EMMA CASTELNUOVO, DANIELA ET CLAUDIO GORI-GIORGI

LE LANCEMENT DES PROJECTILES

Le sujet "le lancement des projectiles" a été developpé cette année pendant un mois et demi dans deux classes d'enfants de 13–14 ans. Ce sont des élèves d'une "Scuola Media" de Rome et c'est Emma qui est leur professeur de mathématique.

1. LA GÉOMÉTRIE "DE BASE"

Avant de parler du développement de ce sujet, il est bon de dire quelque chose sur les connaissances et la sensibilité mathématique de ces enfants. Emma les avait reçus en 1ère classe (11 ans): ils venaient de l'école élémentaire et ils avaient une vision assez statique de la géométrie. Pour cette raison ils ont été fort étonnés en se trouvant en face de figures qu'ils pouvaient articuler, déformer, transformer (telles qu'un carré articulé ou un rectangle dont les diagonales, réalisées au moyen de barres, pivotent autour de leur point d'intersection) et qui, à cause de leur mobilté, les conduisaient à de gros problèmes de cas limites, de maximum ou de minimum, d'invariants. Problèmes qui, repris plusieurs fois au cours des trois ans de l'école moyenne à propos de questions les plus variées, les avaient conduits à entrer toujours plus profondement dans la notion de fonction (Castelnuovo, 1979; Castelnuovo et Barra, 1976).

C'est toujours dans le même esprit d'une géométrie dynamique que, à partir de la première classe, on avait introduit les coniques: l'ellipse à partir des triangles de base et périmètre constants; l'hyperbole à partir des rectangles équivalents; la parabole à partir du problème de la variation de l'aire du carré en fonction de la longueur du côté. En sus le sujet "coniques" a toujours accompagné les élèves pendant les trois ans soit du point de vue géométrique soit sous l'aspect analytique.

De la parabole (conique qu'il nous semblait intéressant de développer particulièrement à cause de son application au lancement des corps), les enfants s'étaient rendu compte, à partir du cas $y = x^2$ (Figure 1), de la signification concrète du cas $y = ax^2$, avec a positif ou négatif selon la concavité (Figure.2). La représentation graphique, comprise d'une façon dynamique, a éclairci la signification de $y = ax^2 + c$, où chaque point a subi une translation de c en direction de l'axe (Figure 3). Une fois ce cas résolu, les élèves, eux-mêmes, se

Educational Studies in Mathematics **10** (1979) 147–159. 0013–1954/79/0102–0147/$01.30

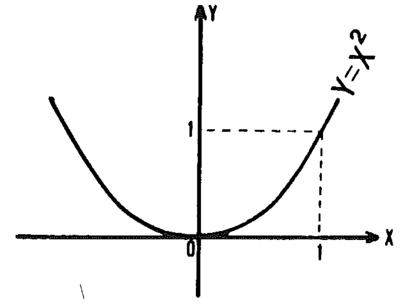

Fig. 1.

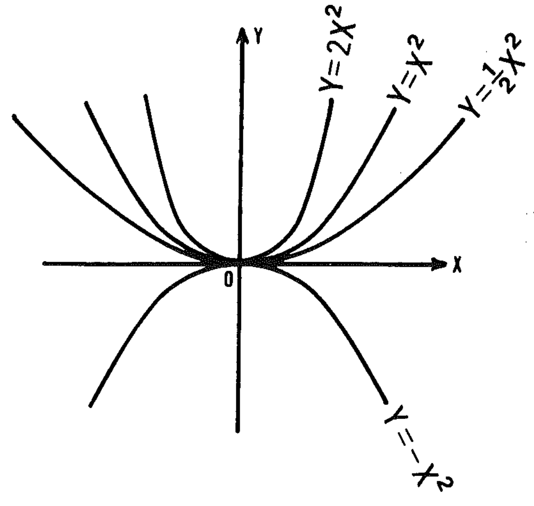

Fig. 2.

sont demandé ce qui arrive à l'équation $y = x^2$ si, en plus d'une translation de direction y, les points subissent une translation de direction x (Figure 4).

On voit que les points se déplacent alors par la règle du parallélogramme. Par conséquent, si le point $P(x,y)$ de la parabole $y = x^2$ va en $P'(x', y')$, son ordonnée reste la même tandis que son abscisse est l'ancienne abscisse augmentée de b. Cette observation nous conduit à écrire

$$y = (x - b)^2,$$

c'est-à-dire

$$y = x^2 - 2bx + b^2$$

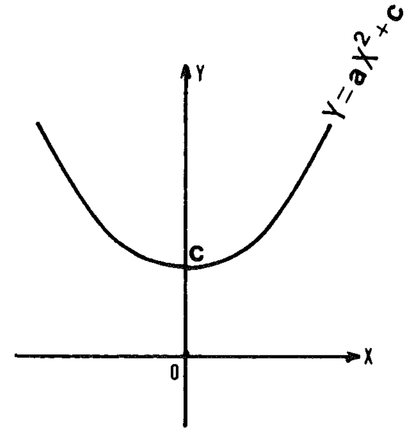

Fig. 3.

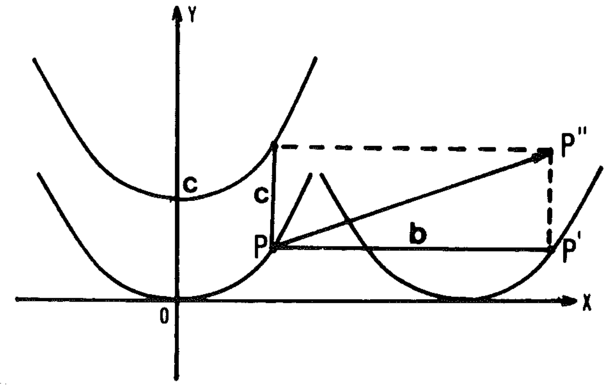

Fig. 4.

