EMMA CASTELNUOVO

VERSO UN INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA CHE PRODUCE CULTURA SCIENTIFICA

Separata da Revista «Estudos Italianos em Portugal» n.º 45-46-47
1982-83-84

VERSO UN INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA CHE PRODUCE CULTURA SCIENTIFICA

di *Emma Castelnuovo*

Il titolo di questa mia esposizione può sembrare banale, e, allo stesso tempo, sibillino.

E' chiaro infatti che insegnando matematica ci si propone di dare una cultura scientifica, di formare una mentalità scientifica. Si è detto tante volte e si continua a ripetere che l'obiettivo dell'insegnamento della matematica è di abituare a ragionare, a dedurre, a preparare a un pensiero logico. Forse si è detto troppo, si è messo troppo l'accento sull'aspetto deduttivo lasciando da parte altri aspetti altrettanto importanti. Scriveva José Silva: «l'intuizione e la preziosa tessitura euristica vengono spesso ignorate, soppresse, portando così ad una visione unilaterale della costruzione matematica; perché la matematica non è solo logica: è un prodotto umano e quindi è intimamente legata con le scienze della natura e della tecnica». Ora, delle tre fasi — nascita concreta del concetto o della legge, idealizzazione matematica, ritorno al concreto attraverso le applicazioni — nella scuola si è sempre, e sempre di più, esaltato quella di mezzo, quella cioè della presentazione di una matematica pura, astratta, senza pensare che l'aggettivo «astratto» viene dal latino e significa «estratto» (dal concreto); ha cioè, etimologicamente, un senso dinamico. E in questo mondo puro, in cui si vuole che i ragazzi non si sporchino le mani, sono venute su generazioni e generazioni di allievi, di uomini a cui la scuola secondaria non ha dato, il più delle volte, una vera formazione scientifica.

Ma io penso che per poter vedere le cose in modo obiettivo occorre allargare il discorso, e farsi un'idea, sia pure a grandi linee, di quanto è avvenuto nella storia dell'insegnamento matematico, almeno nella nostra vecchia Europa.

Durante lunghi secoli l'istruzione secondaria è stata riservata a pochi, a un'élite. Questi ragazzi ricevevano la loro educazione in seminari religiosi o presso la loro stessa famiglia dove venivano affidati a precettori. Per quello che riguarda l'istruzione matematica non c'era che un libro: gli *Elementi* di Euclide; è questo libro che costituì l'educazione matematica dei giovani. Ma Euclide non aveva scritto il suo trattato ad uso scolastico, e l'effetto nocivo e nefasto degli *Elementi* continuò ad esercitarsi su generazioni e generazioni. Abbiamo la testimonianza dell'effetto negativo di questo libro, proprio da parte di un grande matematico del '700: A. C. Clairaut. Egli dedica un delizioso volumetto, gli *Elements de géométrie* alla sua amica, la Marquise du Châtelet, che, pur essendo una donna molto intelligente, non riusciva a penetrare nello spirito del trattato euclideo. E queste difficoltà sono evidenti — dice Clairaut —: per comprendere qualunque scienza non si può cominciare con teorie astratte, ma bisogna

far sentire tutto lo sforzo, tutto il lavoro che si è fatto per estrarre la teoria dal concreto, dalla realtà.

E, continuando a percorrere la storia, ecco che cosa accade: la società si evolve, e nella maggior parte dei paesi europei, la scuola diventa verso la metà o la fine dell'800 un organo dello Stato. L'istruzione non è più di pochi privilegiati; si fondano scuole pubbliche, si stabiliscono dei programmi, e, con i programmi, entrano nelle scuole i libri; libri diversi da paese a paese. Ma per la matematica c'è il libro unico, uguale per tutti i paesi — gli *Elementi* di Euclide —, in traduzioni diverse, in adattamenti diversi. E ora, sui molti allievi, si verifica lo stesso effetto che si era avuto nei confronti dei pochi giovani privilegiati d'un tempo: un senso di difficoltà insuperabile, un complesso d'inferiorità, un «io la matematica non la capisco».

Gli anni passano e il problema dell'insegnamento della matematica nei suoi aspetti pedagogico e psicologico non è sentito. Quanto aveva scritto un matematico come Clairaut non lascia traccia, e così non vengono ascoltate le voci di grandi educatori come un Comenius, un Pestalozzi, e, più recentemente, un Ovide Decroly, che agli inizi di questo secolo fonda a Bruxelles una scuola dove si esalta la costruzione matematica anche attraverso l'interazione con le scienze sperimentali, una scuola che si è sviluppata e che dovrebbe essere presa a modello.

