i:

# 4

*30 aprile 1957*

# scuola e città

LA NUOVA ITALIA - FIRENZE

« Come espressione della mente umana, la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità »,

Con queste parole il matematico R. Courant inizia la prefazione del suo bellissimo libro *Che cosa è la matematica?* [1].

E cosí continua: « Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica ».

A nostro parere, anche il modesto insegnamento della matematica in una scuola secondaria deve avere per scopo. la sintesi di questi elementi opposti; non potrà il maestro, evidentemente, nascondere la sua intelligenza piú analitica o piú sintetica, la sua mentalità piú o meno generalizzatrice, né potrà cancellare l'influenza della scuola matematica a cui appartiene, ma dovrà cercare nella classe di essere piú obiettivo possibile, dovrà far nascere, prima, e coltivare, poi, nei propri allievi sia quell'« esprit de géométrie » che quell'« esprit de finesse » che danno luce in modo diverso al pensiero e al metodo matematico. Il problema didattico in una scuola secondaria è — a me sembra — proprio questo: mostrare della matematica i diversi aspetti, lumeggiare le differenti tendenze, utilizzare i piú vari metodi di ricerca, cosa che ritengo sia sempre possibile anche se si toccano gli argomenti piú elementari.

Ma il problema psicologico, a cui è evidentemente legato quello didattico, ci pone delle interrogazioni: a quali concetti, a quali procedimenti, a quali metodi, è piú sensibile il bambino dagli 11 ai 14 anni? a quali l'adolescente? Quali sono, in breve, le strutture mentali di questi allievi nei riguardi della matematica?

Come ho detto nel primo articolo, mi propongo qui di considerare qualche aspetto del pensiero matematico dei ragazzi dagli 11 ai 14 anni.

Tutti gli insegnanti riconoscono un certo numero di errori che gli allievi di questa età fanno con maggior frequenza: vi sono dei procedimenti che presentano per il bambino delle difficoltà addirittura inspiegabili alla mentalità di noi adulti, dei concetti che vengono assimilati dagli allievi in un tempo che a noi sembra stranamente lungo quando si pensa che questi stessi concetti sono semplicissimi per un adulto anche del tutto incolto; osserviamo che talvolta il fanciullo è cieco davanti a figure che a noi sembrano vive e chiarissime, altre volte, poi, sembra che egli sia del tutto sordo a delle spiegazioni limpide ed elementari.

Ora, mentre degli errori, delle difficoltà, della lentezza d'assimilazione, si faceva un dramma nel metodo d'insegnamento verbale, questi risultati negativi vengono a costituire oggi, in un insegnamento attivo, una fonte interessantissima d'indagine ai fini dello studio sulla formazione delle strutture mentali matematiche.

Osservazioni fatte ormai su centinaia di bambini di questa età mi hanno condotto a fermare l'attenzione su alcuni punti che cercherò di mettere in luce riferendo qualche esperienza svolta in classe.

### Alcune esperienze in una I$^a$ media.

Mi limito a riferire due esperienze che ho fatto per molti anni in una I$^a$ media; esse, mettendo in evidenza le difficoltà che incontra un ragazzo nella formazione operativa e concettuale, ci inducono alla riflessione e ci incoraggiano a rivedere i nostri metodi d'insegnamento.

Il lettore avrà forse l'impressione che si tratti di problemi molto particolari e limitati, come effettivamente sono, ma noi ci auguriamo che da questi esempi possa rendersi conto del metodo d'indagine che si segue.

*I Problema: Disegnare un rettangolo avente la base tripla dell'altezza.*

Si osserva che alcuni ragazzi, valendosi del doppio decimetro, fissano una certa lunghezza per l'altezza, la triplicano, e disegnano cosí la base; altri si valgono del foglio a quadretti per disegnare, per esempio, l'altezza di un quadretto e quindi, poi, la base di tre quadretti; altri ancora disegnano un rettangolo senza prendere le misure, ma mettono in evidenza che la base è tripla dell'altezza dividendo la base in tre parti che dovrebbero essere, ciascuna, uguali all'altezza, ma che spesso non lo sono.

[1] R. Courant e H. Robbins, *Che cosa è la matematica?*, trad. it. di L. Ragusa Gilli, Torino, Einaudi, 1950.

