RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XXIX, serie 6ª, 2° sem., fasc. 10. - Roma, novembre 1936-XV

Matematica. — *Di una classe di superficie razionali che ammettono ∞^2 trasformazioni proiettive in sè.* Nota di EMMA CASTELNUOVO, presentata [1] dal Socio F. ENRIQUES.

Nella classificazione dei gruppi proiettivi ∞^2 dello spazio ordinario s'incontra un tipo essenzialmente algebrico costituito dalle omografie che lasciano ferma una cubica gobba e un punto unito su di essa, sottogruppo di quello ∞^3 che comprende tutte le trasformazioni in sè della cubica stessa. Le omografie del detto gruppo ∞^2 conducono da un punto dello spazio ai punti di una superficie razionale, il cui studio è stato iniziato da Enriques [2] in una Memoria del 1893 e in una Nota successiva. Qui riprendiamo ed approfondiamo questo studio sciogliendo, in particolare, alcune difficoltà a cui la rappresentazione piana dà luogo, e determinando, così, le immagini delle singolarità della superficie.

§ 1. – Un'omografia che muti in sè la cubica C_3

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \rho \quad , \quad x_3 = \rho^2 \quad , \quad x_4 = \rho^3 ,$$

ed abbia come unito il punto $\rho = \infty$, produce sul parametro ρ una sostituzione lineare intera $u\rho + v$; le sue equazioni si possono quindi mettere sotto la forma

$$(1) \quad y_1 = x_1 \quad , \quad y_2 = ux_2 + vx_1 \quad , \quad y_3 = u^2 x_3 + 2uvx_2 + v^2 x_1 \quad ,$$
$$y_4 = u^3 x_4 + 3u^2 vx_3 + 3uv^2 x_2 + v^3 x_1 ,$$

dove si è indicato con $y \equiv (y_1 , y_2 , y_3 , y_4)$ il punto che così viene a corrispondere ad $x \equiv (x_1 , x_2 , x_3 , x_4)$. Le (1), ove s'interpretino x_1 , x_2 , x_3 , x_4

(1) Nella seduta del 1° novembre 1936.

(2) F. ENRIQUES, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse.* « Atti R. Istituto Veneto », to. IV, ser. VII, 1892-93; e to. V, ser. VII, 1893-94.

come coordinate di un punto fisso dello spazio, ed u e v come parametri, rappresentano la superficie, luogo dei trasformati del punto x, che viene mutata in sè dalle ∞^2 omografie; al variare del punto x la superficie varia descrivendo il fascio

$$(y_1 y_3 - y_2^2)^3 k = (y_1^2 y_4 + 2 y_2^3 - 3 y_1 y_2 y_3)^2. \tag{2}$$

La superficie generica del fascio è semplice e del 6° ordine come si vede facilmente dalla (2); a questo risultato si può del resto giungere anche per via sintetica ragionando così: da un punto generico P di una retta r si possono condurre tre piani osculatori alla cubica in P_1, P_2, P_3; al variare del punto P su r si ha una serie di terne G_3, che è una g_3^1. Al nostro scopo occorre calcolare il numero dei gruppi di tre punti equivalenti ad un G_3 generico per una trasformazione con O fisso e che appartengono alla g_3^1 suddetta; se, per semplicità, si suppone che la retta r sia l'intersezione dei piani osculatori in due punti M ed N, il numero dei punti X che con OMN dànno un gruppo proiettivo ad $OP_1 P_2 P_3$, o ad uno degli altri cinque che da esso si ottengono permutando P_1, P_2, P_3, è ovviamente 6; la superficie è quindi del 6° ordine e, in generale, semplice, non essendo la quaterna $OP_1 P_2 P_3$ mutata in sè dal nostro gruppo ∞^2. La superficie è anche di 6ª classe essendo il gruppo duale di se stesso; la indicheremo con F_6. Ai casi *armonico* ed *equianarmonico* della quaterna $OP_1 P_2 P_3$ corrispondono nel fascio superficie contate rispettivamente due e tre volte; al caso della *quaterna con punto doppio* corrisponde una superficie spezzata, potendo il birapporto degenerare sia per la coincidenza di un piano osculatore col piano osculatore unito, sia per la coincidenza di due piani osculatori generici. Si trova facilmente che l'invariante razionale della quaterna $OP_1 P_2 P_3$ ha la seguente espressione

$$J = -4 \cdot \frac{(x_1 x_3 - x_2^2)^3}{(x_1^2 x_4 + 2 x_2^3 - 3 x_1 x_2 x_3)^2} \tag{3}$$

ed appare così la relazione $J = -\frac{4}{k}$ tra questa funzione J e il parametro del fascio.

