grenzkurve C_0 mit dem uneigentlichen Doppelpunkt O unbegrenzt nähert, so spaltet sich die Mannigfaltigkeit der Sehnen von C im Grenzfall in zwei verschiedene Mannigfaltigkeiten: diejenige der Sehnen von C_0 und ein in einem gewissen Raum S_3 liegendes Geradenbündel A; dieser Raum S_3 hängt von dem Gesetz ab, das für den Grenzübergang von C zu C_0 maßgebend ist.

Wenn dagegen O ein eigentlicher Doppelpunkt ist, so ergibt sich bei jeder beliebigen Variationsvorschrift für den Grenzübergang von C zu C_0 als Grenze der Mannigfaltigkeit der Sehnen von C stets nur die Mannigfaltigkeit der Sehnen von C_0 (zu dieser gehören demnach als *uneigentliche Sehnen* die Geraden des Büschels B mit dem Mittelpunkt O in der Ebene der beiden Tangenten an C_0 in O).[1]

Falls O ein uneigentlicher Doppelpunkt ist, gehört das Büschel B der uneigentlichen Sehnen von C_0 dem Bündel A an. Wenn nämlich C sich der Kurve C_0 unbegrenzt nähert, so daß die Mannigfaltigkeit M der Sehnen von C sich der um das Bündel A vermehrten Mannigfaltigkeit M_0 der Sehnen von C_0 nähert, so ergibt sich als Grenze der Schnittkurve K von M mit einem allgemein gewählten, im S_r enthaltenen Raum S_{r-2} die Schnittkurve K_0 von M_0 vermehrt um die Gerade a, die als Schnitt von A auftritt. Da nun die Kurve $K_0 + a$ die Grenze einer irreduziblen Kurve K ist, so muß sie zusammenhängend sein, d. h. a muß sich mindestens in einem Punkt auf K_0 stützen. Die Geraden, die der Mannigfaltigkeit M_0 und dem Bündel A gemeinsam sind, bilden also eine Mannigfaltigkeit, die von einem allgemein gewählten S_{r-2} mindestens in einem Punkt

1) Unter einer *uneigentlichen Sehne* einer Kurve versteht man jede Gerade, die, ohne im eigentlichen Sinne des Wortes Sehne zu sein, der Mannigfaltigkeit der Sehnen angehört. Die uneigentlichen Sehnen sind von B. Levi, Torino Mem. 48_2, 83 (1898) untersucht worden; siehe auch Bertini auf S. 210 des angeführten Werkes.

getroffen wird, und folglich gibt es ∞^1 solcher Geraden. Da aber die Geraden des Büschels B die einzigen Geraden von M_0 sind, die durch O gehen, so folgt, daß B dem Bündel A angehört.

Was die zu C gehörige abwickelbare Fläche (Fläche der Tangenten von C) anbetrifft, so hat sie, falls O uneigentlich ist, nur die abwickelbare Fläche von C_0 zur Grenze; ist dagegen O ein eigentlicher Doppelpunkt, so besteht ihre Grenze aus der abwickelbaren Fläche von C_0, vermehrt um das zweifach gezählte Büschel B der uneigentlichen Sehnen.

Die eigentlichen Doppelpunkte unterscheiden sich von den uneigentlichen auch hinsichtlich der Dimension der Bedingung, die den Kurven einer gegebenen Familie auferlegt werden muß, wenn man verlangt, daß sie einen neuen Doppelpunkt haben sollen. Wie wir nachher sehen werden, hat *die Bedingung, daß die Kurven einer gegebenen Familie des Raumes S_r einen (neuen) Doppelpunkt besitzen sollen, im allgemeinen die Dimension 1 oder $r-2$, je nachdem dieser Doppelpunkt ein eigentlicher oder ein uneigentlicher sein soll.*

Für die folgenden Untersuchungen interessiert uns besonders der Fall, daß O ein eigentlicher Doppelpunkt ist. In diesem Fall müssen wir überdies bemerken, daß *ein linearer Raum S_k, der durch O geht und die Kurve C_0 möglicherweise in weiteren t Punkten trifft, sicherlich nicht als Grenzfall eines $(t+2)$-fach schneidenden Raumes S_k von C angesehen werden kann, wenn er keinen Strahl des Büschels B enthält.* In der Tat, wenn jener S_k als Grenzlage eines $(t+2)$-fach schneidenden Raumes S_k von C erscheint, so muß es möglich sein, zwei von diesen $t+2$ Punkten durch eine Gerade zu verbinden, die beim Übergang von C nach C_0 in eine uneigentliche Sehne von C_0 übergeht. Daher wird der Grenzraum S_k eine Gerade des Büschels B enthalten. In diesem Falle sagt man kurz, ein solcher als $(t+2)$-fach schneidender Raum von C_0 angesehener S_k *verhalte sich* im Doppelpunkt O *uneigentlich.*

Wir wollen ein Beispiel geben. Wenn eine elliptische Raumkurve 4-ter Ordnung C sich einer rationalen Raumkurve 4-ter Ordnung C_0 mit dem eigentlichen Doppelpunkt O unbegrenzt nähert, so sind die Geraden, die C_0 von O aus projizieren, nicht die Grenzlagen von 3-fach schneidenden Sekanten der Kurve C. Ist dagegen C eine allgemeine rationale Kurve 4-ter Ordnung ohne mehrfache Punkte, die sich ebenfalls der Kurve C_0 nähert (dabei ist also O ein uneigentlicher Doppelpunkt), so sind die Erzeugenden des Kegels 2-ter Ordnung, der C_0 von O aus projiziert, die Grenzlagen der eine Regelschar bildenden dreifachen Sekanten der Kurve C.

Es sei C eine irreduzible Raumkurve 5-ter Ordnung vom Geschlecht 2 und C_0 eine rationale Raumkurve 5-ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten

O_1 und O_2. Wir werden im folgenden (Nr. 5) sehen, daß C_0 der Familie der Kurven C angehört. Wenn C sich der Kurve C_0 unbegrenzt nähert, so ist die Gerade $O_1\,O_2$ nicht die Grenzlage einer 4-fach schneidenden Sekante von C, weil O_1 und O_2 eigentliche Doppelpunkte sind[1]); ist dagegen C eine allgemein gewählte rationale Raumkurve 5-ter Ordnung ohne mehrfache Punkte, die sich der Kurve C_0 nähert, so ist die Gerade $O_1\,O_2$ die Grenzlage der einzigen 4-fachen Sekante von C.

3. Zusammenhängende Systeme von Geraden (zusammenhängende Vielseite) in einem Raume S_r. Ein System von n Geraden (n-Seit) gehört dem Raum S_r an ($r > 2$), wenn es nicht vollständig in einem Raume geringerer Dimension enthalten ist. Wir werden sagen, das System sei *zusammenhängend* mittels einer gewissen Anzahl $n + p - 1$ ($p \geqq 0$) von einfachen Schnittpunkten (Doppelpunkten) jener Geraden, wenn man von einer beliebigen dieser Geraden über die Doppelpunkte hinüber zu jeder anderen Geraden gelangen kann. Die ganze Zahl p wird das *virtuelle Geschlecht* des n-Seits genannt.

Bei der vorstehenden Definition werden die $n + p - 1$ Schnittpunkte weniger als Doppelpunkte als vielmehr als „Verzweigungspunkte" aufgefaßt, da man ja gerade von ihrer Doppelpunktseigenschaft, die keinen Sprung von einem Zweig zum andern gestatten würde, absieht. Daher sagt man auch, diese Doppelpunkte werden als *virtuell nicht vorhanden* angesehen (vgl. S. 322).

Diese Definitionen erlangen eine wesentliche Bedeutung, so oft das zusammenhängende n-Seit L als Grenzfall einer irreduziblen Kurve C von der n-ten Ordnung und vom Geschlecht p angesehen werden kann, die keine mehrfachen Punkte besitzt und dem Raum S_r angehört. Dann absorbiert jeder der Doppelpunkte von L zwei Verzweigungspunkte der RIEMANNschen Fläche, die mit Hilfe der auf C durch ein allgemeines Büschel von Überebenen ausgeschnittenen linearen Schar g^1_n konstruiert wird. Die Doppelpunkte von L sind demnach in bezug auf die Kurven C *eigentliche Doppelpunkte*. Die abwickelbare Fläche von C verwandelt sich beim Grenzübergang in das zweifach gezählte System der $n + p - 1$ Geradenbüschel, welche durch die einander treffenden Geradenpaare von L bestimmt sind. Die Mannigfaltigkeit der Sehnen von C verwandelt sich zugleich in die Mannigfaltigkeit der Geraden, die je zwei Seiten des n-Seits in verschiedenen Punkten treffen.

---

1) Dies folgt auch daraus, daß C keine 4-fach schneidende Sekante besitzt; denn sonst würde sie von einer Ebene durch diese vierfache Sekante in einem einzigen veränderlichen Punkt geschnitten, und wäre daher rational.

Wenn unter den $n+p-1$ Doppelpunkten von L nur $n+q-1$ $(q<p)$ als nicht vorhanden betrachtet werden können, ohne daß dadurch der Zusammenhang des n-Seits aufgehoben wird, so wird man q als virtuelles Geschlecht von L bezeichnen, da die $p-q$ übrigen Doppelpunkte als vorgeschrieben zu betrachten sind. Ist L der Grenzfall einer irreduziblen Kurve C von der n-ten Ordnung und dem Geschlecht q ohne mehrfache Punkte, so daß die $n+q-1$ virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkte von L die Grenzlagen ebensovieler Paare von Verzweigungspunkten einer als Bild von C anzusehenden RIEMANNschen Fläche sind, so müssen die übrigen $p-q$ vorgeschriebenen Doppelpunkte in bezug auf die Familie, in der sich C bewegt, als *uneigentliche Doppelpunkte* angesehen werden.

Es sei nun ein n-Seit L vom virtuellen Geschlecht p gegeben (es kann unter Umständen auch noch vorgeschriebene Doppelpunkte besitzen, die von den zur Herstellung des Zusammenhangs herausgegriffenen $n+p-1$ Doppelpunkten verschieden sind); dann kann man immer p passend gewählte unter seinen virtuell nicht vorhandenen $n+p-1$ Doppelpunkten derart vorschreiben (d. h. als Übergangspunkte ausschließen), daß aus L ein zusammenhängendes n-Seit vom virtuellen Geschlecht Null entsteht.

Zum Beweis nehme man zunächst an, der Zusammenhang werde unterbrochen, wenn ein *beliebiger* der $n+p-1$ nicht vorhandenen Doppelpunkte von L vorgeschrieben wird. Wir behaupten, daß dann notwendig $p=0$ ist. Wenn man den Doppelpunkt P, den Schnittpunkt der Seiten a, b von L, vorschreibt, so zerfällt das n-Seit in zwei zusammenhängende Vielseite A, B. Das erste besteht aus den Seiten von L, zu denen man von a aus gelangen kann, ohne P zu überschreiten, und das andere aus den Seiten von L, zu denen man von b aus gelangen kann, ohne P zu überschreiten. Es kann keine weiteren Seiten geben, die von denen der Vielseite A, B verschieden wären; denn sie müßten entweder mit a oder mit b über P hinüber zusammenhängen, während nur die Seiten a, b durch P gehen. Wenn man also P vorschreibt, so zerfällt L in *zwei* zusammenhängende Stücke.

Da nach unserer Annahme das Vorschreiben eines beliebigen unter den $n+p-1$ nicht vorhandenen Doppelpunkten zur Unterbrechung des Zusammenhangs führt, so wird auch das Vielseit A in zwei Stücke zerfallen, sobald man einen der zu A gehörigen nicht vorhandenen Doppelpunkte von L vorschreibt. Fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich, daß beim Vorschreiben von i unter den $n+p-1$ nicht vorhandenen Doppelpunkten des n-Seits L dieses in $i+1$ Stücke zerfällt. Da $p \geqq 0$ ist, so ist es auf diese Weise möglich, $n-1$ Doppelpunkte vorzuschreiben, und dann wird L in n voneinander losgelöste Geraden zerfallen. Dann bleibt aber in L kein Übergangspunkt (nicht vorhandener Doppelpunkt) mehr übrig, und deshalb ist $p = 0$.

Wenn also $p > 0$ ist, so kann man mindestens einen der $n + p - 1$ nicht vorhandenen Doppelpunkte von L vorschreiben, ohne daß der Zusammenhang unterbrochen wird. Man erhält dann ein n-Seit vom virtuellen Geschlecht $p - 1$ (das mindestens einen vorgeschriebenen Doppelpunkt hat). Wenn $p - 1 > 0$ ist, so wird man daher einen weiteren Doppelpunkt vorschreiben können, ohne den Zusammenhang zu unterbrechen. In dieser Weise fährt man fort, bis p geeignete Doppelpunkte vorgeschrieben sind, ohne daß der Zusammenhang unterbrochen wird.

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die n Seiten des zusammenhängenden n-Seits L vom virtuellen Geschlecht $p \geqq 0$, so sollen seine $n + p - 1$ virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkte dadurch dargestellt werden, daß man die Symbole der beiden Seiten, die sich in ihnen durchkreuzen, oder auch nur deren Indizes, in Klammern setzt, also z. B. durch (a_1, a_2) oder $(1, 2)$.

Die Gesamtheit der Symbole für die $n + p - 1$ virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkte des n-Seits wollen wir sein *Verknüpfungsschema* nennen. Wenn sich z. B. $a_2, \ldots, a_n$ auf a_1 stützen, so ist $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, n)$ das Verknüpfungsschema eines n-Seits vom virtuellen Geschlecht Null; wenn sich a_1 auf a_2, a_2 auf $a_3, \ldots, a_{n-1}$ auf a_n stützt, so ist $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n - 1, n)$ ebenfalls das Verknüpfungsschema eines n-Seits vom virtuellen Geschlecht Null, und wenn sich außerdem noch a_n auf a_1 stützt, so ist $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n - 1, n), (n, 1)$ das Verknüpfungsschema eines n-Seits vom virtuellen Geschlecht 1.

Zwei n-Seite, die dasselbe Verknüpfungsschema besitzen, werden *isomorph* genannt. Die notwendige und hinreichende Bedingung für den Isomorphismus zweier n-Seite besteht offenbar darin, daß zwischen ihren Seiten eine ein-eindeutige Korrespondenz aufgestellt werden kann, in der zwei beliebigen, in einem virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkt sich schneidenden Seiten des einen, zwei Seiten des anderen entsprechen, die sich ebenfalls in einem virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkt schneiden.

Ein dem Raum S_r angehöriges n-Seit ($r < n$) vom virtuellen Geschlecht $p \geqq 0$ ist immer die Projektion eines n-Seits vom virtuellen Geschlecht Null, das dem Raum S_n angehört, und zwar ist das Projektionszentrum ein Raum S_{n-r-1}, der p Sehnen des im S_n liegenden n-Seits schneidet.

Das im S_r gegebene n-Seit L läßt sich zunächst als n-Seit vom virtuellen Geschlecht Null auffassen, indem man p seiner $n + p - 1$ virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkte vorschreibt (d. h. ihnen Doppelpunktseigenschaft zuschreibt, s. S. 323). Man hat daher nur zu beweisen, daß jedes n-Seit L des Raumes S_r, das gewisse p vorgeschriebene Doppelpunkte und das virtuelle Geschlecht Null besitzt, die Projektion eines n-Seits vom virtuellen Geschlecht Null im S_n ist. Der Satz ist richtig für $n=2$. Wir können ihn also für die Vielseite mit $n-1$ Seiten als bewiesen annehmen und haben ihn aus dieser Annahme für das n-Seit zu beweisen.

Unter den n Seiten von L gibt es mindestens eine, etwa a, die einen einzigen von den $n-1$ virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkten von L enthält; dieser sei mit P bezeichnet. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde es mindestens n virtuell nicht vorhandene Doppelpunkte geben, L also mindestens das virtuelle Geschlecht eins haben. Nimmt man a von L weg, so wird der Zusammenhang des verbleibenden Restes nicht unterbrochen, da ja nur eine einzige Seite von L mittels eines Doppelpunktes P mit a verknüpft war. Man erhält auf diese Weise aus L ein $(n-1)$-Seit M vom virtuellen Geschlecht Null, und dieses ist die Projektion eines $(n-1)$-Seits M', das einem Raum I von $n-1$ Dimensionen angehört; Projektionszentrum ist ein gewisser Raum S_{n-r-2}, den wir mit O bezeichnen wollen. Als vorgeschriebene Doppelpunkte des $(n-1)$-Seits M sind alle vorgeschriebenen Doppelpunkte von L anzusehen, die beim Wegnehmen von a nicht verschwunden sind, d. h. alle diejenigen, die nicht auf a liegen. Die Gerade a kann außer dem virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkt P von L noch vorgeschriebene Doppelpunkte $Q, R, \ldots$ von L enthalten. Es seien $P', Q', R', \ldots$ die Punkte von M', die bei der Projektion vom Raume O aus die Punkte $P, Q, R, \ldots$ liefern. Die Punkte $P', Q', R', \ldots$ liegen in dem $(n-r)$-dimensionalen Raum Ω, der O mit a verbindet. Wir ziehen nun durch einen von P' verschiedenen Punkt H', der den Räumen Ω und I, aber nicht dem Raum O angehört, eine Gerade h außerhalb I, und nehmen auf ihr einen Punkt H an, der nicht im Raum I liegt. Dann betrachten wir in dem Raum S_n, der I mit H verbindet, das n-Seit L', das aus dem $(n-1)$-Seit M' dadurch entsteht, daß man zu diesem eine durch P' gehende Gerade a' hinzufügt, die h in einem von H und H' verschiedenen Punkt trifft. Die Projektion des n-Seits L' von H aus auf I ist ein n-Seit $L''=a''+M'$, dessen Seite $a''=P'H'$ in Ω liegt. Projiziert man also L'' von O aus auf den ursprünglichen Raum S_r, so erhält man das n-Seit L mit seinen p vorgeschriebenen Doppelpunkten. Die Projektion des n-Seits L' von dem $(n-r-1)$-dimensionalen Raum OH aus auf den ursprünglichen Raum S_r liefert daher das n-Seit L, was zu beweisen war.