Dopo che i ragazzi hanno effettuato il disegno, si dice: Se fosse data la lunghezza del perimetro di quel rettangolo, sarebbe possibile determinare la lunghezza della base e dell'altezza?

Si osserva allora questo comportamento nella classe: i ragazzi alzano con entusiasmo la mano, uno dopo l'altro. « Si divide per 2 il perimetro! no, per 3! per 5, per 6!..... ». Non c'è una risposta che vada bene! Se poi, per facilitare il compito, si aggiunge: « immaginate che il perimetro sia di cm. 16 », qualcuno dirà: « la base sarebbe lunga cm. 6 e l'altezza sarebbe di cm. 2 », ma spesso non saprà spiegare come è arrivato a questo risultato.

Si rimane perplessi e si nota che i ragazzi non guardano affatto il rettangolo che hanno disegnato sul quaderno.

Se questa esperienza non fosse capitata a me stessa per molti anni consecutivi, confesso che stenterei a crederci: è tanto facile guardare quel rettangolo! perché non lo osservano anche se l'insegnante li incoraggia ad esaminarlo bene? Sono loro stessi che hanno fatto la costruzione, che hanno fatto un lavoro di sintesi. Evidentemente non è una costruzione dove abbiano ragionato.

Riflettiamo: osservare quel rettangolo significa scomporre il suo contorno negli elementi che lo formano, significa pensare la base come composta di tre elementi uguali fra loro e uguali all'altezza; occorre dunque fare una analisi, procedimento complesso anche se la sintesi, la costruzione, era stata fatta dal ragazzo stesso. Finita l'analisi, poi, occorre mettere in relazione la somma di questi segmenti con il perimetro. Si tratta quindi di concepire un'equazione di I grado.

Quando diamo un problema di questo genere, che a noi sembra assai semplice, non ci rendiamo conto di quante strutture mentali esso implichi né di quali procedimenti richieda, anche se questi procedimenti (le equazioni, nel caso considerato) non vengono esplicitati data la immediatezza della risoluzione.

Ma forse l'osservazione psicologica piú importante che si può fare è che il bambino non osserva il rettangolo, non lo vede nei suoi elementi, ma solo globalmente come un tutto inscindibile, anche se è stato lui stesso a disegnarlo.

*II Problema: Data l'area di un quadrato, come si ottiene la lunghezza del lato?*

Una grandissima percentuale di allievi risponde che bisogna dividere l'area per 4.

Questo errore, cosí frequente, indica, da una parte, la poca sicurezza che hanno ancora sulla reciprocità operatoria (essi conoscono benissimo la regola diretta, cioè come si trova l'area del quadrato data la lunghezza del lato) [1], e dall'altra mette in evidenza la confusione che si crea fra il concetto di area e quello di perimetro.

Vogliamo fermarci a considerare quest'ultima difficoltà di carattere geometrico; essa è particolarmente interessante perché la confusione area-perimetro è non solo molto frequente nei fanciulli ma si ritrova spesso anche negli adulti. Notiamo intanto che il concetto di superficie è molto piú astratto di quello di lunghezza dato che noi non abbiamo nelle nostre membra un termine di paragone per avere l'idea di una grandezza superficiale come l'abbiamo per cogliere l'idea di lunghezza (il palmo, il piede, ecc.). Ma c'è un altro fattore, piú importante, che porta a confondere questi due concetti: è che, quando si disegna una figura, un quadrato per esempio, il ragazzo fissa la attenzione sul tratto disegnato, cioè sul contorno, non sull'interno, che è vuoto per lui perché egli non ha ancora un'educazione a un concetto astratto.

Questa osservazione conduce a fare dei raffronti con la storia dell'arte. È interessante osservare che i disegni del periodo paleolitico rappresentano l'interno della figura mettendo in rilievo gli organi, mentre nel periodo seguente, il neolitico, il disegno è astratto, schematico: con un tratto rappresentante il contorno si vuole indicare anche l'interno, si vuole dare l'idea dell'oggetto. Si tratta di uno stadio piú avanzato del precedente: ci si allontana dal concreto, si va verso l'astrazione.