E, per tornare ai matematici, anche la voce del grande geometra Felix Klein, un matematico dotato di fine senso didattico, non riesce a superare le dichiarazioni dei più, che vogliono ispirare i programmi ad un insegnamento assiomatico.

Ma ecco che alla fine degli anni cinquanta — ci avviciniamo dunque ad oggi e quindi il problema diventa il nostro problema, ed ogni responsabilità diventa la nostra responsabilità — è dall'esterno che viene un impulso a cambiare. L'impulso viene dal «momento astronautico»: siamo nel 1957 quando i Russi lanciano il loro Sputnik. Negli Stati Uniti questo lancio scatenò un vero fermento anche nell'ambiente dei matematici: perché, se l'America voleva essere all'altezza della tecnologia russa, era necessario formare dei tecnici, degli ingegneri, degli scienziati; la matematica doveva dunque avere un posto di rilievo fin dai primi anni della scuola secondaria. E' così che nel 1959, su sollecitazione degli Stati Uniti, l'Organisation Européenne de Coopération Economique organizza un Convegno Internazionale a Royaumont (Francia) per discutere e promuovere un rinnovamento dell'insegnamento della matematica in tutto il mondo.

E' proprio in questo Convegno che si delinea una svolta: è la presa di posizione del matematico Jean Dieudonné che segna l'avvio a un netto distacco dall'insegnamento tradizionale. Al grido, diventato poi uno slogan, di «abbasso Euclide», Dieudonné impone la sua forte personalità convincendo la maggior parte dei partecipanti a farsi portavoce nei rispettivi paesi della necessità di abbandonare del tutto l'insegnamento euclideo per sostituirlo con una matematica più viva e stimolante, aderente alla ricerca moderna. Allo studio di figure statiche si dovrà sostituire lo studio di grandi capitoli come quello dell'algebra lineare; ma per comprendere a fondo questi grossi argomenti, veniva suggerito di sviluppare per alcuni anni un insegnamento a base sperimentale o semi-sperimentale. Queste idee furono precisate da un'apposita Commissione dopo un lungo seminario tenutosi a Dubrovnik (Iugoslavia) nel 1960. Fu pubblicato un volume che doveva servir da guida per la redazione di programmi e di libri di testo

nei vari paesi: algebra, geometria, analisi non costituivano più dei compartimenti-stagno ma, al contrario, venivano messe in rilievo le loro forti interazioni, e, anche, quelle applicazioni che potevano essere motivanti per introdurre vari argomenti. Ma, una cosa è stata la divulgazione di queste idee e una cosa fu poi la sua effettiva realizzazione nella maggior parte dei paesi europei e non europei. Perché, per realizzare quest'unità della matematica, si ritenne in molti paesi che la cosa migliore fosse di adattare alla scuola l'opera fondamentale di Bourbaki, e questo fin dall'età di 12 anni! Esaltati ed accecati da questa introduzione nella scuola della cosiddetta «matematica moderna», dell'«ensemblisme à tout prix» (secondo le parole di Freudenthal), non si vide più la materia vivente, i ragazzi, a cui quest'insegnamento veniva indirizzato. Si era giunti — come mi scriveva Silva proprio in quegli anni — «a far crescere i ragazzi in una pianura matematica sterilizzata e sterilizzante, capace di soffocare qualunque obiezione, qualunque dialogo». «Perché — diceva — se vogliamo che l'insegnamento della matematica sia autenticamente vivo e fecondo, dobbiamo presentare una scienza che si fa e non una scienza già fatta. La matematica non deve disprezzare il concreto, la matematica deve risentire della realtà fisica dove il pensiero matematico affonda le proprie origini. Ed è soprattutto la geometria che serve in modo naturale al collegamento fra il mondo fisico e l'astrazione».

Ecco, queste idee espresse da José Silva, nel quadro di una modernizzazione del corso di matematica, maturano e influenzano anche matematici che non si occupano di questioni didattiche: a distanza di qualche anno, nel 1976, il geometra inglese Michel Atiyah, nella sua conferenza tenuta a Karlsruhe al Congresso dell'ICMI ([1]), accusa i matematici di aver messo da parte la geometria nel corso secondario, perché «è proprio la geometria — dice — che da una parte provoca anche nei giovanissimi l'intuizione creatrice e dall'altra serve a collegare il mondo fisico con quello dell'astrazione».

