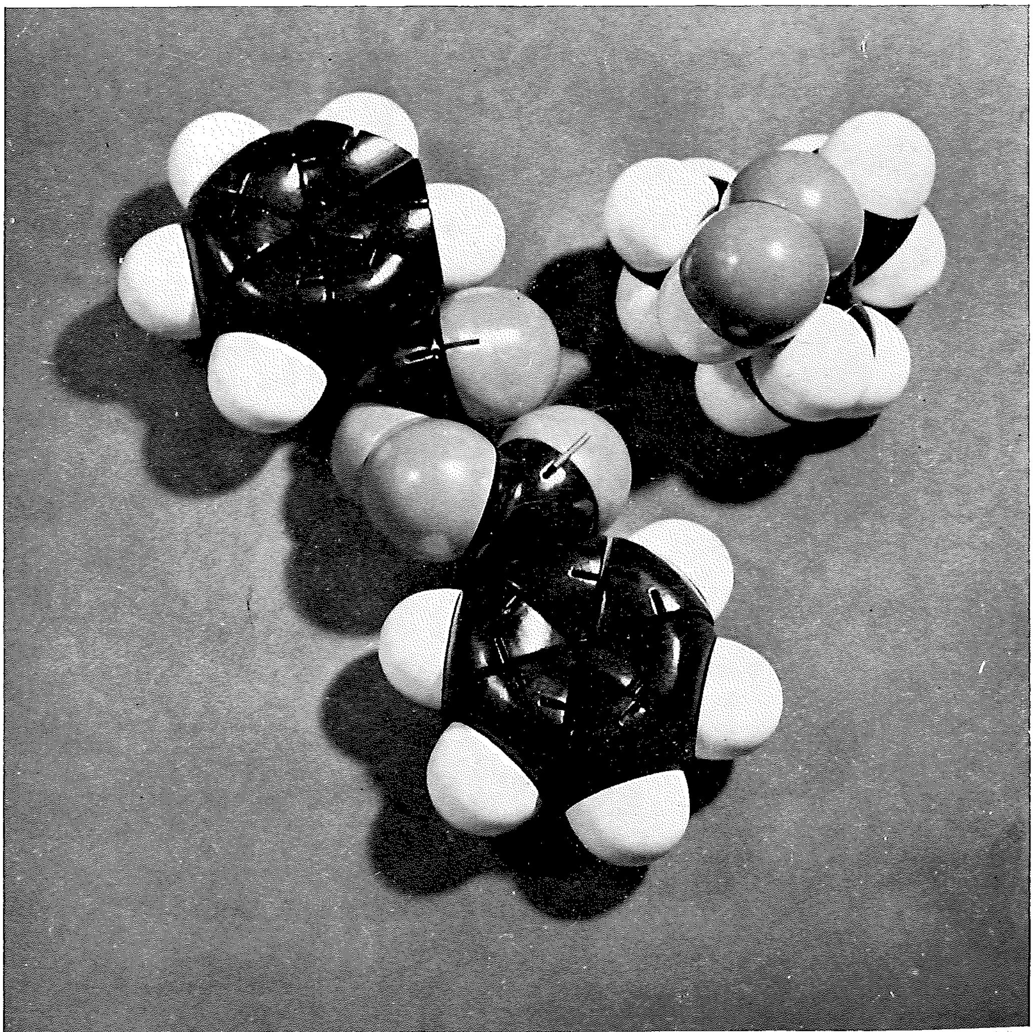
novembre-décembre 1959

l'enseignement des sciences

tome I - numéro 3

revue d'action et de culture paraissant cinq fois par an



« *Vous n'avez rien compris à ma simplicité.* » Verlaine *(Child Wife)*

les bases intuitives de l'axiomatique en géométrie

les élémens de géométrie de A.-C. Clairaut

EMMA CASTELNUOVO

Professeur à la Scuola Media Tasso, à Rome,

L'article de Mademoiselle Castelnuovo était complètement écrit lorsque nous avons publié celui de Monsieur Jeronnez. Nous n'y avons cependant rien changé. Si les deux articles se rejoignent pour montrer qu'il y a une étape indispensable avant l'étude de la géométrie déductive, la présente étude complète celle de notre premier numéro. Partant d'une analyse critique des *Élémens* de Clairaut, présentant des idées originales sur la préhistoire de la géométrie, notre Collègue a le mérite de bien mettre en valeur l'aspect actuel de cette réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Pour situer le travail de Mademoiselle Castelnuovo, rappelons que son manuel de géométrie intuitive, paru en 1948, va connaître prochainement sa 3e édition.

DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Un collègue mathématicien, qui donne à l'école toute son intelligence et son activité, vient de m'écrire : « J'ai lu avec le plus grand intérêt le volume *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* (*). J'ai été fort impressionné de la richesse de vues originales en psychologie, en pédagogie et particulièrement en didactique mathématique, et du nombre énorme de suggestions heureuses dans tout le champ de l'enseignement de notre matière. En lisant ces pages, on arriverait à la conclusion que nos ancêtres n'ont rien fait, qu'auparavant, le problème était peut-être mal posé... et, pourtant, combien de grands mathématiciens se sont occupés de l'enseignement de cette discipline dans les lycées et quelle riche littérature n'avons-nous pas sur se sujet! On a tellement travaillé; est-il vrai que tout ce travail soit mort? Il est naturel, mais assez triste, de penser que dans un siècle nos collègues de l'an deux mille feront les mêmes observations sur nos travaux. A cette époque, nos efforts, qui aujourd'hui nous paraissent énormes, la petite fenêtre ouverte sur une pédagogie moderne des mathématiques qui à nos yeux semble grande ouverte, tous ces succès qui font notre joie de chaque jour, seront-ils envisagés par nos descendants comme des jeux d'enfants, choses sans importance, tout à fait dépassées et, encore pire, presque risibles? »

Non, ami et cher collègue, je ne peux citer plus longuement votre lettre où vous avez écrit bien des choses exactes et intéressantes! Mais il n'est pas vrai que tout le travail sur la didactique mathématique soit destiné à mourir! En fouillant les anciens ouvrages de mathématiques consacrés aux débutants, un livre a frappé depuis longtemps mon imagination, car j'y ai trouvé des vues générales bien plus modernes que celles qu'on rencontre dans la plupart des manuels d'aujourd'hui. C'est de ce livre que je vais parler.

A PROPOS D'UN ANCIEN OUVRAGE DE GÉOMÉTRIE

En 1741, un grand mathématicien, qui fut aussi astronome et géodésien, A.-C. CLAIRAUT, eut l'occasion d'écrire un petit ouvrage didactique : les *Élémens de géométrie.* Il s'agissait d'un livre destiné aux débutants et qui pouvait être considéré comme préparatoire à l'étude des Éléments d'Euclide. Un manuel qui, à son époque, n'eut pas un grand succès; voici ce que Voltaire en écrivait : « M. Clairaut imagina de faire apprendre facilement aux jeunes gens les éléments de la Géométrie; il voulut remonter à la source, et suivre la marche de nos découvertes et des besoins qui les ont produites. Cette méthode paraît agréable et utile, mais elle n'a pas été suivie; elle exige chez le maître une flexibilité d'esprit qui sait se proportionner, et un agrément rare dans ceux qui suivent la routine de leur profession. »

Voltaire avait bien prévu l'échec de cet ouvrage chez les maîtres de son siècle et même des siècles suivants, mais il ne pouvait penser au sort singulier qui fut réservé à ce livre, plus de cent ans après, lorsqu'il fut introduit comme manuel d'arpentage dans les écoles techniques de quelques pays. Son auteur, au contraire, avait bien prévu cette incompréhension de la part des professeurs : « Comme j'ai choisi, — dit-il dans sa préface —, la mesure des terrains pour intéresser les Commençans, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Élémens avec les traités ordinaires d'Arpentage? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne considéreront pas que la mesure des terrains n'est point le véritable objet de ce livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques. »
C'est seulement aujourd'hui, après plus de deux siècles, que ce livre et les intentions de l'auteur sont compris et appréciés. Nombre de nos contemporains, des Français aux Anglais, des Belges aux Espagnols, aux Italiens... prennent cet ouvrage pour enseigne d'une méthode didactique. *Au pays de Clairaut*, pourrait-on dire. pour désigner cet enseignement intuitif de la géométrie qui devrait être celui que l'on réserve aux enfants de 11 à 13 ans.

Ce manuel n'est donc pas mort avec son auteur et son époque! Une étude critique de ce livre est intéressante, non seulement du point de vue historique, mais aussi dans le but de développer certaines idées didactiques qui,— à notre avis —, peuvent être de grande utilité pour un premier enseignement de géométrie. C'est ce que nous proposons de faire dans les pages qui suivent.