Ritornando ai nostri ragazzi, si deve dunque tener presente che la rappresentazione di una figura col solo contorno ha voluto dire un lavoro di sècoli ed è quindi evidente che rappresenti una vera, profonda difficoltà.

Il disegno — dobbiamo concludere — non è sufficiente per chiarire il concetto di area.

### Risoluzione dei problemi precedenti mediante l'utilizzazione di un materiale.

Gli insuccessi ottenuti per vari anni riguardo ai due problemi precedenti mi hanno condotto a introdurre nella classe un materiale concreto per la risoluzione degli stessi

[1] Vedi su questo problema: J. Piaget, B. Inhelder, A. Szeminska, *La géométrie spontanée de l'enfant,* cap. XIII, Paris, Presses Universitaires de France, 1948.

problemi. Questi verranno trattati successivamente; il secondo nascerà in modo naturale dopo il primo.

A ogni bambino viene dato un certo numero di stecchini tutti uguali. Si dice: « servitevi di questi stecchini per costruire un rettangolo avente la base tripla dell'altezza ». Non c'è alunno che non sappia eseguire questa costruzione.

Alla domanda: « se voi conosceste il perimetro del rettangolo, potreste calcolare la lunghezza della base e dell'altezza? » tutti gli allievi rispondono che basta contare il numero degli stecchini e dividere il perimetro per questo numero.

Che cosa c'è stato in piú questa volta rispetto alle precedenti? Abbiamo dato in mano degli stecchini, abbiamo perciò permesso al ragazzo di rendersi conto della relazione della parte al tutto (di uno stecchino rispetto a tre stecchini); la base è nata come somma di tre stecchini, non come un tutto che si doveva scomporre in tre parti uguali o come un segmento che si doveva disegnare di 12 cm., per esempio, perché si era stabilito che l'altezza fosse di 4 cm.

Si è operato manualmente, con dei gesti, si è fatta una sintesi di elementi. Non c'è piú il pericolo che « si tiri a indovinare », perché il manipolare un materiale, anche se questo non ha nessun valore, impone una certa serietà. Lo stecchino assume un valore ideale! Lo stecchino permette di risolvere dei problemi costruendo e contando; queste operazioni impongono di non verbalizzare. « Costruite, contate, poi parlerete! »

Si passa dall'elemento alla sintesi degli elementi: il metodo è sintetico, all'inizio. Poi si assegna un dato: la lunghezza del perimetro; e si chiede la lunghezza ipotetica dell'elemento. S'impone dunque l'osservazione della figura costruita. Si ritorna indietro; si scompone; il metodo è analitico. Attraverso la sintesi e l'analisi siamo arrivati alla scoperta, al momento euristico.

Bisogna notare che c'è sempre qualche alunno, che, volendo costruire un rettangolo piú grande, ha impiegato due stecchini per rappresentare l'altezza e quindi sei per la base. È venuto cosí ad avere un rettangolo che ha la stessa forma di quello costruito dai compagni, ma che è piú grande: è un rettangolo simile al dato. Il semplice confronto di questi rettangoli apre dunque le porte alla teoria della similitudine.

Si cambino poi i dati: la base del rettangolo sia il doppio, il quadruplo dell'altezza, sia 1/3 dell'altezza, sia i 2/3 dell'altezza, ecc. Ci si fermi a considerare problemi analoghi che vertano sulle piú varie figure geometriche, o su questioni di aritmetica applicativa o astratta; tutti questi problemi vengono ad avere cosí una base visiva.

Si arriva a una sistemazione, a un inquadramento di problemi di questo tipo; si arriva a stabilire una regola che è l'equazione di I grado. Al momento euristico è seguita una stasi: siamo arrivati a un metodo deduttivo.

Torniamo ora al nostro primo problema di geometria: la costruzione di un rettangolo di base tripla dell'altezza. Avevamo adoperato 8 stecchini. Questi stecchini si potrebbero disporre in altro modo; si potrebbe per esempio con questi costruire un quadrato avente ogni lato di due stecchini. Quel quadrato ha lo stesso perimetro del rettangolo; avrà anche la stessa area?