Il mondo fisico, la realtà, la società; la responsabilità dell'insegnamento matematico negli anni '80. Riflettiamo: mai come negli ultimi dieci anni la cultura scientifica, e con questa la matematica, è entrata nelle case di tutti attraverso giornali, riviste, e soprattutto la radio e la televisione. E' dovere della scuola, e mi riferisco in particolare ai primi anni del ciclo secondario, mettere in grado il cittadino di seguire una trasmissione televisiva su cose di scienza. Ora, perché si possa capire il senso delle rappresentazioni grafiche che si vedono sullo schermo, perché si possa cogliere almeno qualcosa del resoconto di questa o quella ricerca di medicina, perché i pianeti e i satelliti naturali si avvicinino sempre più a noi attraverso le spiegazioni di scienziati e giornalisti, perché il nostro mondo diventi sempre più grande, ma allo stesso tempo meno lontano, occorre che chi ascolta e vede abbia un minimo di formazione, abbia delle basi. Ma questa formazione, queste basi non si acquistano né ascoltando né guardando passivamente: i grafici non si capiscono se, prima, ai tempi della scuola, non si è avuto occasione di costruirne; un'osservazione o un esperimento di scienza descritto a parole non si coglie se, prima, non abbiamo, noi maestri, insegnato a osservare e a sperimentare; un sottile ragionamento logico non viene seguito se, prima, non abbiamo abituato i ragazzi a trarre da certe ipotesi certe conseguenze; e una scoperta dovuta all'intuizione e alla fantasia dello scienziato

([1]) International Commission Mathematical Instruction.

appare meno brillante, meno suggestiva se, ai tempi della scuola, i ragazzi non hanno, nel loro piccolo, esercitato la mente in questo senso, se, insomma, non hanno avuto essi stessi la gioia di arrivare alla scoperta.

Per insegnare a «saper vedere», e intendo dire «vedere con gli occhi fisici e vedere anche con gli occhi della mente», bisogna insegnare a fare le cose: a osservare, a sperimentare, a ragionare, a intuire. E' l'insegnamento della matematica, ed è l'insegnamento delle scienze sperimentali che devono provvedere a questa formazione. Viene però spontanea un'obiezione; ci si chiede: se vogliamo formare un cittadino, cioè un uomo che, domani, sia in grado di seguire almeno i fatti più vistosi sulle scoperte scientifiche, quale tipo d'istruzione dobbiamo sviluppare? La cultura di oggi, insomma, sarà anche una cultura per domani?

Vorrei portare due esempi, uno preso dalla matematica e l'altro dalle scienze sperimentali; penso che più che le parole varranno a chiarire il mio pensiero.

I due esempi si riferiscono in modo particolare al 1° ciclo secondario; età degli allievi: 11-14 anni.

Un esempio dalla matematica

I concetti di area e perimetro e di volume e superficie vengono spesso confusi, e questo anche dagli adulti. Conviene quindi non «tenerli separati», come in generale si fa, ma metterli a confronto. Ecco un problema riguardante i concetti di area e di perimetro, un problema aperto e che può quindi condurre molto lontano.

Si fa vedere ai ragazzi un rettangolo realizzato con uno spago legato che viene tenuto ben teso fra le dita delle due mani. Allontanando e avvicinando le mani e, quindi, tenendo le dita di ogni mano più vicine o più lontane, si ottengono tanti rettangoli. Questi rettangoli hanno, ovviamente, lo stesso perimetro: è lo spago. Alla domanda «l'area rimane la stessa o cambia nel passaggio da un rettangolo all'altro?» la risposta è sempre la stessa: «certo — dicono — l'area rimane la stessa, non può cambiare dato che il perimetro è sempre lo stesso»; oppure dicono «l'area non varia perché siccome l'area del rettangolo si trova moltiplicando la base per l'altezza, nel nostro caso accade che se l'altezza diminuisce la base aumenta, e quindi c'è una compensazione». Non rispondiamo nulla a queste osservazioni ma, continuando a «maneggiare» lo spago, facciamo sì che l'altezza continui a diminuire arrivando al caso limite: il rettangolo tende a «schiacciarsi» sulla base, l'altezza tende a zero, e quindi anche l'area tende a zero. E allora? L'area cambia, «eppure non cambiava...», dicono. E' molto interessante vedere le reazioni nei bambini dei più diversi paesi: i nostri paesi e i paesi in via di sviluppo. Le reazioni sono identiche, come se l'ambiente, l'educazione, la tradizione non avessero alcun peso. Si ha, prima di tutto, un senso di sbalordimento, di disappunto. Poi l'osservazione si affina: in qual modo cambia l'area? A partire dal caso limite l'area aumenta, arriva al massimo (il caso del quadrato), e poi decresce arrivando a zero, nell'altro caso limite. «E' come quando si lancia una palla» — dice qualcuno. Allora si passa al calcolo. Lo spago, e cioè il perimetro, è di tot centimetri; si possono avere tanti casi, dando alla base, e quindi all'altezza, diversi valori. Si calcola l'area, e ora ci si rende conto del forte cambiamento. Si fa un grafico: una curva che non conoscevano benché faccia parte della realtà di tutti i giorni — la parabola —, viene ad arricchire le loro conoscenze.

