Estratto dal Periodico di Matematiche

Gruppo IV Serie V Volume 51 Numero 4-5 Ottobre 1975

Emma Castelnuovo

Motivazioni per lo studio della matematica

Di Emma Castelnuovo non è certo necessaria una presentazione. La ringraziamo di averci fornito, per la pubblicazione, questa traduzione della conferenza da lei tenuta a Tunisi durante la XXVII Rencontre de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement de la mathématique - 7-13 agosto 1975.

Si dice sempre, a proposito di qualunque disciplina, che l'allievo ha interesse a studiare un dato argomento se ne è motivato; una forte motivazione gli permette spesso di comprendere dei concetti astratti che altrimenti, presentati « a freddo », avrebbero costituito delle difficoltà insormontabili.

E' chiaro che, anche per la sola matematica, le motivazioni cambiano al variare dell'età dell'allievo; è molto importante che il professore abbia delle idee chiare al riguardo. Ho cercato di farmele io stessa, e mi è sembrato di ravvisare fra le tante cause di motivazioni che possono « far presa » su ragazzi dagli 11 ai 15 anni alcuni punti essenziali; questi:

fenomeni della realtà	giochi	storia del pensiero matematico	generalizzazioni.

Ma è chiaro che questa specie di classificazione ha solo un valore relativo: è infatti assurdo classificare, separare un'idea dall'altra, dato che il pensiero costruttivo del ragazzo ci forza spesso a collegare motivazioni diverse, e, sul piano matematico, ci porta a trattare insieme contenuti lontani e ad utilizzare tanti metodi di ricerca. Secondo me, non ci si deve mai preoccupare se la linea didattica non è « pura », perché è proprio questo « fusionismo (per utilizzare un termine caro a Bruno de Finetti) che è creativo.

La classificazione che ho scritto prima ha dunque soprattutto il fine di aiutarmi ad esporre.

Motivazioni che vengono dalla realtà

Dai fenomeni naturali alle tecniche le piú diverse, dagli interessi sociali all'architettura, all'arte, ...la realtà ci obbliga a osservare, a sperimentare, a confrontare, a raccogliere dei dati, a fare delle statistiche, a pensare in termini di probabilità; in una parola, a matematizzare.

Ecco qualche esempio, fra i piú semplici:

1) fenomeni naturali: trasformazioni affini.

L'osservazione delle ombre di un oggetto date dai raggi del sole e delle ombre dello stesso oggetto date da una lampada puntiforme porta a scoprire — ed è appunto questo confronto che è costruttivo — che molte proprietà che si verificano nello spazio illuminato dal sole, lo spazio affine, cadono nello spazio illuminato dalla lampada, lo spazio proiettivo.

Se poi ci allontaniamo dal concreto naturale, dato dal sole, è facile scoprire che si possono ottenere delle trasformazioni affini anche a partire da un altro concreto: una tela elastica opportunamente stirata. Se su questa tela si disegna un piano cartesiano e si stira la tela nella direzione degli assi, si è condotti spontaneamente alle equazioni della affinità. E, una volta che il ragazzo possiede questo strumento analitico, è in grado di scoprire delle altre proprietà, delle leggi di cui potrà, in seguito, fare delle applicazioni, ritornando cosí nel concreto. Naturalmente, ciò vale anche per stiramenti in direzioni qualsiasi; solo che allora le equazioni sono un po' meno semplici.

Quando si esamina una figura illuminata da una lampada puntiforme e la sua ombra, molti ragazzi si domandano quali sono le proprietà di questa trasformazione: vi è un rapporto invariante? E' il professore, ora, ad essere motivato: come poter dare una base concreta al birapporto, a quel rapporto di un rapporto che è stato introdotto da Pappo in un modo che non si appoggia alla realtà? Come dare alle trasformazioni proiettive una linea altrettanto concreta di quella che è possibile seguire per le trasformazioni affini? Come ricostruire la storia allontanandosi dalla storia?

E' chiaro che un vero impulso è stato dato allo studio delle trasformazioni proiettive dalla prospettiva; perché non legare strettamente geometria ed arte?

Cosí, parlando, mi sono allontanata dai fenomeni naturali; sono arrivata all'opera dell'uomo. E' proprio su questo argomento che vorrei portare un altro esempio, preso dall'architettura.

2) L'architettura.