Se si pone la domanda: « un rettangolo e un quadrato che hanno lo stesso perimetro avranno anche la stessa area? » potete essere sicuri che la totalità degli allievi vi risponde affermativamente giustificando la risposta col dire che se il contorno è lo stesso l'area racchiusa deve essere la stessa. È solamente col calcolo effettivo delle due aree che si accorgono che i risultati sono diversi e questi valori delle aree assumono un significato concreto se gli alunni hanno sotto gli occhi le figure da loro stessi costruite: il rettangolo si compone infatti di tre quadratini aventi per lato uno stecchino, mentre il quadrato si compone di quattro quadratini.

Viceversa, sorge spontanea la domanda: si può costruire un rettangolo che ha per area quattro quadratini? Sí, ma ci si accorge allora che la base sarà formata di quattro stecchini e l'altezza di uno; il perimetro sarà allora di 10 stecchini e non di 8.

Siamo di nuovo al momento euristico: mettendo insieme lo stesso numero di elementi in maniera diversa si costruiscono delle figure che hanno lo stesso perimetro ma che hanno una qualità diversa: l'area. Se invece si vuole mantenere fisso questo carattere si viene a costruire una serie di figure che differiscono per il perimetro. Alla scoperta delle figure isoperimetriche, da una parte, e a quelle equivalenti, dall'altra, si arriva dunque con una sintesi e poi con un'analisi delle figure costruite.

L'esame di queste figure può estendersi ed approfondirsi con un utile dispositivo — il géo-plan [1] — che ogni bambino può costruirsi da sé. Ecco di che cosa si tratta: su una tavoletta di legno sono infissi, a mo' di

[1] Questo dispositivo è stato ideato dal matematico inglese C. Gattegno.

scacchiera, dei chiodi (per esempio 5 per lato e quindi 25 in tutto); abbracciando un certo numero di chiodi con un elastichino si possono formare tanti poligoni. Queste figure offrono il vantaggio sul disegno di essere in certo qual modo mobili e, potendosi fare e disfare con tutta facilità, sono oltremodo suggestive.

Spostando gli elastichini fra chiodo e chiodo ogni allievo riesce ad arrivare ad una regola, riesce a sistemare la teoria dei rettangoli equivalenti: per costruire un rettangolo equivalente ad uno dato, senza che sia uguale, si deve raddoppiare la base e dimezzare l'altezza, o triplicare la base e rendere l'altezza 1/3, o......

Si è arrivati a una sistemazione, a una teoria: dal fatto che le basi e le altezze di due rettangoli si trovano in quelle date condizioni, si può dedurre che.....

Sarà poi naturale di passare al confronto di triangoli, di parallelogrammi, di poligoni convessi e concavi, e al calcolo effettivo in $cm^2$ dell'area di queste figure come somma o differenza di poligoni piú semplici, calcolo che non sarà piú qualcosa di astratto dato che si ha sempre sotto gli occhi il quadrato di area 25 $cm^2$, essendo di 5 cm. la distanza fra due chiodi consecutivi di un lato della scacchiera.

Questo semplicissimo dispositivo è di grande aiuto per la formazione del concetto di area. Questo concetto che, in una sistemazione critica della geometria, si definisce per astrazione (due figure sono equivalenti, cioè hanno la stessa area, quando nessuna delle due supera l'altra), si forma cosí, in un primo stadio, dando concretezza all'astrazione, cioè confrontando dei poligoni che abbiano la stessa area e diverso perimetro, o, anche, che abbiano lo stesso perimetro ma differente area.

Ma il géo-plan non è ancora sufficiente: con questo dispositivo si costruiscono — è vero — tanti poligoni, ma queste figure sono staccate una dall'altra; non si passa con c o n t i n u i t à da una all'altra.

Ora, è proprio il passaggio continuo da una figura all'altra, è la trasformazione di una figura in un'altra per continuità, uno dei fattori che conducono all'intuizione matematica e quindi alla scoperta.

A questo punto verrà introdotto un altro materiale allo scopo di portare di nuovo al momento euristico.