Die n-Seite vom virtuellen Geschlecht Null im Raum S_n können keinen (vorgeschriebenen) Doppelpunkt haben, der von den $n-1$ virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkten verschieden ist, denn sonst würden sie in einem Raum von geringerer Dimension liegen. Es ist auch klar, daß ein zusammenhängendes n-Seit keinem Raume von größerer Dimension als n angehören kann, und wenn es dem Raume S_n angehört, so ist es notwendig vom Geschlecht Null.

Die zueinander isomorphen n-Seite des S_n bilden eine irreduzible Mannigfaltigkeit von der Dimension $n(n+1)-2$.

Dieser Satz ist richtig für $n=2$. Um ihn allgemein zu beweisen, genügt es also, ihn für den Raum S_{n-1} als richtig anzunehmen und daraus seine Gültigkeit für den Raum S_n abzuleiten. Es seien $L = a_1 a_2 \ldots a_n$ und $L' = a'_1 a'_2 \ldots a'_n$ zwei allgemeine, isomorphe, zusammenhängende n-Seite des S_n. Zwei Seiten, die im Isomorphismus zwischen L und L' einander entsprechen, sollen, abgesehen vom oberen Index, durch denselben Buchstaben bezeichnet werden, also z. B. durch a_1 und a'_1. Es ist möglich, in L eine Seite, etwa a_n, zu wählen, die einen einzigen der virtuell nicht vorhandenen Doppelpunkte von L enthält; dann wird a'_n in bezug auf L' dieselbe Eigenschaft besitzen. Läßt man a_n und a'_n weg, so erhält man also aus L und L' zwei isomorphe $(n-1)$-Seite M und M', die gewissen Überebenen I bzw. I' angehören. Durch eine Bewegung (oder eine Kollineation) bringt man die Überebene I' mit I zur Deckung, wobei man die Gerade a'_n nachzieht; und dann betrachtet man die Vielseite M' und L' in der neuen Lage. Mittels einer stetigen Variation innerhalb der irreduziblen Mannigfaltigkeit W der mit M isomorphen $(n-1)$-Seite von I kann man hierauf M' mit M zur Deckung bringen, so daß die entsprechenden Seitenpaare aufeinander fallen und daß M' die durch einen Punkt von a'_{n-1} gehende Gerade a'_n nach sich zieht. Wenn man schließlich die Gerade a'_n aus der zuletzt erhaltenen Lage heraus so bewegt, daß sie a'_{n-1} stets schneidet, so kann sie mit a_n zur Deckung gebracht werden.

Nun hängen aber die n-Seite L, zu denen ein gegebenes $(n-1)$-Seit M gehört, von der Wahl der Seite a_n ab, die im Raum S_n liegt und die Seite a_{n-1} von M schneidet; sie bilden daher eine n-fach unendliche irreduzible Mannigfaltigkeit. Während also M sich in W bewegt, beschreiben die genannten n-Seite L eine irreduzible Mannigfaltigkeit von der Dimension $n(n-1)-2+n$. Bewegt sich schließlich die Überebene I im Raum S_n, so erhält man eine irreduzible Mannigfaltigkeit V von isomorphen n-Seiten L, die die Dimension $n(n-1)-2+n+n=n(n+1)-2$ besitzt.

1. Bemerkung. Transformiert man ein zusammenhängendes n-Seit L des Raumes S_n mit gegebenem Verknüpfungsschema mittels der $\infty^{n(n+2)}$ Kollineationen des S_n, so erhält man eine irreduzible Mannigfaltigkeit von n-Seiten, die zu dem gegebenen isomorph sind, und diese wird ent-

weder mit der Mannigfaltigkeit V aller mit L isomorphen n-Seite zusammenfallen oder in ihr enthalten sein. Im ersten Fall wird jedes n-Seit L durch unendlich viele Kollineationen in sich übergeführt; diese hängen von $n(n+2) - [n(n+1) - 2] = n+2$ Parametern ab. Zwei n-Seite von V werden dann immer kollinear verwandt sein. Im zweiten Fall gibt es mehr als ∞^{n+2} Kollineationen, die L in sich überführen, und dann können zwei beliebige n-Seite von V im allgemeinen nicht kollinear aufeinander bezogen werden.

Es ist leicht zu bestätigen, daß für die Werte $n = 2, 3, 4$ nur der erste Fall eintritt, während für $n > 4$ auch der zweite Fall eintreten kann. So sind z. B. für $n = 5$ zwei isomorphe Fünfseite mit dem Verknüpfungsschema (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) im allgemeinen nicht kollinear verwandt, weil die Punktquadrupel, die auf den dem Symbol 1 entsprechenden Geraden von den anderen vier homologen Geradenpaaren der beiden Fünfseite ausgeschnitten werden, im allgemeinen nicht kollinear aufeinander bezogen sind. Wenn die beiden Punktquadrupel kollinear sind, so sind die beiden Fünfseite auf ∞^8 verschiedene Arten kollinear verwandt.

Für $n = 2, 3$ bilden die zusammenhängenden n-Seite des S_n eine einzige Mannigfaltigkeit; für $n = 4$ bilden sie zwei Mannigfaltigkeiten, die den Verknüpfungsschemen (1, 2), (1, 3), (1, 4) und (1, 2), (2, 3), (3, 4) entsprechen; für $n = 5$ bilden sie fünf Mannigfaltigkeiten entsprechend den Schemen (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5); (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5); (1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 5); (1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 5); (1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5); usw.

2. Bemerkung. Aus den Eigenschaften der Familien von n-Seiten des virtuellen Geschlechts Null im S_n kann man die Eigenschaften der Familien von n-Seiten des virtuellen Geschlechts $p \geqq 0$ im S_r ableiten, insofern letztere als Projektionen von ersteren aufgefaßt werden können. Wir verzichten hier auf diese allgemeine Untersuchung, die mit der Klassifikation der irreduziblen algebraischen Kurven zusammenhängt, uns aber zu weit führen würde, und beschränken uns darauf, zu bemerken, daß *die Dimension einer Familie von isomorphen n-Seiten des virtuellen Geschlechts $p \geqq 0$ im S_r mindestens gleich $rn - (r-2)(p-1)$ ist.*

In der Tat, n Geraden des Raumes S_r hängen von $2n(r-1)$ Parametern ab; damit diese n Geraden sich in $n+p-1$ Punkten schneiden, sind $(r-2)(n+p-1)$ einfache Bedingungen erforderlich, die unabhängig sein können oder nicht. Im ersten Fall ist die Dimension der betrachteten Familie genau gleich $rn - (r-2)(p-1)$, im zweiten Fall größer.

4. Die Familie der rationalen Kurven eines S_r. Die rationalen Normalkurven C von der n-ten Ordnung im Raum S_n bilden eine einzige Familie V von Kurven, die zu je zweien kollinear sind und von $n(n+2)-3$ Parametern abhängen, weil jede Kurve C ∞^3 Kollineationen in sich zuläßt (Nr. 58, S. 161).

Wir beweisen zuerst den Satz: *Jede Kurve, die in eine rationale Normalkurve D des Raumes S_{n-1} und eine allgemeine Gerade a zerfällt, welche sich in einem beliebigen Punkt P auf D stützt, gehört zu V.*

Es sei I die Überebene, in der D liegt, O ein allgemein gewählter Punkt von a (außerhalb I) und Γ der Kegel, der D von O aus projiziert. Die Kurve D kann auf unendlich viele Arten als Projektion einer rationalen Normalkurve des S_n vom Punkt O aus betrachtet werden (Nr. 31, S. 93). Man hat zu dem Zweck nur die lineare Schar g_n^n der Gruppen von n Punkten der Kurve D projektiv auf das lineare System der Überebenen des S_n zu beziehen, derart, daß jeder Gruppe von n Punkten, die den festen Punkt P enthält, die Überebene entspricht, welche die $n-1$ veränderlichen Punkte jener Gruppe von O aus projiziert. Dies ist immer auf ∞^{n+1} verschiedene Arten möglich, und man erhält alle Arten aus einer von ihnen mit Hilfe der ∞^{n+1} Zentralkollineationen des S_n mit dem Zentrum O.[1])

Auf diese Weise erhält man aber nicht alle rationalen Normalkurven n-ter Ordnung, die auf dem Kegel Γ liegen. In der Tat ergeben sich die erhaltenen Kurven C alle aus einer von ihnen durch die ∞^{n+1} Zentralkollineationen mit dem Zentrum O, von denen jede die einzelnen Geraden des Überbündels O unverändert läßt. Da es nun ∞^3 Zentralkollineationen des Bündels O gibt, die Γ in sich überführen, und da jede von diesen in ∞^{n+1} Kollineationen des Raumes S_n enthalten ist, so erhält man schließlich eine stetige Gruppe von ∞^{n+4} Kollineationen des S_n, die Γ in sich überführen.

Wir wollen nun die Kurven C des stetigen Systems Σ betrachten, die aus einer auf Γ liegenden rationalen Normalkurve n-ter Ordnung mittels der genannten ∞^{n+4} Kollineationen erhalten werden. Eine gegebene Kurve C von Σ wird von ∞^2 dieser Kollineationen in sich transformiert, weil es eben ∞^2 Kollineationen gibt, die C und zugleich den darauf liegenden Punkt O unverändert lassen. Es gibt also in Σ ∞^{n+2} Kurven C. Sie schneiden auf D, wie auch auf jedem anderen allgemein gewählten überebenen Schnitt von Γ, die lineare Vollschar g_n^n aus und bilden daher ein lineares System.[2]) Die Schnittkurve von Γ mit jeder nicht durch den

1) Vgl. Bertini, Iperspazi, Nr. 15, S. 55.

2) Diese Behauptung folgt z. B. aus dem Satz der Nr. 6 (S. 18), welcher, insofern Γ eine rationale Fläche ist, für die auf Γ liegenden Kurvensysteme gilt. Die

Punkt O gehenden Überebene wird von einer in Σ beweglichen Kurve in n veränderlichen Punkten getroffen. Die ∞^1 Kurven von Σ, die durch $n+1$ allgemein gewählte Punkte jener Schnittkurve gehen, zerfallen also in diese Schnittkurve und eine Gerade, die in einem einfach unendlichen linearen System veränderlich, d. h. eine veränderliche Erzeugende des Kegels Γ ist. Im System Σ sind demnach alle Kurven n-ter Ordnung enthalten, die aus einer Erzeugenden und einem beliebigen überebenen Schnitt von Γ zusammengesetzt sind, und folglich gehört insbesondere auch die zusammengesetzte Kurve $a + D$ diesem System an. Da nun das System Σ, das aus den durch Kollineation aus einer irreduziblen rationalen Normalkurve n-ter Ordnung hervorgehenden Kurven besteht, der Mannigfaltigkeit V angehört, so folgt daraus der obige Satz.

Daraus ergibt sich nun auch sofort durch vollständige Induktion, daß *alle zusammenhängenden n-Seite des Raumes S_n zu der Familie V der rationalen Normalkurven n-ter Ordnung gehören.* Da nämlich der Satz für $n = 2$ richtig ist, so ist er auf Grund der zuvor bewiesenen Eigenschaft für jeden beliebigen Wert von n richtig.

Nun wenden wir uns zu den rationalen Kurven n-ter Ordnung eines Raumes S_r $(r < n)$. Jede von ihnen ist die Projektion einer rationalen Normalkurve des S_n von einem Raum S_{n-r-1} aus. Da aber sowohl die Mannigfaltigkeit der rationalen Normalkurven des S_n wie auch die Mannigfaltigkeit der im S_n enthaltenen Räume S_{n-r-1} irreduzibel ist, so ist dies auch für die Mannigfaltigkeit W der rationalen Kurven des S_r der Fall. Wir wissen schon, daß diese Mannigfaltigkeit die Dimension $n(r+1)+r-3$ hat (Nr. 58, S. 161). Zu ihr gehört auch jedes zusammenhängende n-Seit des S_r vom virtuellen Geschlecht Null, weil jedes derartige n-Seit als Projektion eines zusammenhängenden n-Seits des S_n aufgefaßt werden kann (Nr. 3, S. 361), und weil, wie wir gesehen haben, die zusammenhängenden n-Seite des S_n zu der aus den rationalen Normalkurven bestehenden Familie V gehören, deren Projektion die Familie W ist. Es ergibt sich also der Satz:

Die rationalen Kurven n-ter Ordnung des Raumes S_r $(r \leq n)$ bilden eine einzige Familie W von der Dimension $n(r+1)+r-3$, und diese enthält alle dem S_r angehörigen zusammenhängenden n-Seite vom virtuellen Geschlecht Null.

---

durch zwei allgemeine Punkte von Γ gehenden Kurven des Systems Σ bilden ein n-fach unendliches lineares System Σ', weil durch n allgemein gewählte Punkte von Γ ein einziger überebener Schnitt von Γ und also eine einzige Kurve von Σ' geht. Daraus folgt, daß durch $n+2$ allgemein gewählte Punkte von Γ eine einzige Kurve von Σ geht, und daß also Σ linear ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Familie W auch die rationalen Kurven mit beliebigen Singularitäten umfaßt, weil auch diese als Projektionen von rationalen Kurven des S_n aufgefaßt werden können.

Bemerkung. Das für die rationalen Kurven befolgte Verfahren läßt sich, bis zu einem gewissen Grade, *auch auf eine beliebige Familie V von irreduziblen Kurven C der n-ten Ordnung vom Geschlecht p im Raum S_r* ($r \geq 3$) anwenden. Man kann nämlich beweisen, daß *jede derartige Familie Kurven enthält, die jeweils in eine dem Raum S_{r-1} angehörige irreduzible Kurve D von der Ordnung $n-1$ und dem Geschlecht p und eine auf D sich stützende Gerade a zerfallen.* Im Gegensatz zum vorhergehenden Fall können aber hier weder die Kurve D noch der Stützpunkt von a auf D immer willkürlich gewählt werden.

Zum Beweis projiziere man eine allgemeine Kurve C der Familie V von einem beliebigen ihrer Punkte O aus auf eine Überebene I. Wir bezeichnen den projizierenden Kegel mit Γ und die Projektionskurve, die von der Ordnung $n-1$ und mit C birational äquivalent ist, mit D. Sobald $p > 0$ ist, wird der Kegel Γ nur von ∞^{r+1} Kollineationen in sich selbst transformiert, und zwar sind dies die Zentralkollineationen mit dem Zentrum O. Würde nämlich Γ von ∞^{r+2} Kollineationen in sich transformiert, so wäre eine allgemein gewählte unter diesen Kollineationen keine Zentralkollineation und könnte demnach nicht jede Erzeugende von Γ in sich verwandeln.[1]) Das im Bündel O enthaltene einfach unendliche algebraische Gebilde Γ vom Geschlecht $p > 0$ würde also unendlich viele nicht identische Kollineationen in sich zulassen, und dies steht im Widerspruch zu einem Satz der Nr. 58 (S. 161).

Die ∞^{r+1} Kollineationen von Γ in sich verwandeln C in ∞^{r+1} Kurven eines Systems Σ, und dieses gehört, da ja C in der Familie V allgemein gewählt wurde, ganz dieser Familie V an (S. 354). Die Kurven von Σ schneiden auf D, ebenso wie auf jedem anderen allgemein gewählten überebenen Schnitt von Γ, die lineare Schar g_n^r aus, die man als Projektion der durch die Überebenen auf C erzeugten linearen Schar g_n^r von O aus erhält. Daraus folgt, daß Σ linear ist.[2]) Die Kurven von Σ, die durch $r+1$ allgemeine Punkte von D gehen, zerfallen in D selbst und in eine Erzeugende a von Γ; diese stützt sich auf D in einem Punkt P, der in der Korrespondenz zwischen C und D dem Punkt O entspricht, d. h. in dem Spurpunkt P,

1) Vgl. Bertini, Iperspazi, S. 53.

2) Nach dem Satz, der dem der Nr. 6 (S. 18) auf einer beliebigen Fläche entspricht. Vgl. Enriques, Rom. Acc. L. Rend. 2_5, 1 (1893).

den die allen Kurven von Σ im Punkt O gemeinsame Tangente a auf der Überebene I erzeugt.

Setzt man voraus, C sei eine Normalkurve, und ist in der Überebene I eine bestimmte Kurve D innerhalb der Familie von Kurven der Ordnung $n-1$ und des Geschlechts p, der sie angehört, gegeben, so folgt daraus noch nicht, daß D als Projektion einer Kurve C angesehen werden kann, und daß also die Kurve $D+a$, die aus D und einer von einem Punkt P auf D ausgehenden Geraden a besteht, zu der Familie V gehört. Dies wird immer der Fall sein, wenn D nicht-spezial ist, wie man auch den Punkt P auf D wählen mag. Ist dagegen D eine Spezialkurve, so kann sie auf Grund des *Reduktionssatzes* (Nr. 44, S. 130) dann und nur dann als Projektion von C angesehen werden, wenn die kanonischen Gruppen, die einen überebenen Schnitt von D enthalten, infolgedessen noch durch einen weiteren festen Punkt P der Kurve gehen. Dies wird nun im allgemeinen, wenn der Spezialitätsindex $i = p - n + r$ von C größer als 1 ist, nicht eintreten. Die Vollscharen g_n^r auf einer Kurve C mit allgemeinen Moduln hängen nämlich von $\tau = (r+1)(n-r) - rp$ Parametern ab (vgl. Anh. G, Nr. 8), die Vollscharen g_{n-1}^{r-1} aber hängen von $r(n-r)-(r-1)p = \tau + i$ Parametern ab; folglich können diese letzteren für $i > 1$ nicht die einzigen Reste der Punkte von C in bezug auf die einzelnen Scharen g_n^r sein.

5. Nicht-speziale Familien von Raumkurven oder Überraumkurven. Man erkennt zunächst (wie in Nr. 10 des Anhangs F (S. 341) für die ebenen Kurven von der Ordnung $n \geqq p+2$), daß die irreduziblen Kurven C vom Geschlecht p und der Ordnung $n \geqq p + r$ des Raumes S_r eine einzige Familie V bilden, deren allgemeine Kurve nicht spezial ist (d. h. auf der die von den Überebenen erzeugte Schar g_n^r nicht spezial ist). Wenn also $n > p + r$ ist, so ist die allgemeine Kurve von V die Projektion einer Normalkurve D von der n-ten Ordnung im Raum S_ϱ $(\varrho = n - p)$, die in einer Familie W veränderlich ist. Die Dimension von V ist $(r+1)n-(r-3)(p-1)$, die von W ist $(\varrho+1)n-(\varrho-3)(p-1)$ (vgl. Nr. 58, S. 161).