* *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*, volume publié par les soins de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (C.I.E.A.E.M.). Éditeurs Delachaux et Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1958.

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES SELON L'INTERPRÉTATION DE A.-C. CLAIRAUT

« J'ai pensé, — dit l'auteur dans sa préface —, que cette Science (la géométrie), comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des Commençans, puisque c'étaient des Commençans qui les avaient faits. Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie... La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie... »

Le livre de Clairaut s'ouvre dans cette atmosphère. On se trouve plongés dans une *situation mathématique*, pour employer un terme moderne qui est très bien approprié à ce cas : on doit, on a besoin de calculer l'aire d'un champ polygonal. De ce problème complexe, on descend petit à petit à des problèmes plus simples en partageant le polygone en triangles. On passe donc du complexe au simple, du global aux éléments : la méthode est analytique dans le même sens qu'on emploie cet adjectif en parlant de la pédagogie decrolyenne.

Mais, lorsqu'on a l'impression d'avoir tout résolu par des théorèmes d'équivalence, une nouvelle question surgit et l'on se trouve spontanément amené à considérer les polygones égaux : si dans l'intérieur du champ donné il y a un obstacle (tel qu'un lac, une construction, etc...), le partage du polygone en triangles peut en effet être impossible. L'idée de construire un polygone égal au champ donné dans une esplanade libre d'obstacles naît alors de façon naturelle.

Cependant, quelquefois, ce moyen de résolution lui-même est impraticable : en effet, il peut arriver qu'on ne puisse pas reproduire un champ égal au champ donné faute de disposer d'une esplanade assez vaste. Alors, une autre idée vient à l'esprit : le reproduire *en petit*. L'étude des figures semblables se rattache naturellement aux études précédentes.

Les chapitres principaux de la géométrie plane, — *équivalence, égalité, similitude* —, sont ainsi reliés l'un à l'autre par une ligne qui — selon Clairaut — pourrait bien être celle suivie par l'humanité poussée par les besoins à la recherche des lois mathématiques.

LA SIGNIFICATION DE LA LIGNE DES « ÉLÉMENS » DE CLAIRAUT

On peut dire que la ligne suivie dans les « Élémens » n'est pas déductive dans le sens qu'on accorde en général à ce terme; mais la connexion qu'on trouve entre un chapitre et le suivant, la nécessité qui impose le passage d'un sujet à l'autre donnent à l'ouvrage un caractère déductif dans le sens le plus large du mot.

On y suit la *méthode constructive*, car c'est le travail même de l'humanité qu'on est conduit à revivre. A juste titre, on peut considérer cet ouvrage comme un manuel de géométrie intuitive si l'on accorde au mot intuition un sens constructif, signification que ce terme a prise depuis Rousseau et surtout depuis Pestalozzi, et non le sens contemplatif, platonicien, qu'on lui donne en se limitant à l'origine étymologique du verbe *intueri* (*intueri* = regarder dedans, regarder avec attention).

La géométrie de Clairaut est donc une géométrie intuitive dans le sens constructif. L'auteur nous guide dans un voyage à travers une « histoire sociale des mathématiques », où, évidemment, chaque situation dans laquelle on se trouve est à l'origine une situation concrète.

LE RECOURS AU CONCRET DANS LES « ÉLÉMENS »

Il est intéressant d'étudier la signification que notre auteur donne au recours au concret et au passage du concret à l'abstrait. Il ne s'agit jamais dans le livre en question de manipuler un matériel, mais de réfléchir à une expérience dont on a entendu parler ou qu'on a vu faire, ou bien qu'on se propose de réaliser : ni la main du maître, ni celle de l'élève ne touchent rien, sinon les instruments de dessin.

Le dessin sert à l'auteur pour présenter telle ou telle figure et, par conséquent, pour dégager une définition à partir de la construction graphique. Présentées de cette façon, les figures de Clairaut sont toujours immobiles et l'une ne se rattache à l'autre que par l'observation statique de quelque propriété qu'elles ont en commun, tout à fait comme cela se trouve dans les Éléments d'Euclide.