Prendiamo un metro a stecche e disponiamo quattro di queste in modo da formare un quadrato; incliniamo poi le stecche in modo da avere un rombo e facciamo fissare l'attenzione sugli infiniti rombi che si ottengono inclinando piú o meno una stecca sull'altra. I ragazzi non vi diranno che vi è un quadrato e che vi sono tanti rombi, ma vi diranno che il quadrato di prima si è trasformato in un rombo. Alla domanda « cambia l'area quando il quadrato si trasforma in rombo? » vi risponderanno sul principio che l'area è sempre la stessa perché il perimetro è sempre lo stesso, ma se, senza parlare, inclinerete sempre di piú un'asta sull'altra, essi torneranno sulla loro prima affermazione e vi diranno: « no, l'area deve cambiare perché, alla fine, il rombo si schiaccia del tutto e l'area sparisce, diventa zero ».

Ecco come nasce nei nostri piccoli allievi l'intuizione matematica: è la considerazione del caso limite, cui si è condotti lavorando su un materiale mobile con continuità, che fa sí che ci si fermi su un caso particolare, lo si studi e, ritornando al generale, ci porta a cogliere una legge.

Un'altra esperienza, analoga alla precedente, ma piú complessa, è la seguente: uno spago legato viene teso fra il pollice e l'indice delle due mani in modo da formare un rettangolo: se le dita di ciascuna mano si avvicinano e le mani si allontanano, si otterranno, evidentemente, rettangoli di minore altezza e base maggiore. Se si domanda agli allievi che cosa succede della superficie di questi rettangoli, si avrà, sulle prime, la risposta: « la superficie è sempre la stessa perché quello che si perde in altezza si guadagna in base ». È solo continuando l'operazione, cioè ravvicinando ancora di piú le dita di ciascuna mano in modo da formare dei rettangoli di altezza sempre minore e tendente a zero, che i bambini avranno l'intuizione del caso limite e quindi di un cambiamento di area per continuità; comprenderanno, parallelamente, che addizionando e sottraendo una stessa quantità alle due dimensioni del rettangolo cambia il prodotto mentre questo non è alterato dalla moltiplicazione e dalla divisione per una stessa quantità.

Ma l'intuizione è uno « strumento » pericoloso; non ci si può affidare completamente ad essa. Sarà anzi molto istruttivo presentare agli allievi degli esempi, e non ne mancano anche nel campo elementare, di problemi che, al primo intuito, sembrerebbero dettare certe proprietà che, ad un esame piú rigoroso, si manifestano errate. Questi esempi fanno comprendere come si debba controllare l'atto intuitivo con una dimostrazione logica.

### Esame del metodo seguito.

Le esperienze didattiche che abbiamo riferito ci conducono ad alcune conclusioni:

1) *lo spirito analitico* non può nascere se il ragazzo fissa l'attenzione su una figura già costruita e rigida;

2) *lo spirito sintetico* non può nascere se non viene effettivamente manipolato un materiale da parte del bambino stesso, cioè il disegno è insufficiente;

3) delle due rappresentazioni visive di una figura geometrica — il disegno e il modello mobile — la prima dà un'idea meno precisa della seconda;

4) l'intuizione matematica sorge esaminando le relazioni fra il particolare e il generale, e le differenze insensibili che si verificano in un processo continuo di trasformazione fra stato e stato; da qui la necessità di una figura mobile.

Risulta dunque essenziale l'uso di un materiale; vediamo ora piú da vicino quali siano state nei problemi precedenti le funzioni di queste basi concrete.

Abbiamo utilizzato: degli stecchini, il géo-plan, un metro snodabile, uno spago.

I primi due materiali sono a disposizione del ragazzo; egli costruisce prima, osserva poi; sintetizza prima, analizza poi. Arriva cosí alla scoperta.

Questo materiale, mobile, ma con discontinuità, conduce al confronto di figure che hanno determinati elementi in comune e quindi porta poi alla sistemazione della teoria; il ragazzo comprende in tal modo il valore del metodo deduttivo.

Ma la discontinuità del materiale pone delle limitazioni al pensiero: non permette, per esempio, di fare una classificazione. Si può infatti, per valersi del materiale di cui abbiamo parlato, costruire sul géo-plan un quadrato e dei rombi, ma non è facile comprendere che il quadrato fa parte della classe dei rombi. Le classificazioni, in matematica come in ogni altra scienza, nascono dal confronto di enti insensibilmente diversi uno dall'altro, di enti che possono considerarsi l'uno come il trasformato dell'altro per continuità. È proprio questo elemento, essenziale al pensiero matematico, — la continuità —, che ancora manca.