Le superficie corrispondenti ai tre casi particolari sono:

1) *la rigata di Cayley*, rispondente al valore $k = 0$, contata due volte, che ha per direttrice doppia la retta unita ($y_1 = y_2 = 0$), e di cui una generatrice è la tangente consecutiva della cubica;

2) *il cono quadrico*, rispondente a $k = \infty$, contato tre volte, che proietta la cubica dal punto unito O;

3) *la sviluppabile circoscritta* alla cubica, insieme col *piano osculatore unito* contato due volte, corrispondenti a $k = -4$. Esse ammettono, come è noto, più che ∞^2 trasformazioni proiettive in sè. Non dobbiamo mera-

vigliarci che le superficie del fascio abbiano un invariante; infatti esse non possono essere proiettivamente identiche, poichè il nostro gruppo ∞^2 non è contenuto come *sottogruppo invariante* in un altro più ampio.

§ 2. – La superficie generica del fascio contiene una rete omaloidica di cubiche gobbe, come ha fatto vedere Enriques nella Memoria citata; essa è dunque *rappresentabile* sul piano (facendo corrispondere alle cubiche gobbe le rette di questo) con un *sistema lineare* ∞^3 *di cubiche*; queste, essendo 6 l'ordine della superficie, sono le cubiche di *genere* 1 *per tre punti base* A, B, C. Si osservi che tale sistema è ampliabile in quello ∞^6 delle cubiche per A, B, C; la superficie è dunque la proiezione di una superficie Φ_6 dello spazio S_6.

Dal sistema rappresentativo segue poi che le sezioni piane della F_6 sono *ellittiche*. Quest'ultima proprietà si stabilisce anche determinando direttamente le singolarità della superficie generica. Si trova facilmente, esaminando le singolarità delle superficie particolari del fascio, che la F_6 contiene come *cuspidale la cubica unita*, come *triple la retta unita e la tangente successiva della cubica*, e infine ha come quadruplo uniplanare (con cono osculatore degenere nel piano $y_1 = 0$) il punto unito O.

Tra le linee semplici appartenenti alla superficie presenta particolare interesse, oltre alla rete omaloidica di cubiche gobbe (sopra considerata) un sistema d'indice 3 di coniche, che si ottengono come sezioni della F_6 con i piani osculatori alla cubica cuspidale [1].

§ 3. – Abbiamo detto che le (1) sono le equazioni parametriche della superficie generica del fascio, ove s'interpretino le x_1, x_2, x_3, x_4 come coordinate di un punto dello spazio. Il sistema ∞^3 di cubiche

$$(4) \qquad \lambda_1 y_1(u,v) + \lambda_2 y_2(u,v) + \lambda_3 y_3(u,v) + \lambda_4 y_4(u,v) = 0$$

è quindi rappresentativo delle superficie generica sul piano $[u, v]$. Se si osserva che y_3, y_2, y_1 definite come funzioni di u e v dalle formule (1) sono le successive polari del punto P(0, 1, 0) rispetto alla funzione $y_4(u, v)$, il sistema (4) può scriversi elegantemente così:

$$(4') \qquad \lambda'_1 \frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial v^3} + \lambda'_2 \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2} + \lambda'_3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} + \lambda'_4 f(u,v) = 0$$

$$\left[\lambda'_1 = \frac{1}{6}\lambda_1 \quad , \quad \lambda'_2 = \frac{1}{6}\lambda_2 \quad , \quad \lambda'_3 = \frac{1}{3}\lambda_3 \quad , \quad \lambda'_4 = \lambda_4\right]$$

dove si è indicata con $f(u, v)$ la forma cubica

$$(5) \qquad u^3 x_4 + 3 u^2 v x_3 + 3 u v^2 x_2 + v^3 x_1$$

(1) Infatti su un piano osculatore si ha un gruppo ∞^1 di omografie che lascia fissa una conica, e di cui le traiettorie sono coniche.

rappresentante la terna dei punti base sulla retta impropria, e dove $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}, \ldots$, sono le polari successive del punto P (0, 1, 0) rispetto alla terna (5). I tre punti base del sistema, A, B, C, appartenenti alla retta impropria, presentano dunque la particolarità di essere *allineati*, come si può stabilire anche per via geometrica; infatti alle ∞^2 omografie di F_6 corrispondono nel piano ∞^2 trasformazioni proiettive ciascuna delle quali lascia ferme le rette di un fascio. Ora, si vede facilmente che queste ∞^2 trasformazioni sono *omologie con asse fisso e centro variabile*; i tre punti base del sistema, essendo uniti, devono cadere sull'asse; così si verifica la proprietà di allineamento. Nella nostra rappresentazione l'asse è la retta impropria $w = 0$, e il centro di omologia descrive la retta $u = 0$.

Al variare del punto (x_1, x_2, x_3, x_4) si hanno ∞^1 sistemi dal tipo (4') rappresentanti sul piano le diverse superficie del fascio; queste hanno come invariante il birapporto (A, B, C, P) dei tre punti base del sistema e del punto intersezione dell'asse di omologia e della retta luogo dei centri; si trova infatti che l'invariante razionale di tale quaterna ha l'espressione (3).