Eine Kurvenfamilie, wie V oder W, bei der die Ordnung n ihrer Kurven nicht kleiner ist als die Summe des Geschlechts ihrer allgemeinen Kurve und der Dimension des Raumes, in dem sie liegt, wird eine *nichtspeziale Familie* genannt, um daran zu erinnern, daß die allgemeine Kurve der Familie nicht spezial ist.

Wir behaupten, daß die allgemeine Kurve D von W keine mehrfachen Punkte besitzt. Nehmen wir einmal an, es gebe einen mehrfachen Punkt P von D, und seine Vielfachheit sei $s (\geqq 2)$. Die Kurve D ist birational äquivalent mit der Kurve Γ vom Geschlecht p, die allgemeine Moduln besitzt. Die durch P gehenden Überebenen des Raumes S_ϱ schneiden auf D, außer P, eine $g_{p+\varrho-s}^{\varrho-1}$ aus, die notwendig eine spezielle Vollschar ist; ihr entspricht auf Γ eine $g_{p+\varrho-s}^{\varrho-1}$. Nimmt man als projektives Modell von Γ eine Kurve ohne mehrfache Punkte, so entspricht der Schar der von den Überebenen auf D erzeugten Schnittpunkte auf der Kurve Γ eine Schar $g_{p+\varrho}^{\varrho}$, die die Summe der Schar $g_{p+\varrho-s}^{\varrho-1}$ und einer Gruppe von s (verschiedenen oder zusammenfallenden) Punkten ist. Wenn also eine allgemeine Kurve D einen s-fachen Punkt hätte, so könnte jede Schar $g_{p+\varrho}^{\varrho}$ auf Γ, zum mindesten auf eine Art und Weise, als Summe einer Schar $g_{p+\varrho-s}^{\varrho-1}$ und einer Gruppe von s passend gewählten Punkten auf Γ betrachtet werden. Es würden also die Scharen, welche Summen einer veränderlichen Schar $g_{p+\varrho-s}^{\varrho-1}$ und einer Gruppe von s veränderlichen Punkten sind, von mindestens ebensovielen Parametern abhängen wie die Scharen $g_{p+\varrho}^{\varrho}$, d. h. von p Parametern (Nr. 56, S. 156). Wir wollen nun abzählen, von wie vielen Parametern die genannten Summenscharen tatsächlich abhängen. Die Scharen $g_{p+\varrho-s}^{\varrho-1}$ auf Γ hängen von $p-\varrho(s-1)$ Parametern ab[1]), die Gruppen von s Punkten hängen von s Parametern ab. Da nun eine allgemeine Schar $g_{p+\varrho}^{\varrho}$ nur auf eine endliche Anzahl von Arten als Summe einer $g_{p+\varrho-s}^{\varrho-1}$ und einer Gruppe von s Punkten erhalten werden kann[2]), so hängen die genannten Summen von $p-\varrho(s-1)+s$ Parametern ab. Man erhält also $p-\varrho(s-1)+s \geqq p$, d. h. $s > \varrho(s-1)$. Da nun $\varrho > 2$ ist, so wird $s > 2(s-1)$, d. h. $s < 2$ und folglich $s = 1$, im Gegensatz zu dem, was wir angenommen hatten.

Die Projektion einer allgemeinen Kurve D aus einem allgemein gewählten Raum $S_{\varrho-r-1}$ (d. h. aus einem $S_{\varrho-r-1}$, der die Mannigfaltigkeit der Sehnen von D nicht trifft) auf den Raum S_r, in dem die Familie V liegt, liefert eine Kurve C dieser Familie ohne mehrfache Punkte. Daher ergibt sich der Satz:

Im Raum S_r $(r > 2)$ bilden die irreduziblen Kurven C von der n-ten Ordnung und dem Geschlecht p, wenn $n \geqq p + r$ ist, eine einzige irreduzible Familie V von der Dimension $(r+1)n-(r-3)(p-1)$, deren allgemeine Kurve nicht spezial ist und keine mehrfachen Punkte besitzt. Die allgemeine Kurve C ist nur dann eine Normalkurve, wenn $n = p + r$ ist.

1) In Nr. 8 dieses Anhangs (S. 380) wird in aller Strenge bewiesen werden, daß die Scharen g_n^r auf einer Kurve Γ vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln genau von $(r+1)(n-r)-rp$ Parametern abhängen.

2) Dies ist nämlich gleichbedeutend damit, daß die allgemeine Kurve D nur eine endliche Anzahl von Punkten mit gegebener Vielfachheit s haben kann.

Damit ist auch das bewiesen, was wir in der Bemerkung am Schluß der Nr. 1 (S. 355) vorausgesagt haben, nämlich der Satz, *daß für $n \geqq p+r$ die mit beliebigen Singularitäten ausgestatteten irreduziblen Kurven n-ter Ordnung des Geschlechts p im Raum S_r der oben genannten Mannigfaltigkeit V angehören und somit als Grenzfälle von Kurven ohne jeden mehrfachen Punkt angesehen werden können.*

Nun projizieren wir die Kurven von V auf eine Ebene α. Wir erhalten in dieser eine irreduzible Familie Σ von irreduziblen Kurven n-ter Ordnung, für die $n > p+2$ ist und die $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ gewöhnliche Doppelpunkte besitzen.[1]) Diese Familie fällt zusammen mit der $(3n+p-1)$-fach ausgedehnten Gesamtheit der irreduziblen ebenen Kurven C' von der n-ten Ordnung mit d Doppelpunkten (vgl. Anhang F, Nr. 11). Da nämlich $n \geqq p+r$ ist, so ist die Schar g_n^2 der von den geraden Linien auf einer allgemeinen Kurve C' erzeugten Schnittpunkte sicherlich in einer umfassenderen Schar g_n^r enthalten (ja sogar in unendlich vielen derartigen Scharen, wenn $n > p+r$ ist), und folglich ist nach Nr. 31 (S. 93) C' die Projektion einer Kurve der Familie V.

Im besonderen nehme man in Σ eine irreduzible Kurve C_h' vom Geschlecht $p-h$ mit $d+h$ gewöhnlichen Doppelpunkten, wobei $h = 1, 2, \ldots, p$ ist (Anhang F, Nr. 11, S. 349). Es sei dann G eine beliebige Gruppe von d Doppelpunkten auf C_h', die als vorgeschrieben betrachtet werden mögen, während die übrigen h Doppelpunkte als virtuell nicht vorhanden anzusehen sind. Die von den geraden Linien auf C_h' erzeugte Schar g_n^2 ist in einer mit bezug auf die vorgeschriebenen Doppelpunkte der Gruppe G virtuell vollständigen Schar enthalten, deren Dimension mindestens gleich $n-p \geqq r$ ist (vgl. Anhang F, Nr. 12). Daher ist C_h' die Projektion einer Kurve C_h der Familie V, die in bezug auf diese Familie h eigentliche Doppelpunkte besitzt.

Die irreduziblen Kurven n-ter Ordnung des Raumes S_r, die das wirkliche Geschlecht $p-h$ haben und h Doppelpunkte besitzen, geben als Projektionen in der Ebene α die ganze Familie der irreduziblen Kurven n-ter Ordnung mit $d+h$ Doppelpunkten, und diese ist ganz in Σ enthalten (Anhang F, Nr. 11); folglich gehören sie alle der Familie V an.

Man erkennt auch leicht, daß die Kurven C_h des Raumes S_r eine einzige Familie V_h bilden, deren allgemeine Kurve h Doppelpunkte hat. In der Tat, hat man für eine *allgemeine* ebene Kurve C_h' die Gruppe G der d vorgeschriebenen Doppelpunkte gewählt, so ist die von den geraden

1) Es ist leicht zu bestätigen, daß man die *ganze* Familie Σ erhält, wenn man die Kurven von V aus einem *bestimmten*, im S_r enthaltenen Raume S_{r-3} projiziert.

Linien auf C_h' erzeugte Schar g_n^2 eine virtuell nicht-spezielle Schar, die in einer virtuell vollständigen Schar g_n^{n-p} enthalten ist. Um eine Kurve C_h des Raumes S_r konstruieren zu können, deren Projektion die gewählte Kurve C_h' ist, muß man aus der soeben erwähnten Schar g_n^{n-p} eine g_n^r herausziehen, die die g_n^2 enthält. Die jener C_h' entsprechenden Kurven C_h des S_r bilden also für die betrachtete Wahl der vorgeschriebenen Doppelpunkte eine irreduzible Mannigfaltigkeit. Da nun, wenn C_h' die eigene Familie durchläuft, die vorgegebene Gruppe G in jede andere Gruppe von d Doppelpunkten der Kurve C_h' übergeführt werden kann (Anhang F, Nr. 11), so folgt, daß die Kurven C_h eine irreduzible Mannigfaltigkeit, d. h. eine einzige Familie V_h, bilden.

Die Berechnung der Dimension δ_h von V_h ergibt sich auf Grund der Konstruktion der Kurven C_h aus den Kurven C_h' sofort, wenn man beachtet, daß es für $n > p + 2$ auf der Kurve C_h' ∞^p virtuell nicht-spezielle Scharen n-ter Ordnung gibt. Man findet so $\delta_h = (r+1)n - (r-3)(p-1) - h$.

Die im Raum S_r liegenden irreduziblen Kurven D_h von der n-ten Ordnung und vom Geschlecht $p - h$ ohne mehrfache Punkte bilden eine nicht-spezielle Familie W_h $(n > (p-h) + r)$, deren Dimension

$$\varDelta_h = (r+1)n - (r-3)(p-h-1)$$

ist. Zu dieser Familie müssen (nach dem über die nicht-speziellen Familien bewiesenen Satze) *alle* irreduziblen Kurven n-ter Ordnung vom wirklichen Geschlecht $p - h$ des Raumes S_r gehören, die beliebige Singularitäten besitzen, und folglich auch im besonderen die Kurven C_h.

Die allgemeine Kurve D_h ist die Projektion einer Kurve n-ter Ordnung vom Geschlecht $p - h$ des Raumes S_{n-p+h}; man erhält sämtliche Kurven C_h, wenn das Projektionszentrum h Sehnen der projizierten Kurven durchsetzt.

Die h Doppelpunkte einer Kurve C_h sind in bezug auf die Familie W_h uneigentliche Doppelpunkte, während sie hinsichtlich der Familie V_h eigentliche Doppelpunkte sind.

Da der Unterschied zwischen den Dimensionen $\varDelta_h$ und δ_h von W_h und von V_h gleich $h(r-2)$ ist, so kann man sagen, daß die Forderung, die Kurven von W_h sollen h uneigentliche Doppelpunkte besitzen, gleichbedeutend ist mit $h(r-2)$ einfachen Bedingungen. Zusammenfassend erhalten wir folgendes Ergebnis:

Zu der nicht-speziellen Familie V der irreduziblen Kurven n-ter Ordnung vom Geschlecht p im Raum S_r $(n \geq p + r)$ gehört die Familie V_h aller irreduziblen Kurven n-ter Ordnung vom Geschlecht $p - h$, die h gewöhnliche Doppelpunkte besitzen $(h = 1, 2, \ldots, p)$. Die Familie V_h ist *gemeinsamer Bestandteil der Familie V und der nicht-spezialen Familie W_h, die aus allen irreduziblen Kurven n-ter Ordnung vom Geschlecht $p-h$ im S_r besteht. In bezug auf die Familie V sind die h Doppelpunkte der Kurven von V_h eigentliche Doppelpunkte, während sie hinsichtlich der Familie W_h uneigentlich sind. Die Bedingung, daß die Kurven einer nicht-spezialen Familie des S_r einen eigentlichen Doppelpunkt haben, ist einfach, während die Bedingung, daß sie einen uneigentlichen Doppelpunkt haben, $(r-2)$-fach ist.*

Eine andere bemerkenswerte Folgerung ergibt sich aus der Tatsache, daß V die Familie V_p der rationalen Kurven n-ter Ordnung des Raumes S_r mit p Doppelpunkten enthält. Zu V_p gehören nämlich alle zusammenhängenden n-Seite vom virtuellen Geschlecht p des Raumes S_r. In der Tat, die Projektionen der rationalen Normalkurven E eines S_n (der den Raum S_r enthält, in dem die Familie V_p liegt) von den Räumen S_{n-r-1} aus, die je p Sehnen einer der Kurven E durchsetzen, bilden eine irreduzible Mannigfaltigkeit, und diese fällt mit der Familie V_p zusammen, die alle rationalen Kurven n-ter Ordnung mit p Doppelpunkten im Raum S_r umfaßt. Da sich nun unter den Kurven E alle zusammenhängenden n-Seite des Raumes S_n befinden (Nr. 4, S. 366), so gehören alle zusammenhängenden n-Seite vom virtuellen Geschlecht p zu der Familie V_p, die aus den Projektionen der Kurven E besteht. Berücksichtigt man schließlich, daß V_p in der Familie V enthalten ist, so folgt der Satz:

Zu der nicht-spezialen Familie V der irreduziblen Kurven n-ter Ordnung vom Geschlecht p im Raum S_r ($n \geq p + r$) gehören alle möglichen im Raume S_r liegenden zusammenhängenden n-Seite vom virtuellen Geschlecht p.

Bemerkung. Die verschiedenen Arten, nach denen die Kurven C von V zerfallen können, lassen sich herleiten aus den Zerfallsmöglichkeiten der ebenen Kurven C' des Systems Σ, die man als Projektionen der Kurven C erhält. Daß z. B. *V jede Kurve enthält, die sich aus einer irreduziblen Kurve $(n-1)$-ter Ordnung vom Geschlecht p und einer sie in einem Punkt durchsetzenden Geraden zusammensetzt* (vgl. die Bemerkung am Schluß der Nr. 4, S. 367), folgt aus der Tatsache, daß jede ebene Kurve n-ter Ordnung, die in eine irreduzible Kurve $(n-1)$-ter Ordnung mit $d-n+2$ Doppelpunkten und eine Gerade zerfällt, zu Σ gehört, da ja eine solche zerfallende Kurve als zusammenhängende Kurve vom virtuellen Geschlecht p gilt, sobald einer der Schnittpunkte der Kurve $(n-1)$-ter Ordnung mit der Geraden als virtuell nicht vorhanden angesehen wird. Daß ferner *V jede Kurve enthält, die in eine irreduzible Kurve $(n-1)$-ter Ordnung vom Geschlecht $p-1$ und eine beliebige ihrer Sehnen zerfällt,* folgt aus der Tatsache, daß Σ jede Kurve enthält, die sich aus einer irreduziblen Kurve $(n-1)$-ter Ordnung mit $d-n+3$ Doppelpunkten und aus einer Geraden zusammensetzt, da die zerfallende Kurve zu einer zusammenhängenden Kurve vom virtuellen Geschlecht p wird, wenn man zwei Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve $(n-1)$-ter Ordnung als virtuell nicht vorhanden betrachtet.

Da nun die irreduziblen Kurven $(n-1)$-ter Ordnung vom Geschlecht $p-1$ des Raumes S_r ebenfalls eine nicht-speziale Familie bilden ($(n-1) \geqq (p-1)+r$), und ebenso diejenigen von der $(n-2)$-ten Ordnung und vom Geschlecht $p-2$, usw., so folgt, daß V *jede Kurve enthält, die in eine rationale Kurve des* S_r *und* p *beliebige ihrer Sehnen zerfällt.*

6. **Die Familie der kanonischen Kurven des Geschlechts p.** Die kanonischen Kurven C des Geschlechts p, die dem Raum S_{p-1} angehören, bilden eine einzige Familie V, weil die Mannigfaltigkeit der irreduziblen Kurven eines gegebenen Geschlechts irreduzibel ist (Anhang F, Nr. 9, S. 340) und andererseits zwei birational äquivalente kanonische Kurven kollinear verwandt sind (Nr. 46, S. 132).

Wir wissen außerdem, daß jede irreduzible Kurve von V, die das wirkliche Geschlecht p hat, keine mehrfachen Punkte besitzt (Nr. 47, S. 134). Die Dimension l von V wird erhalten, wenn man die Anzahl $3p-3$ der Moduln einer Kurve vom Geschlecht p um die Anzahl p^2-1 der Parameter vermehrt, von denen die Kollineationen des S_{p-1} abhängen, und zwar deshalb, weil eine allgemeine Kurve C durch keine Kollineation in sich selbst übergeführt wird (Nr. 72, S. 185). Man erhält also $l=(p-1)(p+4)$.

Wir wählen im S_{p-1} eine Ebene α und projizieren die allgemeine Kurve C von dem Raum S_{p-4} aus, der $p-3$ allgemeine Punkte von C verbindet, auf α. Dann erhalten wir eine ebene Normalkurve C' von der Ordnung $p+1$, die ein-eindeutig auf C bezogen ist (s. die Fußnote auf S. 85). Es ist *die* CLEBSCH-GORDANsche *Normalkurve.* Die Kurve C' besitzt $\frac{p(p-1)}{2}-p=\frac{p(p-3)}{2}$ Doppelpunkte; sie rühren von den Sehnen der Kurve C her, die sich auf das Projektionszentrum stützen.