Par ailleurs, la fonction formatrice du mouvement est bien reconnue par l'auteur, lorsque, par exemple, il nous conduit à construire des parallélépipèdes : « Nous donnerons la formation suivante du parallélépipède, qui est plus utile à considérer que toutes les autres, — dit-il —. Si on conçoit qu'un carré ou rectangle... se meuve parallèlement à lui-même..., ce rectangle, par le mouvement que nous venons de décrire, formera le parallélépipède. » Dans ce passage, Clairaut se rapproche des idées exprimées par Newton quelques dizaines d'années auparavant (1704) dans son *Tractatus de quadratura curvarum :* « Les lignes seront décrites et par là engendrées, non pas par addition de parties, mais par un mouvement continu de points, les surfaces par un mouvement de lignes, les solides par un mouvement de surfaces. » De cette façon, Clairaut introduit un procédé d'analyse dans un traité de géométrie élémentaire.

Dans le même ordre d'idées, un autre passage des *Élémens* souligne et montre encore une fois comment notre auteur veut se détacher de la routine classique du traité euclidien : c'est lorsqu'il réunit les différents cas d'un théorème dans une seule démonstration.

Clairaut, en utilisant le principe de continuité dans le sens qui sera ensuite précisé par Poncelet, donne une seule démonstration du théorème : « Les angles inscrits à la circonférence interceptant la même corde sont égaux », incluant également dans cet énoncé l'angle formé par la corde et la tangente. Le soin avec lequel l'auteur introduit des raisonnements « à la limite » est vraiment émouvant : « Quoique cette démonstration, — dit-il —, soit peut-être un peu abstraite pour les Commençans, j'ai cru à propos de la donner, parce qu'il sera très utile à ceux qui voudront pousser leurs études jusqu'à la Géométrie de l'infini, de s'être accoutumés de bonne heure à de pareilles considérations. Si cependant les Commençans trouvaient cette démonstration au-dessus de leurs forces, il est aisé de les mettre à la portée d'en découvrir une autre... »

Ces quelques exemples mettent en lumière l'importance que Clairaut donne au mouvement. Cependant, on remarque que le passage du concret à l'abstrait n'est pas encore très clair du point de vue pédagogique : il arrive souvent, en feuilletant ce livre, de trouver des brusques changements d'idées, des sautes du concret à l'abstrait, des considérations tout à fait pratiques, trop tôt suivies par des raisonnements théoriques.

LA NAISSANCE DES FIGURES GÉOMÉTRIQUES. LA PRÉHISTOIRE

Nous avons remarqué que les figures géométriques sont introduites dans le livre de Clairaut par le dessin. Cette présentation est nettement en contraste avec la ligne des *Élémens* où, — nous l'avons vu —, l'on suit le développement historique.

Clairaut accorde comme origine de la géométrie la théorie de l'équivalence, ce problème de détermination de l'aire des champs que la légende a attribué à l'Égypte. Or, si l'on veut suivre le même ordre d'idées, on doit remonter encore plus haut à la recherche des précurseurs de la géométrie, car un dessin d'une figure géométrique marque déjà une connaissance de la matière. Paraphrasant ce que Georges Braque dit à propos de l'art, nous pensons que, dans l'évocation de l'histoire des mathématiques, « il ne faut pas commencer par la fleur, mais par la racine ». Il faut donc pousser dans le cours de l'histoire bien plus loin que ne l'avait fait Clairaut, il faut franchir la frontière de l'histoire pour atteindre la préhistoire.

On sait que les premières manifestations artistiques se trouvent dans les grottes de l'époque paléolithique. Or, chose intéressante, nous n'y trouvons jamais de dessins géométriques : les peintures et les fresques des grottes représentent des choses de la vie de chaque jour, des scènes de chasse, des animaux qui courent...; on a voulu mettre en évidence dans toutes ces figures, les organes, l'intérieur d'une forme. Pour trouver des dessins stylisés, représentés seulement par quelques traits, et par conséquent plus proches des dessins géométriques, il faut arriver à l'époque suivante, la néolithique : l'époque au cours de laquelle les hommes, sortis des cavernes, le climat étant plus doux, abandonnèrent la chasse pour se donner à l'élevage du bétail et à l'agriculture. Au changement de style dans les manifestations artistiques, d'une époque à l'autre, on a attribué différentes raisons : on a dit par exemple que le paysan néolithique n'ayant plus besoin d'exercer les sens utiles au chasseur, perdait peu à peu la capacité de saisir les particularités d'un objet pour acquérir d'autres aptitudes, telles que la tendance à l'abstraction et à la pensée rationnelle. Sans entrer dans le champ de la critique d'art, nous pensons que, si on doit attribuer une raison aux différentes occupations et préoccupations, un facteur déterminant dans le changement de style est sans doute dû au fait que les hommes, une fois les cavernes abandonnées, eurent besoin de construire des habitations et des outils. Or, c'est juste la construction d'un objet qui porte à une analyse beaucoup plus profonde que la seule observation du même objet fait par autrui. La construction, en effet, suppose d'abord la connaissance (et la reconnaissance) des éléments fondamentaux de l'objet, ceux dont on ne peut pas se passer; elle fait comprendre que tous les éléments d'un objet n'ont pas la même valeur. Une telle constatation conduit à cette mentalité, qu'on peut considérer comme caractéristique de l'homme plus évolué, qui porte à représenter un tout seulement par quelque trait, à styliser.