Si è sollecitati a guardare, a pensare: la parabola nell'architettura moderna, la parabola in fisica, le antenne radar, i forni parabolici e, quindi, tutte le applicazioni dell'energia solare. Un problema di matematica pura ha aperto la mente sul mondo che ci circonda.

E' interessante pensare che è proprio a un problema su figure isoperimetriche che Galileo ha dedicato un dialogo indimenticabile, che si conclude così: «la gente è convinta — dice — che se due piazze hanno lo stesso perimetro, anche l'area da esse contenuta deve essere uguale. Ci saranno solo quattro persone su cento che hanno le idee chiare su questo problema!»

E ora qualche osservazione dal punto di vista didattico: un rettangolo non è certo una figura interessante; ma un rettangolo che varia, che si trasforma con continuità, è qualcosa che affascina. Perché? A parte il lato psicologico del fascino che esercita il movimento, qui l'interesse viene da un concetto grosso che si affaccia per la prima volta: il concetto di *funzione*. E, con questo, l'intuizione inconscia di un teorema fondamentale di analisi, il teorema di Rolle, che suggerisce l'esistenza di un massimo dell'area in rettangoli isoperimetrici.

Si dirà: ma è difficile, sono concetti delicati. «Che si tratti di concetti delicati — diceva Silva — nessuno lo può negare. Ma teniamo presente che l'effetto delle grandi idee è come l'aria forte di montagna che prima stordisce ma poi stimola e rinforza».

Il problema dello spago ci ha condotti a passare da questioni di matematica all'osservazione della realtà che ci circonda. Vorrei ora portare un esempio opposto: vedere come dall'osservazione di un fenomeno naturale, anche dei bambini siano portati a matematizzare.

Un esempio dalle scienze sperimentali

Voglio portare un esempio tratto dalla botanica, un esempio del tipo di quelli che José Silva proponeva ai suoi studenti quando, negli anni cinquanta, insegnava alla facoltà di agronomia, qui a Lisbona.

L'esempio che porto è molto semplice, tanto che lo si può studiare con ragazzi di 12-13 anni.

Come crescono le foglie? Con quale legge? Molto spesso si verifica una semplice relazione fra la lunghezza di una foglia e la sua larghezza massima. In fig. 1 abbiamo riprodotto delle foglie di rosa colte dallo stesso ramo: ve ne sono di molto piccole, e cioè giovanissime, e ve ne sono di più grandi, e cioè di più anziane.

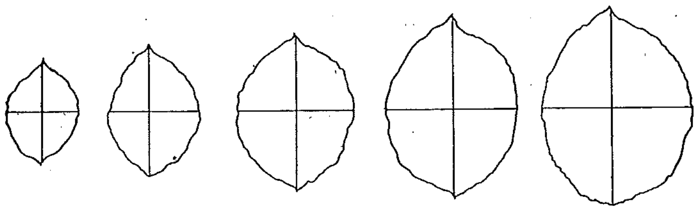

Fig. 1

E' interessante misurare con gli allievi lunghezza e larghezza massima di ogni foglia. Ecco quanto è risultato da queste foglie:

larghezza massima x	lunghezza y
2,1	2,8
2,6	3,5
3,2	4,2
3,6	4,9
4,2	5,5

Si chiede agli allievi se vedono qualche relazione fra x e y, ma, sempre, la risposta è solo questa: «quando aumenta la larghezza, aumenta anche la lunghezza». In effetti, non risulta subito un legame più preciso. Allora si procede secondo i metodi di laboratorio: si riportano quelle misure sul piano cartesiano (fig. 2); si ottiene una «nuvola» di punti che si addensa vicino ad una retta passante per l'origine. Ecco, ora

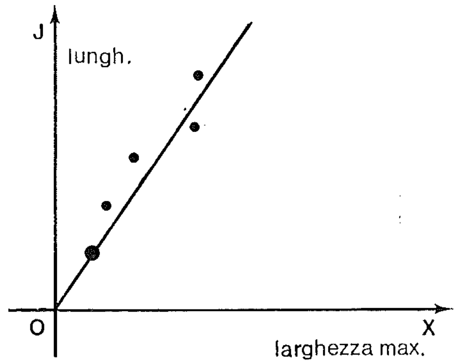

Fig. 2

il significato è chiaro: lunghezza e larghezza massima sono legate, approssimativamente, da una legge di proporzionalità diretta, cioè la foglia cresce mantenendo la forma, il che equivale a dire che il numero delle cellule cresce ugualmente in tutte le direzioni.