Variiert man nun die Kurve C in V, so erhält man in der Ebene α ein irreduzibles System von Kurven C', und dieses fällt mit der Familie Σ aller irreduziblen Kurven von der Ordnung $n=p+1$ mit $d=\frac{p(p-3)}{2}$ Doppelpunkten zusammen. Jede irreduzible ebene Kurve n-ter Ordnung mit d Doppelpunkten ist nämlich notwendig spezial, weil für die Schar g_n^2, die durch die geraden Linien auf ihr erzeugt wird, $n-2<p$ ist. Die Schar g_n^2 ist also teilweise in der kanonischen Schar g_{2p-2}^{p-1} enthalten, und folglich ist die betrachtete Kurve die Projektion einer kanonischen Kurve

C von einem Projektionszentrum aus, das sich in $p-3$ Punkten auf C' stützt (Nr. 31, S. 93).[1]

Da nun zu dem System Σ irreduzible Kurven C'_h von der Ordnung n mit $d+h$ Doppelpunkten $(h=1,\dots,p)$ gehören, so ergibt sich durch ein ähnliches Verfahren wie in der vorhergehenden Nummer der Satz:

Die Familie V der dem Raum S_{p-1} angehörigen kanonischen Kurven des Geschlechts p, die die Dimension $(p-1)(p+4)$ hat, enthält die aus allen irreduziblen Kurven vom Geschlecht $p-h$ mit h Doppelpunkten bestehende Familie V_h von der Dimension $(p-1)(p+4)-h$ $(h=1,\dots,p)$; diese Doppelpunkte sind in bezug auf die Familie V eigentliche Doppelpunkte. Für $h>0$ ist die allgemeine Kurve von V_h die Projektion einer allgemeinen irreduziblen Kurve von der Ordnung $2p-2$ und vom Geschlecht $p-h$ des Raumes S_{p-2+h}, und zwar ist diese Projektion von einem Raum S_{h-2} aus vorgenommen, der h allgemein gewählte Sehnen durchsetzt.[2] *Die Kurven von V_h gehören auch zu der nicht-spezialen Familie W_h der irreduziblen Kurven von der Ordnung $2p-2$ und dem Geschlecht $p-h$ des Raumes S_{p-1}. Hinsichtlich der Familie W_h sind die h Doppelpunkte der Kurven von V_h uneigentlich.*

Auch in diesem Fall sieht man, daß ein eigentlicher Doppelpunkt, der den Kurven von V auferlegt wird, gleichbedeutend ist mit einer einfachen Bedingung, während ein uneigentlicher Doppelpunkt, der den Kurven von W_h auferlegt wird, gleichbedeutend ist mit $p-3$ einfachen Bedingungen.

Für $h=p$ ergibt sich aus dem vorstehenden Satze, daß die Familie V der kanonischen Kurven die Familie V_p aller im Raum S_{p-1} liegenden rationalen Kurven von der Ordnung $2p-2$ mit p Doppelpunkten enthält. Hieraus folgt, wie im Fall der nicht-spezialen Familien, die wir in Nr. 5 untersucht haben, der Satz:

Zu der Familie V der kanonischen Kurven des Geschlechts p gehört jedes im Raum S_{p-1} liegende zusammenhängende $(2p-2)$-Seit vom virtuellen Geschlecht p.

---

1) Dieselbe Beweisführung läßt sich auch anwenden, wenn die betrachtete ebene Kurve C' von der Ordnung $p+1$ und dem Geschlecht p beliebige Singularitäten besitzt. Die irreduziblen ebenen Kurven $(p+1)$-ter Ordnung vom Geschlecht p sind daher in dem System Σ der irreduziblen Kurven $(p+1)$-ter Ordnung mit d Doppelpunkten enthalten. Auf diese Weise wird der Satz im Anhang F, Nr. 10 (S. 345) auf die ebenen Kurven von der Ordnung $n=p+1$ und dem Geschlecht p ausgedehnt.

2) h allgemeine Sehnen einer Kurve von der Ordnung $2p-2$ des Raumes S_{p-2+h} werden von ∞^{p-h} Räumen S_{p-2} durchsetzt; von einem einzigen, wenn $h=p$ ist.

Bemerkung. Alle möglichen Arten, auf die ein Zerfallen der kanonischen Kurven C eintreten kann, lassen sich ableiten aus den Zerfallsmöglichkeiten der ebenen CLEBSCH-GORDANschen Normalkurven C', die zu zusammenhängenden Kurven vom virtuellen Geschlecht p führen. So kann man z. B. beweisen, daß V jede Kurve enthält, die aus einer spezialen Normalkurve von der Ordnung $2p-3$ und dem Geschlecht p im Raume S_{p-2} und einer sie in einem Punkt durchsetzenden allgemeinen Geraden des Raumes S_{p-1} besteht, oder aus zwei rationalen Normalkurven $(p-1)$-ter Ordnung, die $p+1$ gemeinsame Punkte haben, usw.

7. Über die Unzerlegbarkeit der algebraischen Bedingungen. Für die weiteren Sätze, die wir über die Klassifikation der algebraischen Kurven ableiten wollen, ist es zweckmäßig, einige Begriffe vorauszuschicken, die sich auf die Unzerlegbarkeit der algebraischen Bedingungen beziehen.

Es sei eine beliebige algebraische Mannigfaltigkeit V gegeben; ihre Elemente seien mit Γ bezeichnet, und ihre Dimension sei d (falls etwa V in Teile mit verschiedenen Dimensionen zerfällt, so sei d die größte unter den Dimensionen dieser Teile).

Eine algebraische Bedingung c, die den Elementen Γ auferlegt wird, läßt sich ausdrücken durch eine algebraische Beziehung zwischen diesen Elementen und einem gewissen anderen Element Γ', durch das c definiert ist.[1] Wenn man z. B. einer Geraden Γ des gewöhnlichen Raumes die Forderung auferlegt, sich auf eine gegebene algebraische Raumkurve Γ' zu stützen, so erhält man als Ausdruck dafür eine algebraische Beziehung zwischen den ∞^3 Geraden Γ, die der vorgeschriebenen Bedingung genügen, und dem Gebilde Γ'.

Wenn das Gebilde Γ' einer stetigen Variation innerhalb einer algebraischen Mannigfaltigkeit V' unterworfen werden kann (die auch reduzibel sein kann, aber jedenfalls zusammenhängend sein muß), so sagt man, *die Bedingung c sei ebenfalls einer stetigen Veränderung fähig.* Richtet man die Aufmerksamkeit auf ein Element Γ'_0 von V', so setzt man damit eine *Spezialisierung* c_0 der Bedingung c fest. Wenn man in dem oben angeführten Beispiel die Raumkurve Γ' in der zugehörigen Familie V' von algebraischen Raumkurven variiert, so erhält man für die Geraden des Raumes eine veränderliche Bedingung c.

---

1) Als Element Γ' kann man z. B. die Gesamtheit der Elemente Γ nehmen, die der Bedingung c genügen. Dann läßt sich die Bedingung c dadurch definieren, daß man einem Element Γ von V die Forderung auferlegt, es möge der in Γ' enthaltenen Mannigfaltigkeit Γ' angehören.

Die Dimension d' von V' hat von vornherein keine Beziehung zu der Dimension d von V. Auch V' kann in Teile mit verschiedenen Dimensionen zerfallen.

Die veränderliche Bedingung c setzt zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeiten V und V' *eine algebraische Korrespondenz* ω fest[1]); in dieser gelten zwei Elemente Γ und Γ' dann als entsprechend, wenn Γ eines der Elemente ist, welche der dem gegebenen Element Γ' entsprechenden Spezialisierung der Bedingung c genügen. Als Beispiel nehmen wir an, es werde einer Geraden Γ des gewöhnlichen Raumes die Bedingung c auferlegt, eine veränderliche algebraische Kurve Γ' von gegebener Ordnung n dreimal zu schneiden. Diese Bedingung drückt sich aus durch eine algebraische Korrespondenz zwischen der 4-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit V aller Geraden des Raumes und der Mannigfaltigkeit V' aller Kurven Γ' von der n-ten Ordnung[2]), wobei man eine Gerade Γ und eine Kurve Γ' dann als entsprechend anzunehmen hat, wenn Γ die Kurve Γ' dreimal schneidet.

Die Bedingung, daß eine Gerade Γ des Raumes sich auf ein Quadrupel Γ' von Geraden stützt (in diesem Fall ist das Element Γ' zusammengesetzt), führt in ähnlicher Weise zu einer algebraischen Korrespondenz zwischen der irreduziblen Mannigfaltigkeit V_4 der Geraden und der irreduziblen Mannigfaltigkeit V'_{16} der Geradenquadrupel, usw.

Eine *algebraische Korrespondenz* zwischen den Elementen zweier Mannigfaltigkeiten V und V' heißt *irreduzibel*, wenn die algebraische Mannigfaltigkeit, deren Elemente die in der gegebenen Korrespondenz einander entsprechenden Elementenpaare Γ und Γ' sind, irreduzibel ist; dafür ist es notwendig, aber nicht hinreichend, daß die Mannigfaltigkeiten V und V' irreduzibel sind.

Jede Bedingung, die sich durch eine irreduzible algebraische Korrespondenz ausdrücken läßt, wird eine *irreduzible Bedingung* genannt. Verlangt man z. B., daß eine Gerade sich auf eine in einer gegebenen Familie veränderliche Kurve stützen soll, so ist diese der Geraden auferlegte Bedingung irreduzibel. Verlangt man dagegen, daß eine Projektivität Γ auf einer Geraden ein gegebenes Quadrupel Γ' von Punkten in sich überführt, so ist diese der Projektivität auferlegte Bedingung c reduzibel. Die Mannigfaltigkeit V der Elemente Γ ist irreduzibel und hat

1) Bei der allgemeinsten Annahme ist eine algebraische Korrespondenz zwischen den Elementen Γ und Γ' zweier algebraischer Mannigfaltigkeiten V und V' eine algebraische Mannigfaltigkeit, die in der algebraischen Mannigfaltigkeit aller möglichen Paare von Elementen Γ, Γ' aus V und V' enthalten ist.

2) Die Mannigfaltigkeit V' zerfällt in so viele Teile, als es Familien von Raumkurven n-ter Ordnung gibt.

die Dimension 3; die Mannigfaltigkeit V' der Elemente Γ' ist ebenfalls irreduzibel und hat die Dimension 4. Trotzdem ist aber die Bedingung c reduzibel, denn sie läßt sich ausdrücken durch eine Korrespondenz zwischen V' und einer in V enthaltenen irreduziblen Mannigfaltigkeit F von zwei Dimensionen, deren Elemente die ∞^2 Involutionen sind, vermehrt um eine zweite algebraische Korrespondenz zwischen der irreduziblen Mannigfaltigkeit W der ∞^3 harmonischen Punktquadrupel und der Mannigfaltigkeit F, um eine dritte Korrespondenz zwischen der irreduziblen Mannigfaltigkeit der ∞^3 äquianharmonischen Punktquadrupel und der zweifach unendlichen irreduziblen Mannigfaltigkeit der zyklischen Projektivitäten 3-ter Ordnung, und um eine vierte Korrespondenz zwischen W und der zweifach unendlichen irreduziblen Mannigfaltigkeit der zyklischen Projektivitäten 4-ter Ordnung.[1])

Wenn diejenigen Elemente Γ einer Mannigfaltigkeit V von der Dimension d, die der algebraischen Bedingung c genügen, zu einer Mannigfaltigkeit von der Dimension $d-k$ gehören (so daß, falls diese Mannigfaltigkeit sich in Teile von verschiedenen Dimensionen spaltet, $d-k$ die größte dieser Dimensionen ist), so sagt man, *die Bedingung c habe die Dimension k*.

Unterwirft man die Elemente Γ einer algebraischen Mannigfaltigkeit V zwei gegebenen Bedingungen a, b, so definiert man auf folgende Weise die *Summe* und das *Produkt* der beiden Bedingungen[2]): Unter der Summe $a+b$ oder $b+a$ der beiden Bedingungen versteht man die Bedingung, daß das in V veränderliche Element Γ der Bedingung a oder b genügt. Die algebraische Mannigfaltigkeit der Elemente Γ, die der Bedingung $a+b$ genügen, ist die *Summe* der Mannigfaltigkeiten A und B der Elemente Γ, die den Bedingungen a und b einzeln genügen; dabei ist das Wort Summe in demselben Sinne gebraucht wie in der Geometrie auf einem algebraischen Gebilde. Die Dimension von $a+b$ ist offenbar die kleinere der Dimensionen von a und b.

Unter dem Produkt ab oder ba der beiden gegebenen Bedingungen a und b versteht man die Bedingung, daß das in V veränderliche Element Γ den Bedingungen a und b gleichzeitig genügt. Die Mannigfaltigkeit der Elemente Γ, die der Bedingung ab genügen, ist das *Schnittgebilde* der vorhin genannten Mannigfaltigkeiten A und B; es versteht sich dabei von selbst, daß jedes gemeinsame Element Γ in der Gesamtheit der Schnittelemente mit der gehörigen *Multiplizität* gezählt werden muß.

1) Vgl. Severi, Palermo Rend. 33, 316 (1912).

2) Vgl. H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879, S. 3 und H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, Leipzig 1914, S. 360.

Was die Dimension von ab anbetrifft, so behauptet man gewöhnlich, sie sei nicht größer als die Summe $h+k$ der Dimensionen von a und b. Aber in Wirklichkeit ist diese Behauptung nicht unbedingt richtig, weil zwei Mannigfaltigkeiten A und B von den Dimensionen $d-h$ und $d-k$, die einer Mannigfaltigkeit V von der Dimension d angehören, sich sehr wohl in einer Mannigfaltigkeit schneiden können, deren Dimension kleiner als $d-(h+k)$ ist. Im folgenden geben wir hinreichend allgemeine Voraussetzungen, unter denen die oben genannte Behauptung zutrifft:

Wenn die beiden Mannigfaltigkeiten A, B ein spezielles Element Γ_0 gemeinsam haben, das der Ursprung eines einzigen Linearmantels von V ist, dann haben A und B eine Mannigfaltigkeit gemeinsam, die Γ_0 enthält, und deren Dimension mindestens gleich $d-(h+k)$ ist (Anhang F, Nr. 2, S. 311); die Dimension der Bedingung ab ist somit höchstens gleich $h+k$.

Wenn die Mannigfaltigkeit V irreduzibel ist, und wenn die zwei Bedingungen a, b beide einer derartigen stetigen Variation fähig sind, daß die Mannigfaltigkeiten A, B innerhalb V zwei stetige Systeme beschreiben, von denen jedes die ganze Mannigfaltigkeit V einnimmt, so ist die Dimension der Bedingung ab höchstens gleich $h+k$. Betrachtet man nämlich ein (allgemeines) Element Γ_0 von V, das der Ursprung eines einzigen Linearmantels ist, so gehört Γ_0 mindestens zu einer Mannigfaltigkeit A und zu einer Mannigfaltigkeit B, und man kommt demnach auf den vorhergehenden Fall zurück.

Die beiden *Bedingungen* a und b heißen *unabhängig*, wenn die Dimension ihres Produkts genau gleich $h+k$ ist.

Wir wollen uns nicht weiter bei diesen Begriffen aufhalten, die die Grundlage der sogenannten abzählenden Geometrie und der darauf bezüglichen Rechensymbolik bilden; es genügt uns, das vorausgeschickt zu haben, was für das folgende unerläßlich ist. Wir fügen nur noch zwei weitere Bemerkungen hinzu, die uns nützlich sein werden.

Die eine bezieht sich auf die sogenannte *Abzählung der Konstanten*. Wenn zwischen den Elementen Γ, Γ' zweier irreduzibler algebraischer Mannigfaltigkeiten V, V' von den Dimensionen d, d' eine algebraische Korrespondenz von der Art besteht, daß einem allgemeinen Element Γ von $V \infty^{r'}$ $(r' \geqq 0)$ Elemente von V' entsprechen, die eine gewisse Mannigfaltigkeit W' bilden, und daß einem allgemeinen Element Γ' von $V' \infty^{r}$ $(r \geqq 0)$ Elemente von V entsprechen, die eine Mannigfaltigkeit W erfüllen, so besteht die Beziehung $r + d' = r' + d$.

Man kann nämlich, ohne eine wesentliche Einschränkung einzuführen, annehmen, daß Γ und Γ' Punkte zweier genügend umfassender linearer

Räume S_ϱ und $S'_{\varrho'}$ seien. Dann betrachten wir zwei allgemeine Schnitte Φ, Φ' von V, V' mit zwei allgemein gewählten linearen Räumen $S_{\varrho-r}$ und $S'_{\varrho'-r'}$. Sie sind irreduzibel und haben die Dimensionen $d-r$ und $d'-r'$. Das Schnittgebilde Φ schneidet eine allgemeine Mannigfaltigkeit W in einer endlichen Anzahl n von Punkten, die gleich der Ordnung von W ist; und ebenso schneidet Φ' eine allgemeine Mannigfaltigkeit W' in n' Punkten, wobei n' die Ordnung von W' ist. Zwischen Φ und Φ' entsteht daher eine algebraische Korrespondenz mit den endlichen Indizes (n, n'), und somit haben Φ und Φ' dieselbe Dimension, d. h. es ist $d-r=d'-r'$.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Art und Weise, wie man feststellen kann, ob eine algebraische Bedingung irreduzibel ist oder nicht.

Die algebraische Bedingung c möge einer stetigen Variation fähig sein und sich ausdrücken lassen durch eine algebraische Korrespondenz ω zwischen den Elementen Γ einer Mannigfaltigkeit V, denen sie auferlegt wird, und den Elementen Γ' einer anderen Mannigfaltigkeit V', mit deren Hilfe sie definiert ist. Soll c irreduzibel sein, so müssen auch die Mannigfaltigkeiten V und V' irreduzibel sein. Dies genügt aber nicht, wie wir schon oben bemerkt haben, denn es muß auch die Mannigfaltigkeit der in der Korrespondenz ω einander entsprechenden Elementenpaare Γ, Γ' irreduzibel sein.

Man kann also behaupten, daß die Bedingung c irreduzibel ist, wenn die Mannigfaltigkeiten V und V' irreduzibel sind, und wenn außerdem die beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1. einem *allgemeinen* Element Γ soll eine irreduzible Mannigfaltigkeit von Elementen Γ' entsprechen;

2. wählt man *irgendein* spezielles Element Γ_0 von V, so soll es möglich sein, ein *beliebiges* unter den mittels der Korrespondenz ω dem Element Γ_0 entsprechenden Elementen von V' als Grenzlage eines Elements Γ' zu erhalten, das einem allgemeinen Element Γ entspricht, indem man auf Grund einer geeigneten Variationsvorschrift das Element Γ in Γ_0 überführt.