Non vi è ragazzo che rimanga freddo davanti a un'opera architettonica, davanti ad un'elegante soluzione tecnica. Ora, alla base di queste soluzioni vi è una matematica che regola gli aspetti funzionali, come equilibrio, resistenza, ecc. Dare un'idea di questa matematica « sotto-giacente » vuol dire permettere agli allievi di ammirare queste opere con un occhio piú cosciente, vuol dire provocare una piú profonda maturazione matematica.

E' proprio da una motivazione estetica che si può partire per uno studio assai spinto sulle quadriche: ci si basa su delle nozioni legate sia alle trasformazioni affini sia alla teoria dei baricentri. Ancora una volta si ricostruisce un argomento allontanandosi dallo sviluppo storico.

3) Questioni sociali.

Quando le cose non vanno bene da un punto di vista sociale o economico, e mi sembra che tutto il mondo si trovi oggi in queste condizioni, si è spinti a rendersi conto del perché, si è motivati a vederci piú chiaro.

Un esempio: proprio un anno fa, nell'agosto del 1974, si è tenuta a Bucarest una conferenza mondiale sull'aumento della popolazione, e, quindi, sui problemi connessi: alimentazione, agricoltura, ecologia, ecc.

Tutti questi problemi sono matematizzabili in termini di leggi esponenziali. Un tale studio, esteso alle leggi di accrescimento le piú varie dà l'occasione di entrare non solo in moltissime questioni (dalla biologia alla chimica, dalla fisica alle scienze finanziarie) ma di rendersi conto, anche, che la matematica ha il potere, con il cambiamento del coefficiente di un'equazione, di modificare, di regolare questa o quella legge. Che, dunque, si può fare appello alla matematica, si può interrogare la matematica per vedere lontano nel futuro.

E ancora un esempio. Non c'è bisogno di parlare agli allievi di problemi di programmazione: alla radio, alla televisione, in tutti i giornali, non passa giorno in cui non se ne parli. Come programmare questa o quella impresa? Come massimizzare i suoi introiti?

Con l'aiuto del piano cartesiano o del modello baricentrico non è difficile sviluppare la teoria su due o tre variabili. Esercizi di calcolo letterale, di tutta quella parte meccanica che gli allievi hanno poco in simpatia, diventano facili e maneggevoli solo per il fatto che... si è veramente motivati. E il modello geometrico o quello fisico dà un appoggio formidabile per rappresentare dati e condizioni. Ma ci si rende conto che le variabili sono in generale ben piú numerose di due o tre, e che le possibilità umane di ricordare e di agire su tutti questi dati sono in generale insufficienti. Da qui si è condotti a parlare dei calcolatori, e il discorso si allarga e si approfondisce, tanto da presentarlo a ragazzi piú grandi.

Certo, parlare del calcolatore è una cosa, poter agire sul calcolatore, questa, è tutt'altra cosa; e in quelle rare scuole dotate di questa macchina, la si può utilizzare con due fini distinti:

— la vera comprensione del suo funzionamento, e quindi la possibilità di dialogare con questa macchina, esige di analizzare il nostro pensiero logico, frazionandolo in piccole

parti. Si hanno cosí molte occasioni per fare esercitare l'allievo in un sistema ipotetico-deduttivo;

— una volta che si padroneggi il calcolatore, si può utilizzarlo per farne un modello della realtà. Si può per esempio dare un'idea di quanto possa dare un calcolatore, parlando di un problema complesso come quello della situazione delle acque di Venezia: perché si può — e, del resto, è stato già fatto — costruire un modello per similitudine di questo o quel canale o di una zona della città, e, successivamente, far cambiare la quantità delle acque o la forza delle onde,... per conoscere la portata, la resistenza,... Ma si può procedere in tutt'altro modo: invece di fare un modello fisico, dare un certo numero di istruzioni a un calcolatore, far cambiare queste istruzioni e « ascoltare » le risposte della macchina. Il calcolatore diventa cosí piú reale della stessa realtà.

Questo è, evidentemente, un problema molto complesso; ma si può dare l'idea dell'impostazione di un problema col calcolatore considerando delle questioni piú semplici ma sempre motivanti per l'allievo.

Il gioco, una motivazione di tutti i tempi.

In tutta la storia della pedagogia si è riconosciuto al gioco il piú grande valore formativo: il gioco è ritenuto essenziale per lo sviluppo delle qualità morali e intellettuali del bambino.