A questo elemento conducono i due ultimi materiali che abbiamo introdotto: il metro e lo spago.

Un materiale mobile con continuità, anche se non viene manipolato dall'allievo stesso, attira immediatamente l'attenzione, e all'occhio e alla mente del ragazzo non sfuggiranno mai i casi limiti, proprio perché sono *casi particolari* nella generalità. Ora, è proprio il caso limite che « smaterializza » il materiale, lo fa idealizzare. Il materiale stesso non è piú necessario; si è creata l'intuizione matematica.

Ai metodi sintetico e analitico, alla sistemazione deduttiva, allo studio del particolare fra la generalità, si è aggiunto quel « qualche cosa » che si chiama « intuizione matematica ». Ma l'intuizione, come abbiamo detto, non basta per dare la certezza della verità perché può condurre ad errore; l'atto intuitivo deve essere seguito da una dimostrazione logica.

Gli elementi fondamentali della matematica, che — per ripetere le parole di Courant — sono « la logica e la intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità », sono intervenuti successivamente nella risoluzione dei nostri problemi. Anche delle questioni elementari, dunque, come quelle che abbiamo incontrato, possono mettere in luce questi elementi antitetici dalla cui fusione si forma il metodo.

Ritornando a un'analisi didattica del metodo seguito, possiamo dire di aver utilizzato, in senso largo, il metodo Montessori, perché abbiamo costruito e, partendo dall'elemento, siamo arrivati al complesso, alla sintesi; ma ci siamo anche valsi delle geniali idee di O. Decroly perché, trovandoci davanti al globale, l'abbiamo scisso nei suoi elementi, l'abbiamo analizzato.

Al materiale artificiale e discontinuo introdotto dalla Montessori e a quello naturale e continuo di cui si vale il Decroly abbiamo sostituito un materiale artificiale e mobile con continuità allo scopo di suscitare, anche, l'intuizione matematica. Ed è proprio questa mobilità — lo ripetiamo — che attira l'attenzione del ragazzo facendo sí che la base concreta si idealizzi, perché non è il materiale che è l'oggetto della sua attenzione ma la trasformazione del materiale, l'operazione, che è indipendente dal materiale stesso, e quindi è astratta.

Concludendo, diremo che il materiale serve come « spunto » alla formazione operatoria; ma è uno spunto essenziale, non sostituibile, come abbiamo visto, né con la parola del maestro che toglie la libertà al pensiero dell'allievo, né con il disegno che è fisso, né con un modello che sia già costruito e rigido.

### L'indirizzo storico nell'insegnamento della matematica.

La grande importanza didattica che noi attribuiamo al materiale mobile, al movimento in genere, sembra opporsi nettamente allo sviluppo storico della matematica.

Se si considera infatti la matematica greca e anche quella orientale come la prima manifestazione del pensiero matematico, possiamo dire che lo spirito del corso da noi seguito è in forte contrasto con quella matematica cosí rigida nelle sue figure.

Ma la matematica nasce molto prima del suo atto ufficiale di nascita: è matematica infatti il grafito delle caverne dell'epoca paleolitica, dove le figure ritratte non avevano valore in sé ma soprattutto nei rapporti con altre figure, dove, insomma, l'accento era messo sul movimento. Non si tratta di rapporti numerici, naturalmente, ma di rapporti qualitativi, di confronti, di trasformazioni; e questo dinamismo era ottenuto non fissando l'attenzione sulla cosa, ma sul passaggio da cosa a cosa.

A me sembra che si possa vedere un'analogia fra questo interesse dinamico dell'epoca preistorica e il primo interesse matematico del ragazzo, interesse che è volto non sull'oggetto ma sul movimento dell'oggetto, qualunque esso sia, sulla trasformazione della cosa, prima, e sulla cosa stessa, poi.

Per continuare le nostre considerazioni storiche, noi vediamo come, a poco a poco, già in parte nell'epoca neolitica, si perda quel dinamismo spontaneo per fermarsi maggiormente sulla forma, sui rapporti degli elementi che costituiscono l'oggetto, fino ad arrivare alla perfezione dell'arte greca in cui la figura viene fermata del tutto allo scopo di studiarne i rapporti quantitativi. E noi diciamo, parallelamente, che è in questo periodo che nasce la vera matematica.