In der Tat, wenn die Korrespondenz ω sich in die Summe zweier Korrespondenzen ω_1, ω_2 spaltet, so könnte einem allgemeinen Element Γ von V kein Element in wenigstens einer der beiden Korrespondenzen ω_1 und ω_2 entsprechen; denn wäre dies der Fall, so würde die Mannigfaltigkeit der den Elementen Γ entsprechenden Elemente Γ' aus zwei durchaus verschiedenen Teilen bestehen, und dies würde der ersten Voraussetzung widersprechen. Daher tritt eine der beiden Korrespondenzen, z. B. ω_2, nur zwischen den Elementen einer in V enthaltenen Mannigfaltigkeit W

und den Elementen von V' (oder einer in V' enthaltenen Mannigfaltigkeit) auf. Dies widerspricht aber der zweiten Voraussetzung; denn unter den Elementen Γ', die einem in W gewählten Element Γ_0' entsprechen, würde es solche geben, die nicht als Grenzlagen für die einem allgemeinen Element Γ entsprechenden Elemente Γ' angesehen werden können, und zwar wären dies die Elemente Γ', die in der Korrespondenz ω_2 dem gewählten Element Γ_0 entsprechen.

Wenn daher die Voraussetzungen 1. und 2. erfüllt sind, so kann die Korrespondenz ω und also auch die Bedingung c nicht reduzibel sein.

Ist die zweite Voraussetzung erfüllt, die erste aber nicht, so kann die Korrespondenz ω trotzdem irreduzibel sein. Falls einem allgemeinen Element Γ eine aus mehreren Teilen von gleicher Dimension zusammengesetzte Mannigfaltigkeit entspricht, so ist ω dann und nur dann irreduzibel, wenn bei einem Umlauf von Γ in V, der von einer Anfangslage ausgeht und in diese zurückführt, zwei beliebige dieser Teile mit einander vertauscht werden können.

Alles was oben über die Unzerlegbarkeit von ω gesagt wurde, gilt natürlich auch, wenn man die Rollen der Mannigfaltigkeiten V und V' vertauscht.

Der Begriff der irreduziblen algebraischen Bedingung ist in Verbindung mit demjenigen der irreduziblen algebraischen Korrespondenz zwischen zwei Mannigfaltigkeiten vom Verfasser in einer Abhandlung in den Palermo Rend. 33, 316 (1912) eingeführt worden (vgl. auch eine spätere Abhandlung in den Ven. Ist. Atti 75, 1121 (1916)) mit der Absicht, eine genaue Formulierung für den Geltungsbereich des sogenannten *Prinzips der Erhaltung der Anzahl* zu gewinnen. Der Verfasser hat bewiesen, daß dieses Prinzip für alle Bedingungen gilt, die irreduzibel sind oder sich in Summen von irreduziblen Bedingungen derselben Dimension auflösen.[1])

8. Strenge Berechnung der Mannigfaltigkeitsstufe der (spezialen oder nicht-spezialen) Scharen g_n^r von gegebener Ordnung n und gegebener Dimension r auf einer Kurve mit allgemeinen Moduln. In Nr. 57 (S. 158) haben wir die Anzahl τ der Parameter berechnet, von denen die zu einer Kurve vom Geschlecht p gehörigen linearen Scharen g_n^r abhängen, und für τ den Ausdruck $(r+1)(n-r)-rp$ gefunden. Dieser Wert ist unbedingt richtig, wenn es sich um nicht-speziale Scharen g_n^r handelt; auch für die Spezialscharen gilt er unter der Voraussetzung, daß die Kurve, auf der die Scharen liegen, allgemeine Moduln besitzt. Aber bei der Berechnung der Mannigfaltigkeitsstufe der Spezialscharen wurde ein Postulat zugrunde gelegt (S. 159), und infolgedessen

1) Siehe auch Enriques-Chisini, a. a. O., Bd. II, S. 321.

trägt das Ergebnis mehr den Stempel eines Wahrscheinlichkeitsurteils als eines sicheren und eigentlichen Lehrsatzes.

Wir wollen nun zeigen, wie diese Berechnung in voller Strenge durchgeführt werden kann, ohne das Postulat von S. 159 vorauszusetzen.

Wie wir in Nr. 57 gesehen haben, handelt es sich im wesentlichen darum, die Parameter abzuzählen, von denen die spezialen Vollscharen auf einer Kurve mit allgemeinen Moduln abhängen. Hat man nämlich bewiesen, daß diese Scharen g_n^r von $\tau = (r+1)(n-r) - rp$ Parametern abhängen, so folgt daraus sofort (S. 159), daß die spezialen Teilscharen g_n^r von weniger als τ Parametern abhängen; fügt man also diese letzteren Scharen zu der Mannigfaltigkeit der ersteren hinzu, so bleibt die Dimension der Mannigfaltigkeit aller Scharen g_n^r gleich τ.

Andererseits läßt sich die Aufgabe, die Anzahl τ der Parameter zu berechnen, von denen die spezialen Vollscharen g_n^r auf einer Kurve mit allgemeinen Moduln (die also nicht hyperelliptisch ist) abhängen, nach Nr. 57 (S. 158) auf die andere Aufgabe zurückführen, die Anzahl $\sigma = \tau + r$ der Parameter zu berechnen, von denen die Räume S_{n-r-1} abhängen, welche die kanonische Kurve C mit allgemeinen Moduln im Raume S_{p-1} n-fach schneiden. Es handelt sich also darum, zu beweisen, daß für $\tau \geqq 0$ die Mannigfaltigkeitsstufe σ der n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} genau gleich $\tau + r$ ist, daß es dagegen für $\tau < 0$ keinen Raum S_{n-r-1} gibt, der die Kurve C n-fach schneidet.

Zu diesem Zweck schicken wir zunächst einen Hilfssatz voraus:

Auf einer rationalen Kurve hängen die Scharen g_n^r, die mit bezug auf p gegebene allgemeine Punktepaare der Kurve virtuell vollständig sind, von τ Parametern ab, wenn $\tau = (r+1)(n-r) - rp \geqq 0$ ist; ist dagegen $\tau < 0$, so gibt es überhaupt keine derartigen Scharen.

CSK conjecture

Wir nehmen als projektives Modell der betrachteten rationalen Kurve eine rationale Normalkurve D von der n-ten Ordnung im Raume S_n. Dann wird eine Schar g_n^r, die in bezug auf p gegebene Punktepaare von D virtuell vollständig ist (s. Anhang F, Nr. 12, S. 349), auf der Kurve D durch ein lineares System von ∞^r Überebenen ausgeschnitten, und zwar gehen diese Überebenen durch einen Raum S_{n-r-1}, der sich auf p Sehnen von D stützt, nämlich die Verbindungslinien der p gegebenen Punktepaare. Um also die genannten Scharen g_n^r abzuzählen, braucht man nur die Anzahl der Räume S_{n-r-1} zu berechnen, die sich auf p allgemeine Sehnen von D stützen.

Die Bedingung, daß ein im S_n eingebetteter Raum S_{n-r-1} eine gegebene Gerade trifft, hat die Dimension r; die Bedingung, daß er p gegebene Geraden trifft, ist das Produkt der auf diese einzelnen Geraden bezüglichen Bedingungen. In diesem Fall kann man ohne weiteres behaupten, daß die Dimension der als Produkt erscheinenden Bedingung höchstens gleich rp ist. Es handelt sich nämlich dabei um p Bedingungen, die einer stetigen Variation fähig sind; die Mannigfaltigkeiten der ihnen genügenden Räume S_{n-r-1} bewegen sich in einer irreduziblen Mannigfaltigkeit (nämlich in der Mannigfaltigkeit der sämtlichen im S_n eingebetteten Räume S_{n-r-1}) und durchlaufen diese ganz.

Für eine allgemeine Wahl der p Sehnen von D sind die p genannten r-fach ausgedehnten Bedingungen unabhängig, d. h. sie sind in ihrer Gesamtheit gleichbedeutend mit einer Bedingung von der Dimension rp. Wenn also $rp > (r+1)(n-r)$, d. h. wenn $\tau < 0$ ist, so gibt es keinen Raum S_{n-r-1}, der sich auf diese Sehnen stützt; wenn $\tau > 0$ ist, so gibt es ∞^τ Räume S_{n-r-1}, die sich auf diese Sehnen stützen.

Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir in erster Linie, daß die Räume S_{n-r-1}, die die allgemeine kanonische Kurve C vom Geschlecht p n-fach schneiden, für $\tau \geqq 0$ höchstens von $\tau + r$ Parametern abhängen, daß es dagegen für $\tau < 0$ keine derartigen Räume gibt.

Zu dem Zweck unterwerfen wir die Kurve C einer stetigen Bewegung in ihrer eigenen Familie K, die die Dimension $l = (p-1)(p+4)$ hat, und führen sie dabei über in eine allgemeine Kurve C_p der Familie V_p, die aus den rationalen Kurven der Ordnung $2p-2$ mit p Doppelpunkten besteht (Anhang G, Nr. 6, S. 374). Wir werden beweisen, daß die Räume S_{n-r-1}, die die Kurve C_p n-fach schneiden, für $\tau \geqq 0$ von genau $\tau + r$ Parametern abhängen, und daß es für $\tau < 0$ keine derartigen Räume gibt. Hieraus wird der für die Mannigfaltigkeitsstufe σ ausgesprochene Satz folgen.

Wenn sich C der Kurve C_p unbeschränkt nähert, so geht ein Raum S_{n-r-1}, der n Schnittpunkte mit C gemein hat, in einen Raum S_{n-r-1} über, der, als n-fach schneidender Raum von C_p betrachtet, sich in bezug auf die Doppelpunkte von C_p *uneigentlich* oder *eigentlich* verhalten kann, je nachdem er uneigentliche Sehnen von C_p enthält oder nicht (vgl. Nr. 2 dieses Anhangs, S. 358). Es kann übrigens auch der Fall eintreten, daß der Grenzraum S_{n-r-1} sich in bezug auf einige Doppelpunkte von C_p eigentlich verhält, in bezug auf andere uneigentlich. Wenn ein Raum S_{n-r-1}, der C_p in n verschiedenen Punkten schneidet, einer stetigen Variation unterworfen werden kann, derart, daß einer dieser Schnittpunkte, etwa P, sich einem Doppelpunkt O von C_p auf einem der von O ausgehenden beiden Zweige unbeschränkt nähert, so kann die Grenzlage dieses Raumes S_{n-r-1} hinsichtlich des Doppelpunktes O sowohl ein eigentlicher wie ein uneigentlicher n-fach schneidender Raum S_{n-r-1} sein. Man erhält den ersten Fall, wenn bei der Annäherung von P an O kein anderer Schnittpunkt sich nach O hinbewegt, oder wenn für den Fall, daß irgendein anderer Schnittpunkt Q sich nach O hinbewegt, diese Bewegung auf demselben Zweig erfolgt, wie die von P. Man erhält den zweiten Fall, wenn bei der Annäherung von P an O (mindestens) ein weiterer Schnittpunkt Q sich auf dem anderen Zweig nach O hinbewegt. Die Grenzlage der Geraden PQ ist dann eine von O ausgehende uneigentliche Sehne von C_p.

Nachdem so genauer festgelegt ist, daß sich als Grenzfälle der n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} von C gewisse n-fach schneidende Räume S_{n-r-1} von C_p ergeben, die sich hinsichtlich der Doppelpunkte von C_p eigentlich oder uneigentlich verhalten können, beachten wir, daß die Räume S_{n-r-1}, welche die Kurve C_p in n Punkten schneiden, mindestens von σ Parametern abhängen; denn jeder n-fach schneidende Raum S_{n-r-1} von C liefert als Grenzfall einen oder mehrere n-fach schneidende Räume S_{n-r-1} von C_p, je nachdem der Grenzraum S_{n-r-1} von dem Gesetz, das für die Überführung von C in die Grenzlage C_p maßgebend ist, unabhängig ist oder nicht. Es wird also die Zahl der Parameter, von denen die n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} der Kurve C_p abhängen, eine obere Grenze für σ bilden.

Wir wollen daher die Räume S_{n-r-1} abzählen, die die Kurve C_p n-fach schneiden. Da ein derartiger Raum den Gruppen der virtuellen kanonischen Schar g_{2p-2}^{p-1} der Kurve C_p (für welche die p Doppelpunkte als virtuell nicht vorhanden angesehen werden) $n-r$ unabhängige Bedingungen auferlegt, so bestimmt er durch seine voneinander verschiedenen oder zusammenfallenden Schnittpunkte mit C_p auf dieser Kurve eine virtuell vollständige Schar g_n^r, d. h. er gehört zu einem (rationalen) r-fach unendlichen irreduziblen System von Räumen derselben Art. Um also die Anzahl der Parameter zu finden, von denen die n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} der Kurve C_p abhängen, addiert man die Zahl r zu der Anzahl der Parameter, von denen die Scharen g_n^r auf C_p abhängen, die in bezug auf p allgemein gegebene neutrale Punktepaare virtuell vollständig sind. Auf Grund des Hilfssatzes wissen wir schon, daß diese Scharen g_n^r für $\tau \geqq 0$ τ-fach unendlich sind, und daß es für $\tau < 0$ überhaupt keine solchen Scharen gibt. Daraus folgt, daß es für $\tau > 0$ $\infty^{\tau+r}$ Räume S_{n-r-1} gibt, die die Kurve C_p n-fach schneiden, und daß es für $\tau < 0$ keine derartigen Räume gibt. Ist $\tau \geqq 0$, so erhält man also für die Anzahl der Parameter, von denen die n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} der allgemeinen Kurve C abhängen, die Ungleichung

$$\sigma \leqq \tau + r, \tag{1}$$

und außerdem läßt sich behaupten, daß für $\tau < 0$ überhaupt kein derartiger Raum S_{n-r-1} vorhanden ist. Es bleibt uns also noch die Aufgabe, für $\tau \geqq 0$ eine der vorigen entgegengesetzte Ungleichung zu finden, damit man schließen kann, daß $\sigma = \tau + r$ ist.

Zu dem Zweck beachte man zunächst, daß es genügt, eine solche Ungleichung für $n \leqq p - 1$ aufzustellen; denn auf der Kurve C gehört zu jeder spezialen Vollschar g_n^r, bei der $n \geqq p - 1$ ist, eine speziale Vollschar $g_{n'}^{r'}$, bei der $n' \leqq p - 1$ ist, und umgekehrt. Die beiden Scharen g_n^r und $g_{n'}^{r'}$ sind gegenseitig Residuen in bezug auf die kanonische Schar von C. Die Zahl der Parameter, von denen die spezialen Vollscharen einer gegebenen Ordnung und Dimension abhängen, ist also bekannt, sobald man die Zahl der Parameter kennt, von denen die Vollscharen g_n^r abhängen, für die $n \leqq p - 1$ ist.

Wir werden demnach im folgenden $n \leqq p - 1$ und $\tau \geqq 0$ voraussetzen. Wir beweisen in erster Linie, daß durch eine Gruppe G von n allgemeinen Punkten des Raumes S_{p-1} irreduzible Kurven der Familie V hindurchgehen. Nimmt man nämlich auf einer kanonischen Kurve C', die in V allgemein gewählt ist, n allgemeine Punkte an, die eine Gruppe G' bilden, so sind diese Punkte linear unabhängig voneinander (Nr. 29, S. 85, Fußnote).[1] Es gibt also $\infty^{(p-1)(p-n+1)}$ nicht ausgeartete Kollineationen des Raumes S_{p-1}, die G' in G überführen und C' in eine durch G gehende kanonische Kurve C verwandeln. Überdies berechnet man auf diese Weise auch leicht die Anzahl λ der Parameter, von denen die durch G gehenden kanonischen Kurven abhängen, und man findet $\lambda = l - n(p-2)$.[1] Da wir nun aber aus den vorhergehenden Betrachtungen wissen, daß durch jede Gruppe von n allgemeinen Punkten irgendeine irreduzible kanonische Kurve geht, so gelangt man zu diesem Ergebnis rascher durch Berechnung der Konstanten. Zwischen der aus den Gruppen von n Punkten des Raumes S_{p-1} bestehenden irreduziblen Mannigfaltigkeit W von der Dimension $n(p-1)$ und der Mannigfaltigkeit V läßt sich eine algebraische Korrespondenz ω herstellen; sie entsteht dadurch, daß man eine Gruppe von n Punkten und eine Kurve C dann einander zuordnet, wenn die Gruppe auf der Kurve liegt. Einer gegebenen Kurve C entsprechen ∞^n Elemente von W; wenn also einem allgemeinen Element von W ∞^λ Kurven C entsprechen, so erhält man

$$\lambda + n(p-1) = l + n, \text{ d. h. } \lambda = l - n(p-2).$$

Die Korrespondenz ω ist irreduzibel, weil die einer allgemeinen Kurve C entsprechenden Gruppen eine n-fach unendliche irreduzible Mannigfaltigkeit bilden, und weil andererseits bei der Bewegung von C nach einer

1) Da $n \leqq p - 1$ ist, so ergibt sich $\lambda \geqq 6(p-1)$, d. h. $\lambda > 0$.

beliebigen Grenzlage C_0 hin die Mannigfaltigkeit der Gruppen von n Punkten auf C die gesamte Mannigfaltigkeit der Gruppen von n Punkten auf C_0 zur Grenze hat (Nr. 7 dieses Anhangs, S. 379).

Aus der Unzerlegbarkeit von ω folgt, daß die Kurven C, die durch eine Gruppe G_0 von n *beliebigen* Punkten des S_{p-1} gehen, alle als Grenzfälle von gewissen Kurven C erhalten werden können, die durch eine allgemein gewählte Gruppe G von n Punkten gehen. Trotzdem kann die Mannigfaltigkeitsstufe der durch G_0 gehenden Kurven von C größer als λ sein; dies wird eintreten, wenn die Mannigfaltigkeit der durch G_0 gehenden Kurven C, die als Grenzfälle der durch G gehenden Kurven C erhalten werden, von der Art und Weise abhängt, in der G sich der Grenzlage G_0 nähert.

Dies vorausgeschickt, wählen wir nun einen beliebigen Raum $S^{(0)}$ von $n-r-1$ Dimensionen und betrachten die Kurven von V, die von $S^{(0)}$ in n Punkten geschnitten werden. Derartige Kurven gibt es sicher, weil durch eine Gruppe von n Punkten im $S^{(0)}$ mindestens ∞^λ solche Kurven hindurchgehen. Es könnte sich jedoch die Frage erheben, ob nicht alle Kurven von V, die durch eine Gruppe G von n allgemeinen Punkten des Raumes $S^{(0)}$ gehen, von selbst zerfallen. Diese Ungewißheit läßt sich auf folgende Weise beheben.