Limitandosi alle « funzioni matematiche » del gioco, e all'influenza che queste possono avere sulla fantasia, la creatività, la formazione delle strutture mentali, basterebbe prendere in considerazione gli ultimi lavori di Zoltan Dienes: dopo aver fatto una sottile analisi di differenti tipi di giochi, Dienes ne trae delle interessanti conseguenze sul piano della didattica matematica.

Nella mia « brutale » classificazione delle motivazioni, si possono mettere in rapporto giochi e calcolatori nel senso che il ragazzo può « fare il gioco » di obbligare un calcolatore a giocare, per esempio alla « dama ». Si renderà conto che, se vuole che il suo calcolatore vinca il gioco, deve fare una sottile analisi di tutti i casi che possono accadere. Questa analisi obbliga l'allievo a un pensiero logico molto spinto; si torna cosí a quanto si era detto poc'anzi sui legami fra calcolatore e sviluppo di un'intelligenza ipotetico-deduttiva.

Ma io credo che si possa anche dire che il gioco matematico, pur occupandosi di un concreto, ci conduce qualche volta lontani dal concreto, ci procura una vera evasione dalla realtà, e, anche per questo, ci piace giocare, si è motivati a giocare.

La storia del pensiero matematico è anche una motivazione.

Abbiamo già notato che la realtà può condurre a interessarsi della storia: abbiamo legato la prospettiva, e dunque l'arte, allo sviluppo storico.

Ma, sappiamo bene che piú volte è la matematica pura che obbliga a immergersi nel passato. Per non citare che due esempi, basta pensare a tutta la dialettica riguardante la nozione d'infinito ai tempi della Scuola Eleatica, e dunque alle argomentazioni di Zenone; o pensare alla scoperta delle geometrie non euclidee, altrettanto logiche di quella di Euclide.

Questi esempi che ci riportano a due grandi crisi della storia della conoscenza sono fortemente motivanti a partire da un'età molto giovane. Non vi è nulla di concreto nelle due questioni ma è fuori dubbio il contrasto con la realtà che colpisce e fa avanzare il pensiero matematico degli allievi motivandoli verso studi sulla teoria della conoscenza.

Un'altra motivazione: la generalizzazione

Generalizzare: che cosa significa? Vuol dire passare da un caso particolare a una proprietà, a una legge? Vuol dire fare delle analogie e poi astrarre?

E, in quale modo si può procedere? In modo induttivo o deduttivo?

Dichiaro subito che non voglio preoccuparmi di questa o quella definizione. Continuo a parlare come una persona — quale sono — che insegna matematica in una scuola, e quindi attaccata a quel concreto che è la classe. Per me il problema è solamente questo: come provocare negli allievi l'attitudine a generalizzare?

Ancora una volta procedo con esempi. Parto da un esempio classico: il teorema di Pitagora. Parto da questo teorema che esprime una legge generale a cui si può arrivare a partire da casi particolari, e voglio vedere come, una volta acquisita tale verità, si possa avere una motivazione per avanzare. Si può avanzare su diverse vie:

1) passare dal triangolo rettangolo a un triangolo qualunque, e domandarsi se vi è una proprietà che lega i quadrati costruiti sui tre lati;

2) partire sempre dal triangolo rettangolo, e... ci sono tante idee che vengono:

a) costruire sui lati delle figure diverse da quadrati;

b) interpretare la proprietà pitagorica nel senso analitico come distanza fra due punti del piano o dello spazio, o di uno spazio a un numero qualunque di dimensioni; passare di qui a un numero infinito di dimensioni per entrare nella teoria degli spazi funzionali;

c) generalizzare la formula pitagorica lasciando due variabili ma cambiando gli esponenti; si entra allora nella teoria dei numeri.

Questi ultimi esempi ci conducono molto lontano, troppo lontano per l'età dei nostri allievi, ma in corso superiore si può forse dare qualche idea.

Consideriamo ora gli altri casi da un punto di vista didattico.

1) Il triangolo non è piú rettangolo, ma si costruiscono sempre dei quadrati sui lati. Come condurre gli allievi ad intuire questo caso? Il progetto di un film di Jean Louis

Nicolet (1) può dare una prima motivazione. Cerchiamo di vedere nella fig. 1 un triangolo isoscele variabile: la base è fissa e l'altezza relativa cambia. Se l'angolo $\hat{A}$ formato dai due lati uguali è retto, vale la proprietà pitagorica; se questo angolo è acuto, è evidente che il quadrato della base è piú piccolo della somma degli altri due quadrati; se l'angolo è ottuso, il quadrato della base è piú grande.