Siamo perciò condotti nei nostri corsi a introdurre direttamente gli allievi in questo mondo matematico, considerandolo come il primo. Noi attribuiamo perciò dei numeri e dei rapporti fissi (anche senza darli esplicitamente) agli enti che introduciamo, imponendo agli alunni di fermare la loro osservazione su queste figure; ma queste non possono attirare la loro attenzione proprio perché sono rigide.

Dice la storia che la matematica greca nasce con Talete di Mileto; a lui viene attribuita l'idea geniale che permetteva di determinare l'altezza delle piramidi d'Egitto confrontando l'ombra proiettata dalla piramide e l'ombra di un bastone alle rispettive altezze, della piramide e del bastone. Talete ha visto in questo confronto un'uguaglianza di rapporti numerici, una proporzione. Talete ha avuto dunque, a partire da un'esperienza concreta — l'osservazione del variare dell'ombra —, un'intuizione matematica. Ha fissato l'attenzione su una data lunghezza d'ombra, cioè ha « fermato » l'ombra. Ha scritto un'uguaglianza di rapporti ed ha cosí aperto le porte alla matematica rigida, la matematica greca.

Ora, se noi facciamo precedere il corso rigido greco dalla osservazione di figure mobili, si noterà come il passaggio alla considerazione di figure statiche, precisandone i rapporti quantitativi, dia luogo anche nel nostro insegnamento a non lievi difficoltà; esso implica infatti una nuova struttura mentale. Si può dire che il « momento » di Talete si « sente » nella classe ed è anzi il caso di sottolinearlo ai nostri allievi dato che esso segna il passaggio fra lo studio della trasformazione della cosa e lo studio della cosa stessa.

### La funzione morale e sociale dell'insegnamento della matematica.

Credo che ormai il lettore potrebbe trarre le conclusioni da sé.

Se la matematica viene insegnata verbalmente, cioè se noi spieghiamo delle proprietà relative alle figure e ai numeri, anche mettendo il giusto accento sulle scoperte piú notevoli, noi diamo l'impressione che queste proprietà siano opera di singoli uomini particolarmente dotati; ora, questo è in parte vero, ma solo in parte, perché molto è dovuto all'opera collettiva dell'umanità. Non dico che un Pitagora, un Euclide o un Archimede non sarebbero esistiti come singoli, ma le loro opere, le loro azioni e la loro influenza sarebbero state diverse se la società fosse stata diversa.

Ora, noi dobbiamo dare l'impressione, ma non si tratta solamente di un'impressione, che l'opera di chiunque, il lavoro del bambinetto, la sua intuizione che è molto piú fervida e piú fresca della nostra, può veramente portare qualcosa di nuovo anche in un campo che sembra cosí arduo e già fatto come è quello matematico. È indubbio il valore sociale che può avere in tal modo l'insegnamento di questa disciplina: nella classe di matematica si cancellano addirittura le tradizioni di cultura provenienti dalla famiglia di ognuno, si annulla l'ambiente sociale di ciascuno che tanta influenza ha sopra altri insegnamenti, come ad esempio quello della lingua italiana. In questa classe, davanti a un materiale (come per esempio gli stecchini) che non ha nessun valore in sé, ma che assume enorme valore ai fini della scoperta scientifica, ogni bimbo diventa serio e riflette prima di parlare: agisce e poi parla; non verbalizza. Non si tratta qui di recitare la lezione con piú o meno fervore allo scopo di far bella figura; qui, ognuno deve mostrarsi per quello che è, e ogni ragazzo comprende come sia bello mostrarsi per quello che si vale.

Noi siamo convinti che delle basi concrete, intelligentemente scelte, non solo rendano l'insegnamento molto piú interessante perché conducono a problemi elevati di matematica essendo libera l'iniziativa e l'immaginazione dell'allievo, ma nobilitino, anche, questo insegnamento, esercitando un'influenza morale sul singolo e una funzione sociale sulla classe intera.