Es sei C'_p eine allgemeine Kurve von V_p und $S^{(1)}$ ein sie n-fach schneidender Raum von $n-r-1$ Dimensionen, der wegen der Voraussetzung $r \geqq 0$ sicher existiert. Es gibt unendlich viele nicht ausgeartete Kollineationen von S_{p-1}, die $S^{(1)}$ in $S^{(0)}$, und daher die Kurve C'_p in eine irreduzible Kurve $C_p^{(0)}$ überführen, die von $S^{(0)}$ in einer gewissen Gruppe G_0 von n Punkten geschnitten wird. Wenn daher sämtliche Kurven C zerfielen, die durch die n allgemeinen Punkte einer Gruppe G des Raumes $S^{(0)}$ gehen, so müßten bei der Bewegung von G nach G_0 alle durch G_0 gehenden Grenzkurven ebenfalls zerfallen, und zwar für jede beliebige Variationsvorschrift. Somit würde durch G_0 eine Kurve von V gehen, wie z. B. die Kurve $C_p^{(0)}$, welche, da sie irreduzibel ist, nicht als Grenzfall einer durch die allgemeine Gruppe G gehenden Kurve erhalten werden könnte; dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß ω irreduzibel ist.

Auf demselben Wege erkennt man, daß die durch n allgemeine Punkte von $S^{(0)}$ gehenden Kurven C nicht alle im Raum $S^{(0)}$ liegen können. Noch eine weitere Folgerung aus der Unzerlegbarkeit von ω müssen wir erwähnen. Ist nämlich die Mannigfaltigkeit der ∞^λ Kurven C, die durch n allgemeine Punkte des Raumes S_{p-1} gehen, reduzibel, so kann sie keine Teile von kleinerer Dimension als λ enthalten; denn wenn man die Gruppe der n Punkte einen Umlauf vollführen läßt, so müssen sich diese Teile zu je zweien vertauschen. Daraus folgt, daß die Mannigfaltigkeit der durch eine spezielle Gruppe von n Punkten des S_{p-1} gehenden Kurven C keine Teile von kleinerer Dimension als λ enthalten kann.

Die Kurven C, die durch eine allgemeine Gruppe G von n Punkten des gegebenen Raumes $S^{(0)}$ gehen, verteilen sich auf eine gewisse Anzahl von irreduziblen Mannigfaltigkeiten $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_t$ von der Dimension $\geqq \lambda$. Unter den genannten Mannigfaltigkeiten gibt es nach dem vorhergehenden mindestens eine, die aus irreduziblen, nicht im Raum $S^{(0)}$ liegenden Kurven besteht, da ja eine irreduzible, durch G gehende und nicht im $S^{(0)}$ liegende Kurve C_p mindestens in einer der Mannigfaltigkeiten Σ enthalten ist. Es bestehe z. B. Σ_1 aus irreduziblen Kurven, die $S^{(0)}$ nur in der Gruppe G schneiden. Variiert man G im Raum $S^{(0)}$, so durchläuft die Mannigfaltigkeit Σ_1 eine irreduzible Mannigfaltigkeit M, deren allgemeine Kurve irreduzibel ist und $S^{(0)}$ nur in n Punkten schneidet. Hat also Σ_1 die Dimension $\lambda + \eta\,(\eta \geqq 0)$, so ist die Dimension von M gleich $n(n-r-1)+\lambda+\eta = l - n(i-1)+\eta$, wobei $i = p-n+r$ gesetzt ist.[1])

Bewegt sich $S^{(0)}$ in der irreduziblen Mannigfaltigkeit N, die aus allen Räumen S_{n-r-1} des S_{p-1} besteht und die Dimension $i(n-r)$ hat[2]), so beschreiben die Kurven von M eine irreduzible Mannigfaltigkeit V' von der Dimension $l-\delta\,(\delta \geqq 0)$, die in V enthalten ist oder mit V zusammenfällt (wenn $\delta = 0$ ist). Ordnet man eine Kurve C von V' und einen Raum S_{n-r-1} dann einander zu, wenn dieser Raum die Kurve C in n Punkten trifft, so entsteht zwischen den Elementen von N und von V' eine algebraische Korrespondenz Ω. Durch diese Korrespondenz werden einem allgemeinen Element von N je $\infty^{l-n(i-1)+\eta}$ Elemente von V' zugeordnet; entsprechen also einem allgemeinen Element von V' $\infty^{\sigma}(\sigma \geqq 0)$ Elemente von N, so erhält man nach dem Prinzip von der Abzählung der Konstanten:

$$l - n(i-1) + \eta + i(n-r) = \sigma + l - \delta,$$

und hieraus:
$$\sigma = \tau + r + \eta + \delta.$$

---

1) Natürlich ist der Fall nicht ausgeschlossen, daß dieselbe Mannigfaltigkeit M bei der Bewegung von G noch von einer anderen unter den Mannigfaltigkeiten Σ durchlaufen werden kann. Wenn man die Gruppe G in $S^{(0)}$ einen vollständigen Umlauf vollführen läßt, so wird M von allen denjenigen Mannigfaltigkeiten Σ durchlaufen, die mit Σ_1 vertauscht werden können.

2) Für die Untersuchung dieser Mannigfaltigkeiten vergleiche man Severi, Ann. di mat. **24**$_3$, 89 (1915).

Dasselbe Beweisverfahren läßt sich für jede aus irreduziblen Kurven C bestehende Mannigfaltigkeit wiederholen, die in ähnlicher Weise erzeugt wird, wenn man von einer anderen Mannigfaltigkeit Σ ausgeht. Da es nun unter diesen Mannigfaltigkeiten mindestens eine gibt (wir können annehmen, es sei die oben betrachtete Mannigfaltigkeit V'), die die irreduzible Mannigfaltigkeit der irreduziblen Kurven C_p enthält, so folgt auf Grund der zuerst gefundenen Ungleichung (1), daß $\eta = \delta = 0$ sein muß. Die Mannigfaltigkeit V' fällt also mit V zusammen, und man erhält den Satz:

Die Räume S_{n-r-1}, die die kanonische Kurve C vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln n-fach schneiden, hängen von $\tau + r$ Parametern ab, falls $\tau = (r+1)(n-r) - rp \geqq 0$ ist; ist $\tau < 0$, so gibt es überhaupt keine solchen Räume.

Mit anderen Worten:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer linearen Schar g_n^r auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln besteht darin, daß $\tau \geqq 0$ ist. Ist $\tau \geqq 0$, so gibt es auf der Kurve genau ∞^τ lineare Scharen g_n^r.

1. Bemerkung. Nähert sich die Kurve C einer Kurve C_0 mit speziellen Moduln, so kann die Mannigfaltigkeitsstufe der n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} von C in der Grenzlage zwar wachsen, aber niemals abnehmen. Daher stellt τ *eine untere Grenze für die Mannigfaltigkeitsstufe der Scharen g_n^r auf einer Kurve vom Geschlecht p mit beliebigen Moduln dar.*

2. Bemerkung. Die n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} einer *beliebigen* kanonischen Kurve C verteilen sich auf eine oder mehrere irreduzible Mannigfaltigkeiten; aber man sieht leicht, daß *für $\tau \geqq 0$ die Dimension jeder dieser Mannigfaltigkeiten nicht kleiner als $\tau + r$ ist. Bei einer kanonischen Kurve C mit allgemeinen Moduln verteilen sich also die n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} ($\tau \geqq 0$) auf eine endliche Anzahl von Mannigfaltigkeiten, von denen jede genau die Dimension $\tau + r$ (und keine kleinere) hat.*

Der Satz ist offenbar richtig für $r = 0$, da ja die Mannigfaltigkeit der n-fach schneidenden Räume S_{n-1} von C irreduzibel ist. Wir setzen also $r \geqq 1$ voraus. Nun sei H eine der irreduziblen Mannigfaltigkeiten, in die die Mannigfaltigkeit der n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} von C möglicherweise zerfällt. Wir setzen außerdem zunächst voraus, daß die n Stützpunkte eines allgemeinen, der Mannigfaltigkeit H angehörigen Raumes S_{n-r-1} nicht in einem Raum von kleinerer Dimension liegen.

so daß also die durch jene Stützpunkte bestimmte lineare *Vollschar* eine g_n^r ist. Wir beweisen, daß ein allgemeiner S_{n-r-1} von H die Kurve C in n verschiedenen Punkten schneidet. Wenn die genannte g_n^r keine festen Punkte besitzt, so hat ihre allgemeine Gruppe keine mehrfachen Punkte (Nr. 34, S. 96), und folglich schneidet der durch die allgemeine Gruppe von g_n^r bestimmte Raum S_{n-r-1} die Kurve C in n verschiedenen Punkten. Hat die g_n^r einen s-fachen festen Punkt P, so ist die Residualschar dieses s-fachen Punktes in bezug auf g_n^r eine Vollschar g_{n-s}^r, deren Gruppen in Räumen $S_{n-s-r-1}$ liegen, die die Kurve C $(n-s)$-fach schneiden. Jeder dieser Räume ist mit dem Raume S_{s-1}, der die Kurve C in P oskuliert, durch einen S_{n-r-1} verbunden, der auf C eine Gruppe der gegebenen g_n^r ausschneidet. Außerdem schneidet jeder allgemein gewählte unter den genannten Räumen $S_{n-s-r-1}$ die Kurve C in $n-s$ verschiedenen Punkten. Nun ist jeder der Räume $S_{n-s-r-1}$ mit s allgemeinen Punkten von C durch einen n-fach schneidenden Raum S_{n-r-1} verbunden, der in einer s-fach unendlichen irreduziblen Mannigfaltigkeit beweglich ist. Folglich gehören die Räume S_{n-r-1}, die auf C die Gruppen der gegebenen g_n^r ausschneiden, zu einer umfassenderen irreduziblen Mannigfaltigkeit von n-fach schneidenden Räumen S_{n-r-1} der Kurve C, die die Dimension $r+s$ besitzt. Ein allgemein gewählter unter diesen Räumen schneidet C in n verschiedenen Punkten.

In ähnlicher Weise schließt man, wenn die betrachtete g_n^r mehrere voneinander verschiedene feste Punkte hätte.

Da aber selbstverständlich jede irreduzible Mannigfaltigkeit von n-fach schneidenden Räumen S_{n-r-1} der Kurve C, zu der das allgemeine Element $S^{(0)}$ von H gehört, ganz in H liegt, so kann man behaupten, daß der allgemeine Raum von H die Kurve C in n verschiedenen Punkten trifft.

Liegen ferner die n Stützpunkte des allgemeinen Raumes $S^{(0)}$ von H in einem Raum $S_{n-r-\delta-1}$ $(\delta > 0)$ — und zwar so, daß die von ihnen festgelegte Vollschar eine $g_n^{r+\delta}$ ist, — so kann man denselben Gedankengang auf die irreduzible Mannigfaltigkeit K der Räume $S_{n-r-\delta-1}$ anwenden, die durch die Gruppen der Stützpunkte der Räume von H bestimmt sind, und man kommt so zu dem Schluß, daß für einen allgemein gewählten unter den Räumen von K und also auch für einen allgemein gewählten unter den Räumen von H, etwa $S^{(0)}$, die n Stützpunkte verschieden sind.

Sofern der betrachtete Raum $S^{(0)}$ von H als Element der Mannigfaltigkeit N angesehen wird, die aus allen im S_{p-1} enthaltenen Räumen S_{n-r-1} besteht, ist er Ursprung eines einzigen Linearmantels von $i(n-r)$

Dimensionen.[1]) Zu diesem gehören gewisse n Mäntel von $i(n-r)-(i-1)$ Dimensionen, und zwar besteht jeder von ihnen aus den zu $S^{(0)}$ äußerst benachbarten Räumen S_{n-r-1}, die C in einem Punkt treffen, welcher zu einem bestimmten unter den genannten Stützpunkten benachbart ist.[2]) Diese n Mäntel haben daher (Anh. F, Nr. 2, S. 312) eine Mannigfaltigkeit gemein, die $S^{(0)}$ enthält, und deren Dimension mindestens gleich

$$n[i(n-r)-(i-1)]-(n-1)(n-r)i = n - ri = \tau + r$$

ist. Da nun diese gemeinsame Mannigfaltigkeit aus n-fach schneidenden Räumen S_{n-r-1} der Kurve C gebildet wird, und da andererseits H die einzige aus n-fach schneidenden Räumen S_{n-r-1} bestehende Mannigfaltigkeit ist, der $S^{(0)}$ angehört, so folgt, daß H mindestens die Dimension $\tau + r$ hat.

Eine bemerkenswerte Folge des bewiesenen Satzes ist diese: *Auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln verteilen sich die spezialen Teilscharen g_n^r auf Mannigfaltigkeiten (von der Dimension $<\tau$), die in den aus den spezialen Vollscharen g_n^r bestehenden irreduziblen Mannigfaltigkeiten von der Dimension τ enthalten sind.*

In der Tat, es sei G eine Gruppe von n Punkten auf C, die eine speziale Vollschar $g_n^{r+\delta}$ $(\delta > 0)$ definiert und also in einem die Kurve C n-fach schneidenden Raume $S_{n-r-\delta-1}$ liegt. Bezeichnet man den Spezialitätsindex von G mit $j = p - n + r + \delta = i + \delta$, so gehört der Raum $S_{n-r-\delta-1}$ nach dem vorstehenden zu (mindestens) einer irreduziblen Mannigfaltigkeit von der Dimension $\tau + r - \delta(j + r)$, die aus ähnlichen n-fach schneidenden Räumen von C besteht. Durch jeden dieser Räume $S_{n-r-\delta-1}$ gehen $\infty^{\delta i}$ Räume S_{n-r-1}; betrachtet man also G als Gruppe der Stützpunkte eines gewissen Raumes $S^{(0)}$, der zu den $\infty^{\delta i}$ durch diese Gruppe gehenden Räumen S_{n-r-1} gehört, so wird der Raum $S^{(0)}$ zu einer irreduziblen Mannigfaltigkeit H' von der Dimension $\tau + r - \delta(r+\delta)$ (d. h. $<\tau + r$) gehören, die aus Räumen S_{n-r-1} besteht, von denen sich jeder in n Punkten eines Raumes $S_{n-r-\delta-1}$ auf C stützt.

---

1) Wenn man als homogene Koordinaten eines Punktes in einem linearen Raum von $\binom{p}{n-r} - 1$ Dimensionen die Grassmannschen Koordinaten eines im S_{p-1} veränderlichen Raumes S_{n-r-1} wählt, so wird N birational durch eine Mannigfaltigkeit ohne mehrfache Punkte dargestellt, ohne daß die Eindeutigkeit eine Ausnahme erleidet. Vgl. Severi, Ann. di mat. 24_3, 92 (1915).

2) Es ist leicht zu bestätigen, daß jeder dieser Mäntel linear ist; denn die Mannigfaltigkeit der Räume S_{n-r-1}, die durch einen Punkt von S_{p-1} gehen, ist birational äquivalent mit der Mannigfaltigkeit der im S_{p-2} enthaltenen Räume S_{n-r-2}, ohne daß die Eindeutigkeit der Korrespondenz eine Ausnahme erleidet, und ferner ist der Zweig, der einen Punkt von C zum Ursprung hat, linear.

Hieraus folgt, daß der allgemeine Raum einer aus n-fach schneidenden Räumen S_{n-r-1} der Kurve C bestehenden irreduziblen Mannigfaltigkeit H von der Dimension $\tau + r$ auf C nur n Punkte ausschneiden kann, die eine Vollschar g_n^r definieren; denn wenn die Dimension der definierten Vollschar größer als r wäre, so müßte, wie nunmehr bewiesen ist, die Dimension von H kleiner als $\tau + r$ sein.

Da ferner ein allgemeiner Raum von H' die Kurve C in n verschiedenen Punkten schneidet, so wird H' (mindestens) in einer irreduziblen Mannigfaltigkeit H von der Dimension $\tau + r$ enthalten sein, die aus n-fach schneidenden Räumen S_{n-r-1} der Kurve C besteht.

Die Gruppen von n Punkten der Kurve C, die für die kanonischen Gruppen weniger als $n - r$ Bedingungen vorstellen, verteilen sich daher auf Mannigfaltigkeiten, die in den Mannigfaltigkeiten der Gruppen von n Punkten enthalten sind, welche genau $n - r$ Bedingungen vorstellen. Daraus folgt aber unsere Behauptung.

3. Bemerkung. Aus dem Hauptsatz dieser Nummer folgt ohne weiteres, *daß die kleinste Ordnung der auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln vorhandenen Scharen g_n^r einer gegebenen Dimension die kleinste ganze Zahl v_r ist, für die $(r+1)(v_r - r) \geqq rp$ wird, d. h. die Zahl $v_r = p - \pi_r + r$, wo π_r die größte ganze Zahl bedeutet, die in $\frac{p}{r+1}$ enthalten ist.*[1])

9. Betrachtungen über die Unzerlegbarkeit der Bedingung, die ausdrückt, daß ein Raum S_{n-r-1} eine kanonische Kurve n-fach schneidet. Fragen der abzählenden Geometrie. Es erhebt sich hier eine wichtige Frage, auf die wir eine bejahende Antwort geben zu können glauben, nämlich die Frage, *ob die algebraische Korrespondenz Ω* (S. 386) *zwischen der irreduziblen Mannigfaltigkeit V der kanonischen Kurven C und der irreduziblen Mannigfaltigkeit N der im S_{p-1} enthaltenen Räume S_{n-r-1} selbst irreduzibel ist.*

Um dies nachzuweisen, hat man z. B. nur zu zeigen, daß die Mannigfaltigkeit M der kanonischen Kurven, die von einem gegebenen Raum S_{n-r-1} n-fach geschnitten werden, irreduzibel ist. Wenn sie für irgendeinen speziellen Raum S_{n-r-1} irreduzibel ist, so ist sie es auch für jeden S_{n-r-1}; denn es gibt unendlich viele Kollineationen des Raumes S_{p-1}, in denen sich die Mannigfaltigkeiten der kanonischen Kurven entsprechen, die zwei gegebene Räume S_{n-r-1} in n Punkten schneiden. Ist also M

---

1) Die kleinste Ordnung einer g_n^r von gegebener Dimension r auf einer Kurve vom Geschlecht p mit *beliebigen* Moduln ist von A. COMESSATTI bestimmt worden. Ven. Ist. Atti **74**, 1685 (1915).

irreduzibel, so kann die algebraische Bedingung dafür, daß eine Kurve C sich in n Punkten auf einen im S_{p-1} veränderlichen Raum S_{n-r-1} stützt, oder, was dasselbe ist, die Bedingung dafür, daß ein Raum S_{n-r-1} sich in n Punkten auf eine in V veränderliche Kurve C stützt, nicht in Bedingungen von verschiedenen Dimensionen und um so weniger in Bedingungen von gleicher Dimension zerfallen.