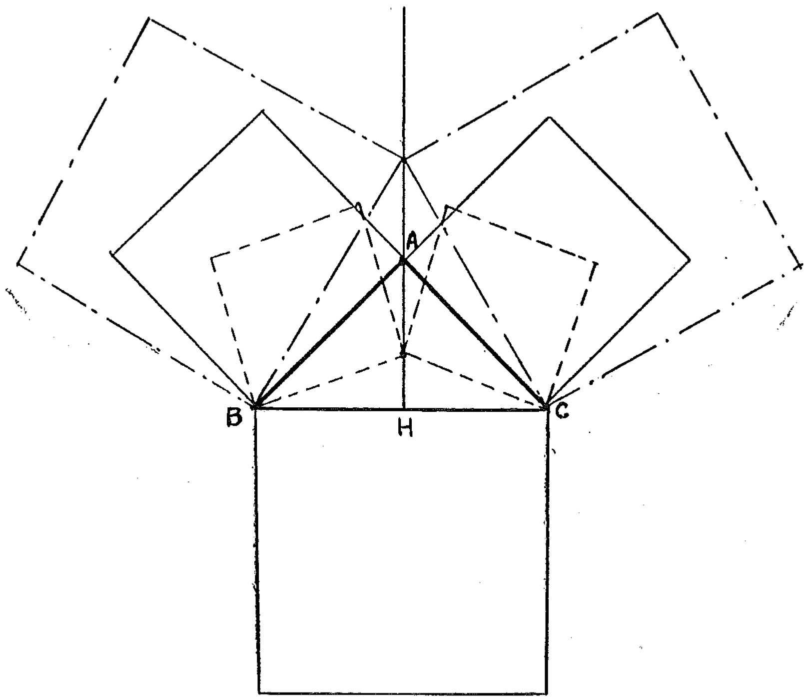

Fig. 1

Ma, piú piccolo o piú grande, di quanto?

Questi due casi sono considerati anche da Euclide, che dà due dimostrazioni, basate su sviluppi di algebra geometrica.

(1) Si può leggere qualcosa sui film di Nicolet anche nel mio libro « Didattica della matematica »; La Nuova Italia Editrice, Firenze.

Si trova un'attitudine dinamica, che può accordarsi molto bene con il progetto di Nicolet, presso un arabo di Bagdad del IX secolo, Tabit ibn Qorra (noto per aver curato le traduzioni in arabo di opere di Euclide, Archimede, Apollonio). Voglio dare solamente un'idea di questa dimostrazione (2). Se l'angolo $\hat{A}$ è, per esempio, ottuso (fig. 2), la somma degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ è ovviamente minore di $\hat{A}$. Allora, costruiamo su $\hat{A}$ due angoli uguali a $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Si ottengono i triangoli ABC', ACB', simili al triangolo CBA per avere gli angoli rispettivamente uguali. Si ha:

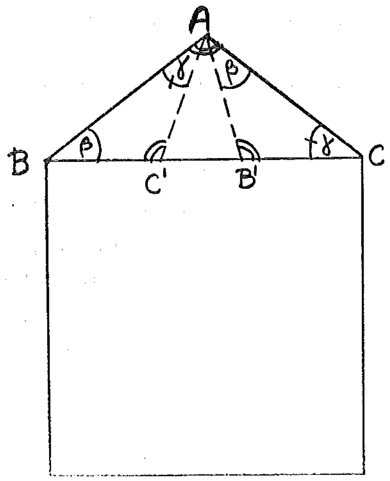

Fig. 2

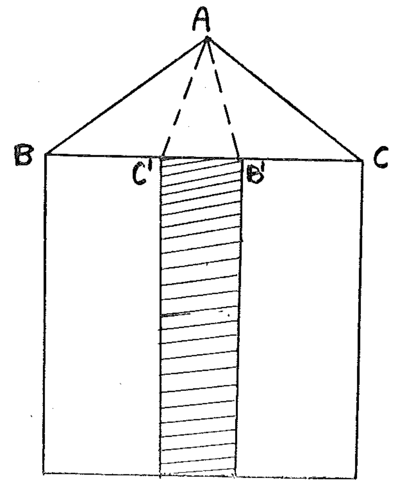

Fig. 3

$$DC : AB = AB : BC'$$

da cui

$$AB^2 = BC \cdot BC';$$

e analogamente

$$AC^2 = BC \cdot B'C.$$

(2) Noi continuiamo a riferirci a un triangolo isoscele, mentre la dimostrazione di Tábit ibn Qorra si riferisce a un triangolo qualunque.