EMMA CASTELNUOVO

# LA LIBERTÀ DELLA SCUOLA IN SVEZIA

(Continuazione e fine; cfr. fascicolo 3 del 1957)

## II

## LA CONQUISTA DELLA LIBERTÀ SCIENTIFICA

Fin dal sec. XVII le università svedesi furono sottoposte a norme amministrative, ora chiamate *Statuti universitari* [1], poste dal re. Nel 1655 furono emanate norme per l'università di Uppsala che, fondata nel 1477, aveva nel sec. XVI interrotto la sua attività per circa 60 anni, ma nel 1593 era stata richiamata in vita per decisione dello stesso concilio che aveva fissato la Fede Svedese. Tali norme, emanate per l'università di Uppsala, furono poi estese alla università di Lund, fondata nel 1666 [2]. Fin dall'inizio Uppsala e Lund provvidero all'istruzione teologica, poiché uno dei principali compiti delle due università era quello di preparare i giovani a divenire preti della Chiesa Svedese. Questo fatto, e la forte posizione della Fede Evangelica, resero inevitabile che gli Statuti universitari contenessero molte norme che legavano le università alla dottrina della Chiesa Svedese. Oltre agli Statuti furono varati regolamenti per reprimere le discussioni politiche nelle università [1].

Nel sec. XVII, tuttavia, cominciò la lotta per la libertà di ricerca e di parola. Questa lotta durò quasi due secoli. Due esempi meritano di essere ricordati, l'uno della fine del sec. XVII, l'altro della metà del sec. XVIII.

Intorno al 1680 la filosofia di Cartesio, che poneva l'accento piú sulla ragione che sulla religione, aveva raccolto molti consensi fra gli studiosi svedesi. Ma in Svezia, come in altre parti d'Europa, essa fu avversata dai teologi. Nel 1686 in seno al Parlamento lo Statuto del Clero [2], tentò di far vietare gli studi cartesiani in Svezia. Ne nacque un conflitto che durò tre anni. Le quattro facoltà dell'università di Uppsala espressero il loro parere. Le tre facoltà non teologiche resistettero al tentativo di proibire la filosofia di Cartesio, sostenendo cosí il principio della libertà di ricerca. Finalmente nel 1689 il re, dotato allora di potere assoluto, emanò un'ordinanza che proibiva le critiche della fede cristiana, ma permetteva il « retto » uso e la giusta pratica della filosofia. La decisione reale sanciva il principio della libertà di ricerca, in quanto non proibiva lo studio della filosofia cartesiana. Essa inoltre sventava il tentativo di dare alla facoltà di teologia una posizione di supremazia e di sorveglianza sulle altre facoltà.

Nel decennio 1740-1750 furono pubblicate presso l'università di Uppsala alcune dissertazioni che furono giudicate incompatibili con la Fede Evangelica o di orientamento critico nei riguardi del governo. Il risultato fu che nel 1749

---

[1] Prima del 1852 si chiamavano *Costituzioni Universitarie*.

[2] Le università di Uppsala e Lund hanno quattro facoltà: teologia, legge, medicina e filosofia. Le facoltà di filosofia si dividono in due sezioni: umanistica e scientifica. Inoltre la Svezia ha tre istituti sul modello delle antiche università europee: la Scuola Superiore di Stoccolma (Stockholm högskola), l'università di Göteborg, e l'Istituto medico-chirurgico Carolino (Karolinska mediko-kirurgiska institutet). La Scuola Superiore di Stoccolma, fondata nel 1877, ha tre facoltà: legge, umanità, e scienze. L'università di Göteborg (fondata nel 1954 mediante la fusione di due istituti precedenti, la Scuola Superiore di Göteborg e la Scuola Superiore di medicina di Göteborg) ha due facoltà: umanità e medicina. L'Istituto medico-chirurgico Carolino è una scuola medica. Per non rendere troppo pesante quest'articolo, parleremo solo delle università di Uppsala e Lund. Nonostante vi siano alcune differenze fra le università e le altre istituzioni, l'indipendenza degli insegnanti è uguale in tutti gli istituti. Notare che « Scuola Superiore » indica in Svezia un istituto di livello universitario.

[1] Vedi la lettera del Cancelliere dell'università di Uppsala in data 17 maggio 1661.

[2] Fino al 1866 il Parlamento era costituito da quattro stati: nobili, clero, borghesi e contadini.