Oder aber es wird genügen zu beweisen, daß die irreduziblen Mannigfaltigkeiten, in welche die Mannigfaltigkeit der n-fach schneidenden Räume S_{n-r-1} einer allgemeinen Kurve C möglicherweise zerfällt, miteinander vertauscht werden können, wenn C in V einen geschlossenen Umlauf vollführt; und daß außerdem die Räume S_{n-r-1}, die eine spezielle Kurve C n-fach schneiden, alle als Grenzlagen der entsprechenden Räume erhalten werden können, die sich auf die allgemeine Kurve C beziehen.

Wir beschränken uns darauf, den Satz an einem Beispiel zu beweisen. Es sei C eine allgemeine kanonische Kurve 10-ter Ordnung vom Geschlecht 6 im Raume S_5. Die Mannigfaltigkeit V der Kurven C hat die Dimension $l = 50$. Wir betrachten die 4-fach schneidenden Ebenen von C $(n = 4, r = 1, \tau = 0)$, deren es ∞^1 gibt $(\tau + r = 1)$. Sie verteilen sich auf eine endliche Anzahl von einfach unendlichen irreduziblen Mannigfaltigkeiten, von denen jede aus den Ebenen besteht, die die Gruppen einer bestimmten Schar g_4^1 auf C enthalten.

Die Kurven C, die eine gegebene Ebene π in 4 Punkten schneiden, projizieren sich von π aus auf eine andere Ebene π', die π nicht trifft, in ebene Normalkurven 6-ter Ordnung vom Geschlecht 6. Ist umgekehrt in π' eine irreduzible Kurve 6-ter Ordnung Γ mit 4 Doppelpunkten und also vom Geschlecht 6 gegeben, so betrachte man die Residualschar g_4^1 der auf Γ von den geraden Linien ausgeschnittenen Schar g_6^2 in bezug auf die kanonische Schar g_{10}^5. Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 vier Punkte einer Gruppe dieser g_4^1. Wir beziehen die Gruppen der kanonischen Schar g_{10}^5 von Γ projektiv auf die Überebenen des S_5, derart, daß also jeder kanonischen Gruppe, die P_1, P_2, P_3, P_4 enthält, und die somit als Residuum in bezug auf die Punkte P eine Gruppe von 6 auf einer geraden Linie a liegenden Punkte liefert, die Überebene zugeordnet wird, die a von π aus projiziert; dies läßt sich auf ∞^{18} verschiedene Arten ausführen.[1]) Man kann dann im Raum S_5 für jede der genannten projektiven Beziehungen eine kanonische Kurve C konstruieren, die von π aus in die Kurve Γ projiziert wird und sich in den der Gruppe P_1, P_2, P_3, P_4 entsprechenden Punkten auf π stützt.

---

1) Vgl. Bertini, a. a. O. Nr. 16, S. 55.

Für jede Wahl des Quadrupels P_1, P_2, P_3, P_4 erhält man somit ∞^{18} kanonische Kurven, die eine irreduzible (rationale) Mannigfaltigkeit bilden.[1]) Jeder Kurve Γ entsprechen also ∞^{19} Kurven C, die die Ebene π in 4 Punkten durchsetzen. Sie bilden eine irreduzible (rationale) Mannigfaltigkeit. Die Kurven Γ aber bilden ihrerseits ebenfalls eine irreduzible Mannigfaltigkeit von der Dimension 23 (Anhang F, Nr. 11, S. 347), und infolgedessen erfüllen die Kurven C, die sich in 4 Punkten auf π stützen, eine irreduzible Mannigfaltigkeit M von der Dimension

$$23 + 19 = 42\,(= l - n(i - 1)).$$

Daraus folgt, daß *die Korrespondenz Ω zwischen V und der Mannigfaltigkeit N der ∞^9 Ebenen des Raumes S_5 irreduzibel ist.*

Ist nun allgemein bewiesen, daß die Korrespondenz Ω zwischen V und N irreduzibel ist, so *ist damit die Anwendbarkeit des Prinzips von der Erhaltung der Anzahl auf die Berechnung der Zahlen gerechtfertigt, welche mit der Mannigfaltigkeit derjenigen Räume S_{n-r-1} verknüpft sind, die die kanonische Kurve mit allgemeinen Moduln n-fach schneiden*, und ferner läßt sich dann dieses Prinzip für die Lösung des sogenannten *Problems der Spezialgruppen* verwenden.[2])

Es handelt sich also darum, die abzählenden Probleme, die mit der kanonischen Kurve C von allgemeinen Moduln zusammenhängen, zu ersetzen durch Probleme, die sich auf spezielle Kurven C mit $1, 2, \ldots, p$ Doppelpunkten oder auch auf zusammengesetzte Kurven beziehen, die der Familie V angehören (insbesondere auf Kurven, die in $2p - 2$ Geraden zerfallen). Für jedes dieser abzählenden Probleme muß natürlich die spezielle Kurve C so gewählt werden, daß die gesuchte Anzahl endlich bleibt.

Ein solches Verfahren ist z. B. von Castelnuovo befolgt worden, um die Anzahl α der Scharen g_n^r zu berechnen, die auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln vorhanden sind, falls $\tau = 0$ ist.[3]) Er findet:

$$\alpha = \frac{1!\,2!\ldots r!\;1!\,2!\ldots r'!\;p!}{1!\,2!\ldots(r + r' + 1)!},$$

wobei mit $r' = i - 1$ die Dimension der Residualschar einer g_n^r in bezug auf die kanonische Schar bezeichnet ist. Das Verfahren Castelnuovos besteht in folgendem: Nimmt man als projektives Bild einer Kurve vom

---

1) Weil diese Mannigfaltigkeit birational äquivalent ist mit der Mannigfaltigkeit der Gruppen von 6 Punkten, die aus 6 Räumen S_3 entnommen sind. Vgl. Bertini, a. a. O. S. 55.

2) Es genügt zu dem Zweck sogar, bewiesen zu haben, daß die zu Ω gehörige algebraische Bedingung sich nicht in eine Summe von Bedingungen mit verschiedenen Dimensionen zerspalten läßt.

3) Rom. Acc. L. Rend. 5_1, 130 (1889).

Geschlecht p eine nicht-speziale Normalkurve Γ von der Ordnung $n + p$ des Raumes S_n, so beweist er zunächst, daß die auf Γ vorhandenen Scharen g_n^r auf dieser Kurve von Überebenen ausgeschnitten werden, die durch p-fach schneidende Räume S_{n-r-1} der Kurve Γ gehen. Wenn also $\tau = 0$ ist, so genügt es, die Zahl der Räume S_{n-r-1} zu finden, die Γ p-fach schneiden. Zu dem Zweck läßt Castelnuovo die Kurve Γ in eine rationale Normalkurve D und in p allgemein gewählte unter ihren Sehnen ausarten. *Eine solche Ausartung ist zulässig*, wie wir in der Bemerkung zu Nr. 5 dieses Anhangs (S. 373) bewiesen haben. Wir haben demnach nur die Anzahl der Räume S_{n-r-1} festzustellen, die sich auf p allgemeine Sehnen von D stützen. Dies setzt natürlich voraus, daß jeder Raum S_{n-r-1}, der die in die Kurve D und in p ihrer Sehnen zerfallende spezielle Kurve Γ p-fach schneidet, als Grenzlage eines Raumes S_{n-r-1} erscheint, der die allgemeine Kurve Γ n-fach schneidet; oder mit anderen Worten: es muß die Bedingung, daß sich ein im S_n enthaltener Raum S_{n-r-1} in p Punkten auf eine veränderliche Kurve Γ stützt, irreduzibel sein, oder sich zum mindesten in eine Summe von irreduziblen Bedingungen derselben Dimension spalten.

Nimmt man an, daß die am Anfang dieser Nummer definierte Korrespondenz Ω irreduzibel ist (oder in Korrespondenzen zerlegbar ist, die die ganzen Mannigfaltigkeiten V, N und nicht bloß untergeordnete Mannigfaltigkeiten beanspruchen), so kommen auch wir dazu, das vorgelegte Problem sofort in ein anderes zu verwandeln, das darin besteht, die Räume S_{n-r-1} abzuzählen, die sich auf p allgemeine Sehnen von D stützen. Denn die Abzählung der Scharen g_n^r auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln ist ohne weiteres gleichbedeutend mit der Abzählung der Scharen g_n^r mit p gegebenen neutralen Paaren auf einer rationalen Kurve (Nr. 8 dieses Anhangs, S. 383, 387).

Dann ist es klar, daß die Anzahl der auf p allgemeine Sehnen sich stützenden Räume S_{n-r-1} gleich ist der Anzahl der Räume S_{n-r-1}, die sich auf p allgemeine Geraden des Raumes stützen; denn die Bedingung, daß ein Raum S_{n-r-1} sich auf p im S_r veränderliche Geraden stützt, ist irreduzibel.[1])

Die Frage ist also darauf zurückgeführt, für $\tau = 0$ die Räume S_{n-r-1} zu zählen, die p allgemeine Geraden des Raumes S_n durchsetzen, und diese Anzahl wird gerade durch die oben angeschriebene Formel geliefert.[2])

---

1) Severi, Palermo Rend. 33, 327 (1912).

2) Castelnuovo, Rom. Acc. L. Rend. 5_4, 71 (1889).

10. Über die Mannigfaltigkeit der Kurven n-ter Ordnung vom Geschlecht p, die einem Raum S_r angehören, falls $n \geqq \frac{r}{r+1}p+r$ ist. Die BRILL-NOETHERschen Normalkurven. In Nr. 5 dieses Anhangs (S. 368) haben wir die Untersuchung der Kurven vom Geschlecht p und von der Ordnung $n \geqq p+r$ durchgeführt, die einem Raum S_r angehören. Hier wollen wir uns nun mit den Kurven vom Geschlecht p beschäftigen, die dem Raum S_r angehören, und deren Ordnung n zwischen den Grenzen $r+\frac{r}{r+1}p \leqq n < r+p$ liegt.

Wir beginnen mit dem Beweis einiger vorbereitender Sätze.

a) *Jede Schar $g^r_{\nu_r}$ $(r>1)$ von kleinster Ordnung, die auf einer Kurve Γ vom Geschlecht $p>2$ mit allgemeinen Moduln liegt, ist eine einfache Vollschar ohne feste Punkte.*

Eine Minimalschar $g^r_{\nu_r}$ besitzt keine festen Punkte; denn wenn sie welche hätte, und man ließe sie außer Betracht, so erhielte man eine r-fach unendliche lineare Schar, deren Ordnung kleiner als ν_r wäre. Sie ist eine Vollschar, denn wenn sie in einer Schar $g^{r+1}_{\nu_r}$ enthalten wäre, so wäre der Rest eines Punktes von Γ in bezug auf diese Schar eine $g^r_{\nu_r-1}$. Daß endlich die $g^r_{\nu_r}$ einfach ist, beweist man so: Da es auf der Kurve Γ mit allgemeinen Moduln keine irrationalen Involutionen gibt (S. 184, 186), so ist die $g^r_{\nu_r}$, wenn sie überhaupt zusammengesetzt ist, mit einer g^1_μ von Γ zusammengesetzt. Man hat alsdann $\nu_r = k\mu$, wobei k eine ganze Zahl $\geqq r$ ist. Man sieht leicht, daß $k=r$ sein muß; denn der Vollschar $g^r_{\nu_r}$ entspricht auf einer Geraden, die das Bild der g^1_μ ist, eine Schar g^r_k, die ebenfalls eine Vollschar sein muß. Folglich ist die Ordnung k von g^r_k gleich ihrer Dimension r. Nun ist aber die Gleichung $\nu_r = r\mu$ unmöglich. In der Tat, aus den Gleichungen

$$\nu_1 = p-\pi_1+1, \qquad \nu_r = p-\pi_r+r$$

folgt
$$r\nu_1-\nu_r = (r-1)p - r\pi_1+\pi_r.$$

Da nun $p \geqq 2\pi_1$ ist, so ist für $r>2$:

$$(r-1)p > \frac{r}{2}p \geqq r\pi_1,$$

und da $\pi_r \geqq 0$ ist, so ergibt sich aus den vorhergehenden Beziehungen $r\nu_1 > \nu_r$. Für $r=2$ ist die rechte Seite der vorstehenden Beziehung immer noch größer als Null; denn wenn auch $p=2\pi_1$ wäre, so hätte man, da ja nach Voraussetzung $p \geqq 3$ ist, auf alle Fälle $\pi_2 > 0$. Folglich ist die Ungleichung $r\nu_1 > \nu_r$ in jedem Fall richtig. Diese Ungleichung widerspricht aber der Gleichung $\nu_r = r\mu$, denn aus dieser folgt, da ja $\mu \geqq \nu_1$ ist, $\nu_r \geqq r\nu_1$.

Die Voraussetzung $p > 2$ braucht man nur im Fall $r = 2$. Wenn $p = 2$ ist, so ergibt sich $\pi_1 = 1$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$, und man hat tatsächlich auf der Kurve eine Minimalschar g_4^2, die mit der g_2^1 der Kurve zusammengesetzt ist. Daher *gilt der Satz a) auch für die Minimalscharen von der Dimension $r > 2$ auf einer Kurve vom Geschlecht 2.*

b) *Auf einer Kurve Γ vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln ist die allgemeine Schar $g_n^r (r \geqq 2)$, deren Ordnung n den Ungleichungen $r + p > n \geqq \nu_r$ genügt, eine einfache Vollschar ohne feste Punkte.*

Es ist kaum nötig, zu sagen, in welchem Sinne der Ausdruck „allgemeine Schar" zu verstehen ist. Wenn $\tau = (r+1)(n-r) - rp = 0$ ist, so ist eine allgemeine Schar g_n^r eine beliebige der Scharen g_n^r, die in diesem Fall in endlicher Anzahl auf Γ vorhanden sind. Ist $\tau > 0$, so muß sich selbstverständlich eine allgemeine g_n^r in einer beliebigen der irreduziblen τ-fach unendlichen Mannigfaltigkeiten finden, in die die Mannigfaltigkeit der auf Γ vorhandenen Scharen g_n^r möglicherweise zerfällt.

Die allgemeine g_n^r besitzt keine festen Punkte; denn wenn sie welche hätte, und man ließe sie außer Betracht, so erhielte man eine $g_{n'}^r$ von der Ordnung $n' < n$, die von τ Parametern abhängen würde, während doch die Scharen $g_{n'}^r$ von $(r+1)(n'-r) - rp < \tau$ Parametern abhängen.

Daß die g_n^r eine Vollschar ist, folgt ohne weiteres aus der 2. Bemerkung der Nr. 8 dieses Anhangs (S. 389). Wir behaupten aber weiter, daß die g_n^r einfach ist. Da es nämlich auf Γ keine irrationalen Involutionen gibt, so muß die g_n^r, wenn sie überhaupt zusammengesetzt ist, es mit einer g_μ^1 sein; da aber g_n^r eine Vollschar ist, so erhält man, wie beim Beweis des Satzes a), die Gleichung $n = r\mu$.

Variiert man die Schar g_n^r innerhalb ihrer eigenen τ-fach unendlichen irreduziblen Mannigfaltigkeit Σ, so muß die Ordnung der g_μ^1, mit der g_n^r zusammengesetzt ist, unverändert bleiben. Wir wollen nun abzählen, von wie vielen Parametern die Scharen g_μ^1 abhängen, die man so erhält. Ist eine g_μ^1 gegeben, so entspricht ihr eine einzige g_n^r von Σ, weil eine Schar g_n^r, die mit einer allgemeinen g_μ^1 zusammengesetzt ist, dadurch erhalten wird, daß man die Gruppen von g_μ^1 auf alle möglichen Arten zu je r zusammenfaßt. Daher entsprechen die Scharen g_μ^1 ein-eindeutig den Scharen g_n^r und hängen von $\tau = (r+1)(n-r) - rp$ Parametern ab. Es ist somit $(r+1)(r\mu - r) - rp \leqq 2(\mu - 1) - p$, da ja $2(\mu-1) - p$ die Anzahl der Parameter ist, von denen alle Scharen g_μ^1 auf Γ abhängen. Nun ergibt sich aber aus der vorhergehenden Ungleichung $(r+2)(\mu-1) \leqq p$, und da $r \geqq 2$ ist, so hat man auch $4(\mu - 1) \leqq p$. Diese Ungleichung ist aber unmöglich, weil ja μ der Ungleichung $2(\mu - 1) \geqq p$ genügen muß. Daraus folgt der Satz b).

Auf Grund des Satzes b) entspricht im Raum S_r einer allgemeinen Schar g_n^r von Γ eine bis auf eine Kollineation dieses Raumes definierte Normalkurve D von der *Ordnung* n und dem Geschlecht p, die mit Γ birational äquivalent ist; die durch die Überebenen auf D erzeugten Schnittpunktgruppen entsprechen den Gruppen der betrachteten Schar g_n^r (Nr. 26, S. 79).

Es gibt also für jede τ-fach unendliche irreduzible Mannigfaltigkeit von Spezialscharen g_n^r auf Γ eine irreduzible Mannigfaltigkeit von Kurven D.

Wir erhalten demnach so viele irreduzible Mannigfaltigkeiten von Kurven D, als es τ-fach unendliche irreduzible Mannigfaltigkeiten von Scharen g_n^r auf der Kurve Γ gibt. Läßt man dann Γ die Gesamtheit der Kurven vom Geschlecht p durchlaufen, so beschreibt jede der genannten irreduziblen Mannigfaltigkeiten von Kurven D eine Familie W von Kurven n-ter Ordnung des Geschlechts p im Raum S_r, deren Dimension $\varrho = n(r+1) - (r-3)(p-1)$ ist (Nr. 58, S. 161), und deren allgemeine Kurve eine speziale Normalkurve mit allgemeinen Moduln ist. Diese *Familie* W wird eine *Spezialfamilie* genannt, weil ihre allgemeine Kurve eine Spezialkurve ist; und sie heißt *regelmäßig (regulär)*, weil ihre Dimension genau gleich $n(r+1) - (r-3)(p-1)$ ist.