Da queste si ha:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 - BC \cdot B'C',$$

che esprime una generalizzazione del teorema di Pitagora. Osserviamo la figura 3: se l'angolo $\hat{A}$ è ottuso la somma dei quadrati costituiti sui lati AB e AC è equivalente al quadrato costruito su BC, diminuito del rettangolo tratteggiato in figura. E' interessante immaginare un triangolo ABC con angolo $\hat{A}$ variabile per continuità; in particolare, se l'angolo $\hat{A}$ è retto, il rettangolo tratteggiato sparisce.

2) Consideriamo adesso un triangolo rettangolo, ma cambiamo le figure costruite sui cateti. Cambiarle, come? Possiamo cominciare col disegnare una figura qualunque, per esempio dei rettangoli che non abbiano la stessa forma, pro-

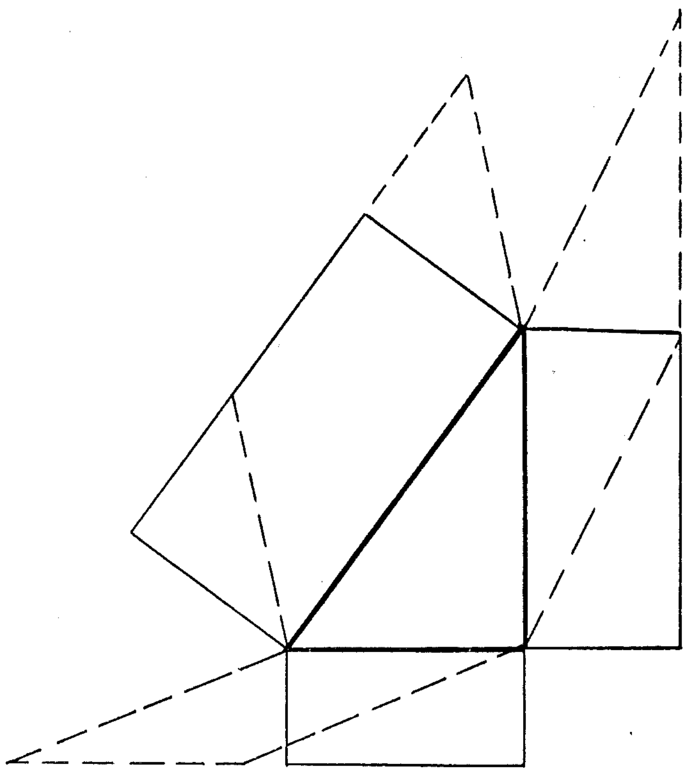

Fig. 4

prio allo scopo di provocare una reazione. Non è difficile arrivare a rendersi conto che le figure devono essere simili perché risulti valida la proprietà pitagorica. Ma, quello che colpisce è che si possono anche trasformare queste figure con una affinità equivalente (si può ad esempio « mutare per scorrimento » un rettangolo in modo da trasformarlo in parallelogramma equivalente, o un cerchio in modo da avere un'ellisse equivalente), e, pur non avendo le figure la stessa forma, rimane valida la proprietà pitagorica (fig. 4).

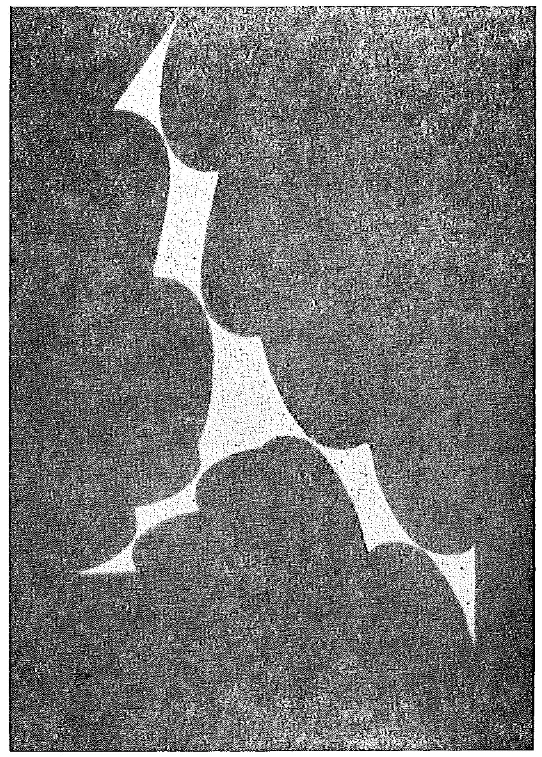

Fig. 5

Ci si rende conto che ci si è molto allontanati dalla proprietà primitiva, ma la figura ha sempre la forza del concreto; una forza che ha condotto Paul Libois (3) alla creazione del suo film che sollecita la fantasia e fa pensare, e