Tout ce discours qui semble bien loin du champ des mathématiques veut conduire à la conclusion que les premières figures géométriques ne peuvent pas être nées à une époque, celle du paléolithique, où l'on ne bâtissait pas; le fait qu'elles apparaissent au cours de l'époque suivante, la néolithique, est donc bien justifié. Encore peut-on remarquer, d'après l'étude des inscriptions de l'époque, qu'elles ne procèdent pas d'un point de vue abstrait, mais que ce sont des images des constructions que l'homme avait bâties : on trouve

(Extrait de *La vie et les œuvres de Clairaut*, P. Brunet, P.U.F.)

le triangle comme image d'une ferme (au sens des charpentiers), comme soutènement du toit d'une cabane à base rectangulaire, le cercle comme image d'une roue...

Le dessin géométrique est donc venu après la construction matérielle d'un objet et comme image d'une telle construction. Alors, si l'on veut suivre le développement historique, le cours de Clairaut doit être précédé d'un chapitre sur la manipulation d'un matériel, manipulation qui conduira à refaire ces tentatives de construction qu'on a faites aux premières heures de l'humanité et qui, peu à peu, amèneront à fixer graphiquement les images. La manipulation de trois barres de meccano, par exemple, conduira l'enfant à découvrir tout seul la propriété caractéristique de cette figure, l'*indéformabilité*, et à se rendre compte de la propriété qu'*on peut construire un triangle seulement si tout côté est plus petit que la somme des autres.*

VERS UNE NOUVELLE CONCEPTION DE LA « BASE CONCRÈTE »

Je prends l'occasion de cette étude critique du livre de Clairaut pour exposer quelques idées sur la signification donnée par la didactique moderne au recours au concret dans le but de montrer pourquoi une manipulation effective d'un matériel mobile, — ce qui manque dans les *Élémens* —, facilite le passage du concret à l'abstrait. Je commencerai par un exemple tout simple, qui pourra peut-être rendre plus clair mon expose et mettra en lumière les significations différentes qu'on peut donner à la « base concrète ».

On veut étudier le *carré*. On pourra faire découper des carrés en papier, faire mesurer côtés et diagonales, faire citer par les élèves des objets qui ont la forme de carrés, faire observer les faces d'un cube...; on pourra faire dessiner un carré par la règle et le compas. On pourra encore faire comparer le carré avec d'autres quadrilatères, en insistant sur les caractères distincts et sur ceux qui sont communs à ces figures. De toutes ces expériences, l'élève sera conduit à donner tout seul une définition. Mais une définition qui provienne de ses expériences exige une quantité d'observations comparatives et une faculté d'abstraction qui permette de saisir la propriété commune. C'est une opération mentale qu'un enfant âgé de 11 ou 12 ans n'est pas à même de faire.

Nous allons maintenant montrer qu'à notre avis ce passage du concret à l'abstrait est rendu plus facile par des expériences comparatives, non pas entre un nombre fini de figures, mais entre un nombre infini, un continu. Voici comment l'on pourrait conduire l'étude du carré : on donne à l'enfant des barres égales et des vis (comme celles du meccano) et on lui dit de construire un carré. Dès qu'il aura fait cette construction, il s'apercevra tout seul que la figure qu'il a dans les mains peut s'articuler, qu'elle peut se transformer en losange. Cette transformation est fort suggestive : l'élève se rend compte que le carré est un losange particulier, qu'il fait partie de la famille des losanges. Parmi les éléments qui ne changent pas et ceux qui changent dans le passage d'une figure à l'autre, on pourra porter son attention sur la constance de la somme des angles, sur la variation d'aire, sur la variation de la somme des diagonales. L'enfant aura l'intuition de la constance ou de la variabilité d'une fonction à travers l'observation des cas à la limite, c'est-à-dire des cas dans lesquels le losange tend vers un segment (deux de ses angles tendent vers zéro) et le matériel (le losange duquel on était parti) tend à se dématérialiser.