Wir beweisen nun den Satz:

c) *In jeder regelmäßigen Spezialfamilie W, die aus Kurven D von der n-ten Ordnung und dem Geschlecht p mit allgemeinen Moduln im Raum S_r besteht* $\left(r + p > n \geqq r + \frac{r}{r+1}\,p\right)$, *gibt es, wenn $r > 2$ ist, rationale Kurven, die nur p (eigentliche) Doppelpunkte besitzen, und, wenn $r = 2$ ist, rationale Kurven, die nur $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ gewöhnliche Doppelpunkte, aber keine höheren Singularitäten haben.*

Zu dem Zweck sei daran erinnert, daß die Familie V der kanonischen Kurven C des Geschlechts p die Familie V_p der rationalen Kurven C_p von der Ordnung $2p-2$ enthält, die p Doppelpunkte besitzen und im Raum S_{p-1} liegen. Da die Kurven D die Bilder der auf C liegenden Scharen g_n^r sind, so sind die zu W gehörigen rationalen Kurven Bilder der Scharen g_n^r, die auf einer in V_p veränderlichen Kurve C_p liegen; diese Scharen sind virtuell vollständig in bezug auf die p neutralen Paare, die mit den Doppelpunkten von C_p zusammenfallen.

Unsere Aufgabe besteht also darin, zu beweisen, daß eine allgemeine Schar g_n^r, die auf einer rationalen Kurve E liegt und in bezug auf p in allgemeiner Weise auf ihr festgelegte neutrale Punktepaare virtuell vollständig ist, für $r > 2$ nur diese neutralen Paare und keine anderen neutralen Punktgruppen besitzt, und daß sie für $r = 2$ nur $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$

weitere neutrale Paare besitzt, die voneinander verschieden sind und aus getrennten Punkten bestehen.

Zu diesem Zweck zählen wir zunächst die Parameter, von denen die Scharen g_n^r mit p auf E veränderlichen neutralen Paaren abhängen. Für eine allgemeine Wahl der p Paare gibt es ∞^τ derartige Scharen g_n^r (Nr. 8, S. 383), und folglich hängen die Scharen g_n^r mit p veränderlichen neutralen Paaren von $\tau + 2p = (r+1)(n-r) - (r-2)p$ Parametern ab, sofern nicht der Fall eintritt, daß jede g_n^r mit p neutralen Paaren von selbst unendlich viele derartige Paare hat.

Nehmen wir einmal an, falls dies möglich ist, daß eine g_n^r mit p allgemein gewählten neutralen Paaren von selbst unendlich viele solcher Paare besitze. Dann ist sie mit einer linearen Schar g_μ^1 von einer gewissen Ordnung μ zusammengesetzt, und in bezug auf diese Schar sind die p gegebenen Paare neutral (d. h. jedes von ihnen gehört zu einer Gruppe von g_μ^1). Wenn ferner, wie wir annehmen, die g_n^r virtuell vollständig ist in bezug auf die p gegebenen Paare, so muß zwischen den Ordnungen n und μ die Beziehung $n = r\mu$ bestehen, und die Gruppen der g_n^r müssen dadurch entstehen, daß man die Gruppen der g_μ^1 zu je r zusammennimmt. Ist also die g_μ^1 einmal gegeben, so wird die g_n^r vollständig definiert sein. Bei der gemachten Annahme werden somit die Scharen g_n^r mit p allgemein gewählten neutralen Paaren von derselben Anzahl $2(\mu-1)-p$ von Parametern abhängen, wie die Scharen g_μ^1 mit p allgemein gewählten neutralen Paaren. Man erhält daher

$$(r+1)(r\mu - r) - rp = 2(\mu - 1) - p, \quad \text{oder} \quad p = (r+2)(\mu - 1),$$

und da $r \geqq 2$ ist, so wird schließlich $p \geqq 4(\mu-1)$. Diese Ungleichung steht aber im Widerspruch zu der Beziehung $p \leqq 2(\mu-1)$, die erfüllt sein muß, damit es eine g_μ^1 mit p allgemein vorgeschriebenen neutralen Paaren geben kann.

Es folgt daraus, daß die Scharen g_n^r mit p auf E veränderlichen neutralen Punktepaaren genau von $(r+1)(n-r)-(r-2)p$ Parametern abhängen.

Für $r > 2$ hängen infolgedessen die Scharen g_n^r mit $p+1$ veränderlichen neutralen Paaren von einer geringeren Anzahl von Parametern ab als die Scharen g_n^r mit p neutralen Paaren. Daraus folgt, daß eine allgemein gewählte unter diesen letzteren neben den p in allgemeiner Weise vorgeschriebenen Paaren nicht von selbst noch ein anderes neutrales Paar haben kann.

Für $r = 2$ hängen die Scharen g_n^2 mit $p \leqq \frac{3}{2}(n-2)$ auf E veränderlichen neutralen Punktepaaren von $3(n-2)$ Parametern ab, und zwar deshalb, weil eine allgemeine Schar g_n^2 auf E eben $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (und nicht unendlich viele) neutrale Punktepaare hat. Die allgemeine g_n^2 hat überdies $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ verschiedene neutrale Paare, von denen jedes aus getrennten Punkten besteht. Ist nämlich, wie man annehmen darf, E eine rationale Normalkurve n-ter Ordnung des Raumes S_n, so bedeutet diese Aussage, daß ein allgemeiner Raum S_{n-3} die Mannigfaltigkeit der Sehnen von E in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ verschiedenen Punkten schneidet und die von den Tangenten der Kurve E gebildete Regelfläche nicht trifft.

Der Satz c) ist also bewiesen. Daraus folgt der weitere Satz:

d) *Die allgemeine Kurve der Familie W hat für $r > 2$ keine mehrfachen Punkte, für $r = 2$ nur gewöhnliche Doppelpunkte.*

In der Tat, wenn die allgemeine Kurve D der Familie W sich einer ebenfalls der Familie W angehörigen rationalen Kurve D_p mit p Doppelpunkten unbeschränkt nähert, so erniedrigt sich das wirkliche Geschlecht von D um p Einheiten; d. h. die p Doppelpunkte von D_p sind in bezug auf die Familie W alle eigentlich. Daraus folgt, daß D keinen mehrfachen Punkt haben kann (der notwendigerweise ein Doppelpunkt wäre, da ja die Kurve D_p, die eine spezielle Kurve D ist, nur Doppelpunkte hat); denn die Grenzlage eines Doppelpunkts von D beim Zusammenfallen von D mit D_p wäre ein uneigentlicher Doppelpunkt.

Die Kurven D_p können sich *von vornherein* auf mehrere Familien des Raumes S_r verteilen. Aber jede von diesen hat die Dimension $\varrho - p$. In der Tat hängen die Kurven C_p, die zu der aus den kanonischen Kurven des Geschlechts p bestehenden Familie V gehören, von $l - p$ Parametern ab (Nr. 6 dieses Anhangs, S. 374), wobei l die Anzahl der Parameter ist, von denen die kanonischen Kurven C abhängen. Andererseits ist die Mannigfaltigkeitsstufe der Scharen g_n^r, welche in bezug auf die mit den p Doppelpunkten einer C_p zusammenfallenden neutralen Paare virtuell vollständig sind, gleich τ, wie die der Scharen g_n^r einer allgemeinen Kurve C.

Faßt man eine τ-fach unendliche irreduzible Mannigfaltigkeit von Scharen g_n^r auf der allgemeinen Kurve C ins Auge, so wird auf jeder Kurve C_p als Grenzfall einer solchen Mannigfaltigkeit eine τ-fach unendliche Mannigfaltigkeit von virtuell vollständigen Scharen g_n^r definiert, und somit mindestens eine bestimmte Familie W_p, die aus Kurven D_p der Familie W besteht und die Dimension $\varrho - p$ hat.

In ähnlicher Weise wird mindestens eine Familie W_h von der Dimension $\varrho - h$ definiert, die aus Kurven D_h vom Geschlecht $p - h$ $(h \leq p)$ besteht, welche zur Familie W gehören; diese Kurven D_h entsprechen den in der Familie V enthaltenen Kurven C_h. Die Mannigfaltigkeit W_h enthält untergeordnete Mannigfaltigkeiten $W_{h+1}, \ldots, W_p$. Eine allgemeine Kurve D_h kann nur h gewöhnliche Doppelpunkte haben; denn läßt man sie einer allgemeinen Kurve D_p von W_p sich unbeschränkt nähern, so muß sich das wirkliche Geschlecht um $p - h$ Einheiten vermindern.

Schließlich beweisen wir noch, daß zu der Familie W auch zusammenhängende n-Seite vom virtuellen Geschlecht p gehören, die $n + p - 1$ (aber nicht mehr) Doppelpunkte besitzen. In der Tat sind die Kurven einer Familie W_p Projektionen von rationalen Normalkurven E des Raumes S_n, und zwar werden diese Projektionen von Räumen S_{n-r-1} aus vorgenommen, die sich auf p Sehnen stützen. Zerfällt die Mannigfaltigkeit der Räume S_{n-r-1}, die sich auf p allgemeine Sehnen von E stützen, in Teile, von denen jeder notwendigerweise die Dimension τ hat (Nr. 8 dieses Anhangs, S. 382), und hält man einen dieser Teile fest, so wird aus Stetigkeitsgründen mindestens eine τ-fach unendliche irreduzible Mannigfaltigkeit von Räumen S_{n-r-1} definiert, die sich auf p allgemeine Sehnen jeder anderen Kurve E stützen. Da sich nun unter den Kurven E die zusammenhängenden n-Seite des Raumes S_n vom virtuellen Geschlecht Null befinden, so wird mindestens eine τ-fach unendliche irreduzible Mannigfaltigkeit von Räumen S_{n-r-1} definiert, die sich auf p allgemeine Sehnen eines allgemeinen n-Seits stützen. Projiziert man dieses n-Seit von einem allgemein gewählten unter jenen Räumen S_{n-r-1} auf S_r, so erhält man dort ein n-Seit vom virtuellen Geschlecht p, das in W_p und also auch in W enthalten ist. Es ergibt sich also der Satz:

e) *In jeder regelmäßigen Spezialfamilie W, die aus Kurven D von der Ordnung n und dem Geschlecht p im Raume S_r besteht $\left(r + p > n \geqq \frac{r}{r+1}p + r\right)$, gibt es n-Seite vom virtuellen Geschlecht p, die von n verschiedenen Geraden mit $n + p - 1$ Schnittpunkten gebildet werden.*

Nimmt man als bewiesen an, daß die in Nr. 9 dieses Anhangs (S. 390) betrachtete Korrespondenz Ω irreduzibel ist, so folgt aus den vorstehenden Betrachtungen ohne weiteres der Satz:

Wenn $r + p > n \geqq r + \frac{r}{r+1}p$ ist, so bilden die irreduziblen Kurven n-ter Ordnung vom Geschlecht p des Raumes S_r eine Familie W, die die regelmäßige Dimension $\varrho = (r+1)n - (r-3)(p-1)$ hat, und deren allgemeine Kurve D keine mehrfachen Punkte besitzt und außerdem eine speziale Normalkurve ist. Die irreduziblen Kurven D_h von W, die $h(\leqq p)$ eigentliche Doppelpunkte haben, bilden eine Familie W_h von der Dimension $\varrho - h$, deren allgemeine Kurve nur die h verlangten Doppelpunkte hat.

Als Ausgangspunkt für die Definition der Familie W kann ein beliebiges zusammenhängendes n-Seit vom virtuellen Geschlecht p im Raume S_r gewählt werden.

Im besonderen kann man im S_r die irreduziblen Kurven des Geschlechts p mit allgemeinen Moduln betrachten, die die kleinste mit der Forderung allgemeiner Moduln verträgliche Ordnung $\nu_r = p - \pi_r + r$ haben. Für $r = 2$ erhält man die sogenannten *Brill-Noetherschen Normalkurven.* Aus dem vorhergehenden ergibt sich ein strenger (von jeder Voraussetzung über die Unzerlegbarkeit der algebraischen Korrespondenz Ω unabhängiger) Beweis für die Tatsache, daß diese ebenen Kurven eine einzige Familie bilden, deren allgemeine Kurve nur gewöhnliche Doppelpunkte hat (vgl. die Sätze a) und d) dieser Nummer und den grundlegenden Satz in Nr. 11 des Anhangs F, S. 347).

Die im vorstehenden dargelegten Sätze über die Klassifikation der Kurven haben ihren Ursprung in einer schon angeführten Note des Verfassers (Rom. Acc. L. Rend. (5) **24**$_1$, 877—888 und 1011—1020 (1915)). Daselbst sind auch andere Sätze über die Kurvenfamilien von unregelmäßiger Dimension $\varrho > (r+1)n - (r-3)(p-1)$ angedeutet, die der Verfasser in einer demnächst erscheinenden Abhandlung weiter ausführen wird.

Für die Klassifikation der Raumkurven sind grundlegend die Untersuchungen von M. Noether (Preisschrift, Berl. Abh. 1882), G. Halphen (Preisschrift, Journ. éc. polyt. **52** (1882)) und H. Valentiner (Acta math. **2**, 199 (1883)). In diesen wird jedoch die Frage der Klassifikation von anderen Gesichtspunkten aus betrachtet als hier. Unsere Untersuchung stützt sich auf die Unterscheidung der verschiedenen Kurvenfamilien mit Hilfe von rationalen Kurven oder zerfallenden Kurven oder n-Seiten, die zu ihnen gehören, während die soeben angeführten Arbeiten über die Raumkurven in erster Linie darauf abzielen, die Kurven der verschiedenen Familien als Schnitte von Flächen zu erhalten.

Die Frage, ob es in einer Familie von Raumkurven oder Überraumkurven Grenzformen gibt, die aus Geraden zusammengesetzt sind, wurde auf Zeuthens Veranlassung im Jahre 1901 von der Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften als Preisaufgabe gestellt. Wie aus den Entwicklungen des Anhangs F hervorgeht, war diese Frage bisher nicht einmal für die Familien ebener Kurven gelöst.

Wir haben oben in erschöpfender Weise bewiesen, daß es in jeder Kurvenfamilie mit allgemeinen Moduln derartige Grenzformen gibt. Für die Raumkurven vom Geschlecht $p \leqq 2$ hat A. Brill die genannte Frage auf andere Weise beantwortet, und zwar mit Hilfe einer zweckmäßigen und eleganten algebraischen Darstellung einer Raumkurve (Math. Ann. **64**, 322 (1907)).

Auch in einer Familie von Kurven n-ter Ordnung vom Geschlecht p im Raume S_r mit speziellen Moduln gibt es Kurven, die aus n verschiedenen

Geraden bestehen (siehe Fußnote [1]) auf S. 314). In diesem Falle ist es aber schwieriger zu beweisen, daß es für $r > 2$ in der Familie zusammenhängende n-Seite gibt, deren Geraden nur $n + p - 1$ gegenseitige Schnittpunkte haben. Diese Tatsache wird in der oben angekündigten Abhandlung des Verfassers bewiesen werden, zusammen mit der umgekehrten Tatsache, daß ein zusammenhängendes n-Seit vom virtuellen Geschlecht p des Raumes S_r eine Familie von irreduziblen Kurven der n-ten Ordnung und des Geschlechts p definiert.

Die Untersuchung der zusammenhängenden n-Seite, die in den Kurvenfamilien des Raumes S_r enthalten sind ($r \geqq 3$), gestattet deren Klassifikation. So sind z. B. die beiden Familien irreduzibler Raumkurven 9-ter Ordnung vom Geschlecht 10, die E. Weyr (Diss. Göttingen 1873) und G. Halphen (Bull. Soc. Math. 2, 69 (1874)) zuerst untersucht haben, durch zwei 9-Seite folgender Art definiert:

1. Sechs Seiten sind Erzeugende einer und derselben Regelschar (einer Fläche 2-ter Ordnung), und die drei andern sind Erzeugende der schneidenden Regelschar.

2. Die 9 Seiten sind der Durchschnitt einer allgemeinen Fläche 3-ter Ordnung mit drei ihrer 3-fach berührenden Ebenen.

Aus der Existenz von zusammenhängenden n-Seiten mit $n + p - 1$ Doppelpunkten in einer Familie von Kurven n-ter Ordnung mit allgemeinen Moduln ergibt sich übrigens eine vollständige Rechtfertigung der Methoden des Zerfallens, die man gewöhnlich zur Bestimmung der mit den algebraischen Kurven verknüpften Zahlen verwendet. (Vgl. S. 1018 der angeführten Arbeit des Verfassers.) Berücksichtigt man die Begriffe, die in Nr. 2 des Anhangs G (S. 355) eingeführt wurden, so gestattet die Betrachtung der rationalen Kurven mit p Doppelpunkten, die in einer Familie von Kurven des Geschlechts p vorhanden sind, eine einfache und elegante Lösung vieler abzählender Probleme, die mit den Raumkurven und Überraumkurven zusammenhängen, wie z. B. des sogenannten Problems der mehrfach schneidenden Räume einer algebraischen Kurve[1]). Zugleich gibt der in Nr. 11 des Anhangs F bewiesene Satz eine strenge Grundlage für das Verfahren, das de Jonquières beim Beweis der seinen Namen tragenden Formel befolgt hat (S. 189). Der Verfasser beabsichtigt, in Bälde auf diese Art von Anwendungen zurückzukommen.

Die Mannigfaltigkeitsstufe der linearen Scharen g_n^r, die auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln vorhanden sind, sowie die Minimalscharen und die ebenen oder Raumkurven kleinster Ordnung, auf die eine Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln durch birationale Transformationen zurückgeführt werden kann, sind von Brill und Noether in ihrer klassischen Abhandlung untersucht worden (Math. Ann. 7, § 9, S. 290, § 13, S. 298 (1874)). Sie haben dabei stillschweigend das Postulat von S. 159 vorausgesetzt und von vornherein angenommen, daß eine allgemeine Schar g_n^r einfach ist. Wie wir oben bewiesen haben, sind beide Annahmen zulässig.

---

1) Es ist das auf S. 190 angeführte Problem, wenn man dort ν gleich 1 annimmt.