Da qui, altri problemi di biometria: la natura non procede molto spesso secondo crescite uniformi; quindi, altre interpretazioni matematiche, e altri problemi di statistica e di probabilità.

Ma, torniamo alle piante, e riflettiamo ancora sul problema dell'accrescimento: come cresce in altezza una pianta? Quale influenza può avere sull'accrescimento la somministrazione di un fertilizzante? Ecco dei grafici (fig. 3) che si riferiscono alla crescita di tre piantine, appena nate, di fagiolo; le piantine sono sottoposte a condizioni ambientali identiche, ma vengono somministrate, nei tre casi, delle dosi diverse di uno stesso fertilizzante, e questo nel giro di nove settimane: la dose giusta (grafico a), una dose doppia (grafico c), una non somministrazione (grafico b).

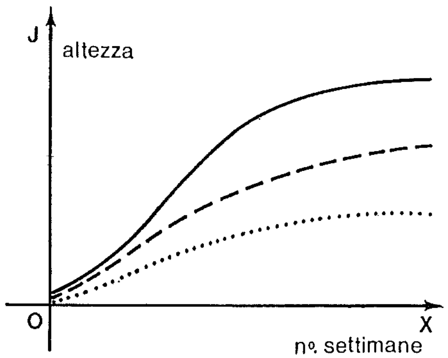

Fig. 3

Si tratta di tre curve che sono state costruite dai ragazzi con tante misurazioni. Il fatto sperimentale porta dunque a considerazioni di statistica, di probabilitc, di matematica pura sulle leggi esponenziali; si è condotti così alle più aperte discussioni.

Ma voglio terminare: leggi matematiche e leggi empiriche, grafici rispondenti ad equazioni e grafici di laboratorio. Una matematica che si sviluppi su queste due linee, che spesso interagiscono, è una matematica che i ragazzi hanno l'impressione — ma non si tratta solo di un'impressione! — di costruire con le loro mani, e che, quindi, non può essere dimenticata. E' una

matematica che non invecchia, e il ragazzo, futuro cittadino, sarà sempre pronto, un domani, a valersene per altri problemi che interessano la scienza pura o le applicazioni. Perché, se la cultura matematica non è imposta ma è costruita assieme agli allievi, tale cultura sarà valida anche per l'uomo di domani.

Voglio ora terminare con il leggervi una pagina umoristica che a José piaceva moltissimo, perché — diceva — rispecchia davvero la realtà del nostro insegnamento. E' una pagina scritta alla fine del secolo scorso da Aristide Gabelli, un pedagogista italiano:

«Raccontano che una volta venne da un'Accademia bandito un premio a chi avesse saputo trovar le ragioni, per le quali un pesce morto pesa più di un pesce vivo. Naturalmente per un'indagine, che supponeva la conoscenza de' più riposti secreti della natura, il premio non era piccolo, e riuscì straordinario il numero di coloro, che con lunghi ragionamenti, movendo da principi ineccepibili e traendone logicamente le più lontane conseguenze, dimostrarono fino all'evidenza le cause di questo fenomeno. Chi si appigliò all'anima o agli spiriti vitali che, come farebbe una vescichetta entro un corpo immerso nell'acqua, alleggeriscono la materia, chi al moto che, per via dell'attrito coll'atmosfera, fa nascere una certa sospensione, chi insomma ad un perché, chi ad un altro, secondo la filosofia che professava circa le cose naturali. Uno solo, un uomo, si capisce, un po' grossolano e di poca fede, prima di cominciare a infilar sillogismi, s'avvisò di mettere sulla bilancia un pesce vivo, poi, avendolo ucciso, ve lo rimise morto, e trovò che vivo e morto pesava egualmente. — Accrescere di mano in mano il numero di coloro, ai quali venga in testa di pesare il pesce, innanzi di darsi a credere, nonché a dimostrare, che morto pesi più che non vivo, è il fine principale dell'istruzione».

E' passato un secolo, e bisogna riconoscere che molta strada è stata fatta; ma molta ce n'è ancora da fare. «Dobbiamo adoperarci — diceva José Silva alla fine di questa lettura — perché ad ogni ragazzo di città e di campagna sia data la possibilità di pesare il suo pesce!»

Oggi, negli anni '80, sento che sempre più ci dobbiamo ispirare a queste sue idee.