(3) Paul Libois « Il triangolo di Pitagora », film realizzato sotto gli auspici del Ministère Belge de l'Education Nationale.

che ha dato a degli allievi di 13 anni l'idea di un quadro astratto (fig. 5) che ha fuori dubbio un certo valore artistico.

E ancora una suggestione: uno dei primi casi di applicazione della regola pitagorica si trova in una tavoletta babilonese del 1800 a.C. Si propone e si dà la soluzione di questo problema: « un bastone di 30 unità è appoggiato a un muro. Poi, scivola di 6. Di quanto la base del bastone si allontanata dal muro? » (cfr. fig. 6). Un problema da poco ma di grande valore storico, e che ha anche un grande valore didattico. Esso, in effetti, provoca nella classe un'attitudine dinamica: « e se il bastone scivola di 3? e di 1? e di...? », vi è sempre qualcuno che pone questa domanda. E' bello: si arriva a una curva inviluppata da rette: è l'asteroide (fig. 7).

Quale ricchezza di contenuti e di metodi! Ci si rende conto che, anche ad un livello assai elementare, si possono condurre gli allievi a riconoscere tutta la portata di un'idea primitiva, proprio per la scoperta delle sue generalizzazioni.

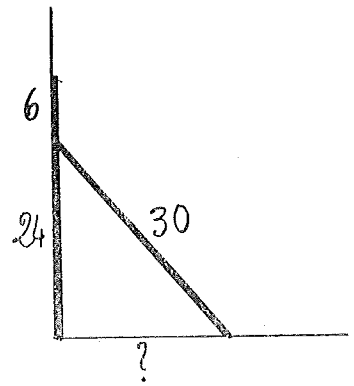

Fig. 6

Credo di poter terminare partendo da questi ultimi casi e tornando indietro: vi sono delle motivazioni che hanno un carattere intrinseco, che vengono dunque dalla matematica stessa; esse sono dovute al desiderio di vedere lontano nei due sensi: penetrare nella storia delle conquiste del pen-

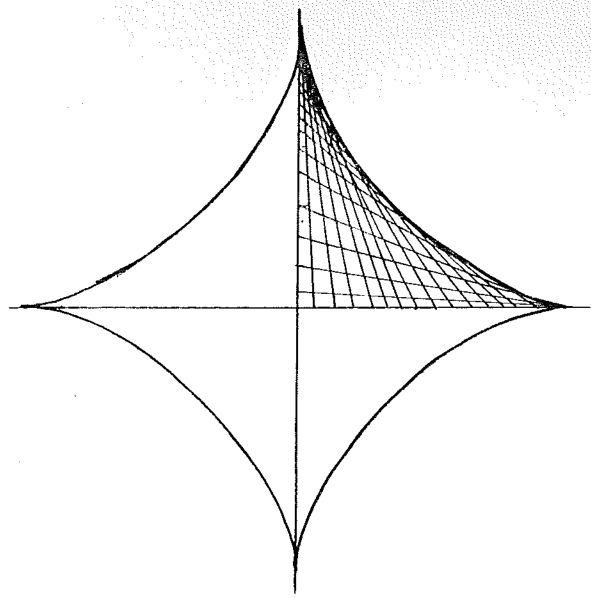

Fig. 7

siero e dunque nel passato, o avanzare nella ricerca con la fantasia, la generalizzazione, la creazione, l'avventura matematica, e vedere dunque nell'avvenire. Si tratta, come ho detto, di motivazioni che hanno per base l'edificio stesso della matematica.

Ma questo edificio non deve mai isolarsi nella scuola, non deve essere considerato come qualcosa di autonomo. Perchè deve trovare, proprio nella realtà, le sue continue motivazioni a partire dalle quali si cercherà di astrarre. E, una volta arricchito di nuovi strumenti, il nostro edificio matematico se ne varrá per chiarire altri problemi del mondo reale.

Io penso che in questo modo si possa dare agli allievi una idea della dimensione umana della matematica.