Voici donc que, tout en partant du concret, on peut suivre différentes méthodologies; la méthode que nous avons présentée en dernier met en relief la valeur heuristique et formatrice d'un matériel mobile par continuité : les caractéristiques de chaque figure sont mises en évidence par une opération sur la figure, c'est-à-dire par un processus réel, non pas par la simple observation de l'objet. Et c'est la figure mobile par continuité qui conduit spontanément à la possibilité d'une classification et de là à une définition. Le concret, où les axiomes auront leurs bases bien enracinées, ne sera pas seulement une réflexion sur une expérience (par exemple la détermination de l'aire d'un champ), ou l'observation d'un modèle fixe, ou encore le dessin de telle ou telle figure dans le but d'une définition de cette figure à partir d'une construction graphique, mais il signifiera l'étude d'un matériel à paramètre variable et donc d'une opération. Et c'est justement cette opération sur le concret qui, conduisant plus spontanément à se détacher du matériel, facilitera ce passage du concret à l'abstrait où se marque peut-être la lacune de l'ouvrage de Clairaut.

CONCLUSION

A la fin de ces considérations, il est bon de revenir au sujet de cet article : *Qu'est-ce que la géométrie intuitive?*
Le lecteur aura compris que l'étude de la géométrie intuitive a pour but de donner des bases concrètes à la théorie axiomatique. Ces bases nous semblent indispensables; nous sommes tout à fait d'accord avec M. Destouches que « commencer un ouvrage scientifique par l'énoncé d'un système d'axiomes, c'est écrire un ouvrage dont il manque le premier volume et dont on demande à la sagacité du lecteur une reconstitution sous peine de ne pas comprendre dans sa totalité le texte qu'il a sous les yeux » *. La nécessité de ce cours préparatoire à la théorie axiomatique et déductive a été précisée pour la première fois par A.-C. Clairaut : c'est pourquoi nous avons voulu commencer par la présentation de cet ouvrage. M. Destouches a donné à toute étude préalable d'une axiomatique le nom expressif de *synthèse inductive*. Il nous semble que ce terme, rapporté à l'enseignement de la géométrie, représente et résume exactement le cadre méthodologique que nous avons proposé à la suite de l'étude des *Élémens* de Clairaut, car *synthétiser inductivement* signifie, remontant à l'étymologie, *mettre ensemble* (un certain nombre d'observations, d'expériences) dans le but de *saisir* une ou quelques propriétés communes, à savoir des éléments qui ne changent pas et des éléments qui changent selon certaines lois, « en employant, — comme dit M. Fréchet —, la méthode préconisée par Bacon, qui consiste à dégager peu à peu des régularités, des permanences approchées que nous constatons autour de nous dans une multitude de phénomènes divers, des régularités, des permanences de plus en plus générales » *. Les bases concrètes des axiomes consisteront, enfin, dans une série d'opérations, et c'est justement à travers cette activité, cette *synthèse inductive*, que l'enfant parviendra à franchir d'une façon naturelle la frontière du concret à l'abstrait.

Rome, février 1959.

* Voir « Quelques citations » dans le chapitre « Les origines des notions mathématiques » du livre : *M. Fréchet*, « Les mathématiques et le concret »; P.U.F., 1955.

la marche de l'invention

« Dans les diverses sciences, la matière et les instruments diffèrent, la marche de l'invention est la même. Mêmes essais, mêmes tâtonnements, même patience active et tendue, pour ainsi dire, vers un objet qui s'éclaire parfois, mêmes espoirs trompés, même finesse et même imagination pour saisir les analogies, les liens cachés, les rapports inattendus .. »

De qui sont ces paroles lucides sur la méthode dans les sciences? Quel esprit a pu se permettre un tel rapprochement entre sciences diverses, entre découvertes récentes ou anciennes?
Les trois premiers lecteurs qui reconnaîtront cet auteur, gagneront un abonnement d'un an à L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES. Le timbre de la poste fera foi.