§ 4. – Vogliamo trovare sul piano rappresentativo $[u, v]$ l'immagine dei punti e delle curve multiple della superficie F_6. L'*asse di omologia* $w = 0$, non avendo intersezioni variabili colle ∞^3 cubiche per A, B, C, *rappresenta un punto della* F_6; tale punto, certamente unito, sarà necessariamente il punto quadruplo O. Come immagini delle sezioni per il punto O otteniamo un sistema ∞^2 di coniche, di cui i due punti base MM' debbono cadere sulla $w = 0$, rimanendo fissi per il gruppo di omologie speciali (avente il centro in P (0, 1, 0)) che è invariante rispetto al gruppo dato. Se ci riferiamo al sistema (4') si trova che i punti MM' sono i primi polari di P rispetto alla terna A, B, C.

Passiamo alla rappresentazione delle linee multiple; facciamo vedere che la cubica gobba doppia è rappresentata dalla retta $u = 0$, luogo dei centri delle omologie del gruppo, contata due volte, d'accordo col fatto che la curva immagine di essa deve ammettere ∞^2 trasformazioni omologiche in sè. Perciò occorre dimostrare che il passaggio di una cubica del sistema ∞^3 per un punto Q' della $u = 0$ porta di conseguenza il passaggio per un punto Q'' infinitamente vicino a Q', cioè una cubica per Q' ha ivi tangente fissa q. Consideriamo alla scopo una cubica per Q' con tangente ivi q; questa per le ∞^1 omologie di centro Q' viene trasformata in un sistema ∞^1 di cubiche aventi in Q' la tangente q; essendo il sistema ∞^1 d'indice due [1], al variare di Q' sulla $u = 0$ si ottengono tutte le cubiche del nostro sistema ∞^3. La cubica gobba cuspidale è dunque rappresentata dalla $u = 0$

(1) La cubica di partenza segando la $u = 0$ oltre che in Q' in due punti R e R' viene trasformata per le omologie di centro Q' e di elementi corrispondenti RS ed R'S, dove S è un punto qualsiasi di $u = 0$ in due cubiche per S.

contata due volte, col significato geometrico che abbiamo visto, conformemente al fatto che ad un punto Q di essa deve corrispondere sul piano una coppia neutra di punti coincidenti.

Appena sia assegnata la rappresentazione della cubica cuspidale e sia dato il sistema ∞^6 delle cubiche per A, B, C, si può determinare geometricamente il sistema (4′) rappresentativo delle sezioni piane di F_6. Basta osservare che l'immagine della sezione piana generica si ottiene combinando linearmente le immagini di quattro sezioni particolari, indipendenti, della nostra F_6; come sezioni piane assumiamo quelle operate con piani osculatori alla cubica unita; queste sappiamo che sono coniche formanti un sistema ∞^1 d'indice tre. Questo sistema di coniche è composto di tre fasci; infatti le immagini delle sezioni di piani osculatori saranno sul piano $[u, v]$ cubiche del sistema ∞^3 seganti la retta $u = 0$ (immagine della cubica cuspidale) in tre punti infinitamente vicini, ed essendo le sezioni obbiettive degeneri in tre coniche, tali cubiche si spezzeranno nelle tre rette che da un punto di $u = 0$ proiettano la terna A, B, C. Se combiniamo linearmente quattro di queste terne di rette otteniamo l'immagine della sezione generica della F_6, e il sistema rappresentativo (4′).

Veniamo finalmente all'immagine della retta tripla di F_6, e della retta, pure tripla, infinitamente vicina ad essa. Facciamo vedere che la retta tripla per O è rappresentata dagli intorni del 1° ordine dei punti base A, B, C, d'accordo col fatto che per essa passano tre falde della superficie; e, difatti, questi intorni rappresentano tre rette della F_6 incidenti in O; esse coincidono in una retta tripla, giacchè staccando uno degli intorni viene a staccarsi due volte la retta $w = 0$, e con essa gli intorni degli altri due punti. Come immagini delle sezioni per la retta tripla otteniamo un fascio di rette di cui il centro deve cadere sulla $w = 0$, rimanendo fisso per il gruppo di omologie speciali, che è invariante rispetto al gruppo dato. Se ci riferiamo al sistema rappresentativo (4′), si trova che il centro N di questo fascio è il secondo polare di P $(0, 1, 0)$ rispetto alla terna A, B, C.

La retta tripla infinitamente vicina è poi rappresentata dagli intorni del 2° ordine dei punti A, B, C; infatti le cubiche del sistema ∞^3 che si osculano in A, si osculano anche B e in C, dato che due cubiche aventi in A un contatto tripunto e che si toccano semplicemente in B e in C determinano un fascio di cui fa parte la $w = 0$ contata tre volte.

Concludendo possiamo riassumere quali sono nel piano rappresentativo le immagini delle singolarità della nostra F_6:

il punto quadruplo è rappresentato dell'asse di omologia contato una volta; *la cubica gobba doppia* (cuspidale) dalla *retta luogo dei centri delle omologie*, contata due volte; e infine *le due rette triple infinitamente vicine* sono rappresentate, complessivamente, dall'*asse delle omologie* contato tre volte.