Pourtant, l'équation d'une parabole passant par l'origine et avec axe parallèle à l'axe des y sera

$$y = ax^2 + bx.$$

Ce développement a été fait assez rapidement bien que les élèves connussent trés peu du calcul littéral. Mais ils étaient fort motivés: ils voulaient arriver à se rendre compte du lancement des projectiles.

C'est justement à cause de la difficulté du calcul littéral qu'on est vite passé à la partie physique, sûr que la motivation concrète aiderait à surmonter les obstacles algébriques.

2. LE LANCEMENT D'UN CORPS. LA TRAJECTOIRE

On a commencé en montrant aux élèves une gravure du Moyen Age représentant le lancement de projectiles fait par un canon (Figure 5). La trajectoire est clairement indiquée: la balle monte en ligne droite et, arrivée à une certaine hauteur, retombe verticalement.

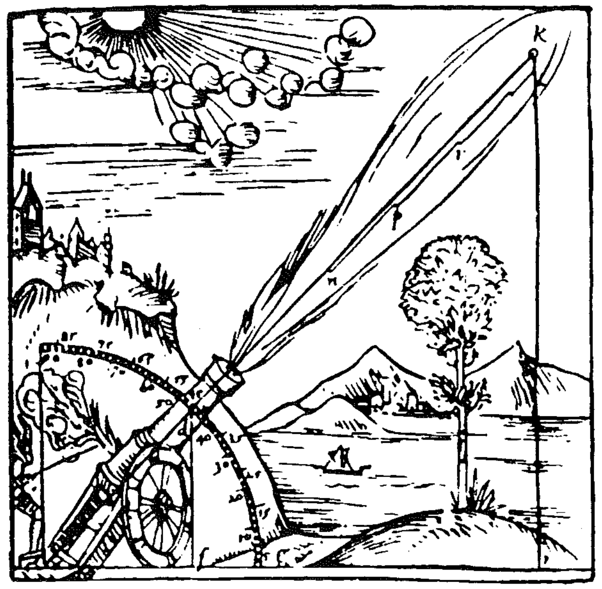

Fig. 5.

Les élèves ont été vraiment frappés du fait que les phènomènes les plus naturels que nous avons tous les jours sous nos yeux – la chute des graves et le lancement des corps – ont dû attendre jusqu'au 17ème siècle pour être éclaircis. Encore un siècle avant Galilée (Galilei, 1958), le mathématicien Nicolò Tartaglia, bien connu pour la résolution des équations algébriques mais aussi pour ses travaux de balistique, soutenait que la trajectoire d'une balle lancée d'un canon était formée d'un trait de ligne droite qui montait, et, en descendant, d'un petit arc de cercle et finalement d'une trait vertical. C'est seulement à l'époque de la Rénaissance que les hommes ont commencé à mieux voir, c'est-à-dire à expérimenter et mathématiser.

Les élèves connaissaient déjà la loi de la chute des corps

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2$$

où s représente l'espace parcouru dans un temps t et g est l'accélération de gravité.*

Pour étudier le lancement d'un corps on a divisé l'étude en deux parties: (1) lancement en vertical; (2) lancement en oblique. On a suivi la voie classique (Levi-Civita, Amaldi, 1923; Marion, 1971; Resnick, Halliday, 1966). Pour le premier cas il a été facile d'écrire la loi du mouvement: à cause de la vitesse initiale, s'il n'y avait pas l'accélération g, le corps se déplacerait d'après la loi du mouvement uniforme; mais il y a g, et on a vu toute à l'heure son effet.

On a donc:

$$s = vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Pour le lancement en oblique, on a décomposé la vitesse initiale v en deux composantes, horizontale v_x et verticale v_y (Figure 6).

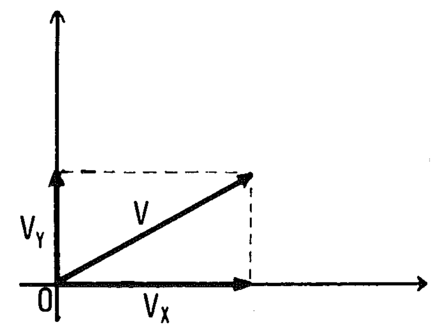

Fig. 6.

On a donc, sur le plan cartésien les deux équations

(a) $x = v_x \,.\, t$

(b) $y = v_y \,.\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$

Or, à chaque instant, les (a) et (b) se vérifient simultanément; les élèves se sont rendu compte de la signification concrète de la phrase "éliminer la variable t". On a

$$t = \frac{x}{v_x}$$

* Si cette loi n'est pas connue par les élèves, on peut la faire découvrir de façons différentes:
– suivant la voie expérimentale;
– par des considérations sur la vitesse moyenne;
– au moyen de l'analyse dimensionnelle, méthode de grand intérét didactique et scientifique (Bridgman, 1922; Huntley, 1952).

et donc

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2 + \frac{v_y}{v_x}x.$$

On a bien réfléchi sur cette équation: g est constant, et v_x et v_y sont des nombres. La réaction des élèves a été immédiate: il s'agit de l'équation d'une parabole! Encore une fois ils sont frappés de la force de la mathématique: c'est en effet l'équation qui nous assure que la trajectoire est une parabole. On se rappelle alors les gravures du Moyen Age et l'hypothèse drôle du mathématicien Tartaglia.

3. UN EXEMPLE NUMÉRIQUE ET . . . UNE DÉCOUVERTE SUR LA PORTÉE

Voici un exemple: un canon imprime à la balle une vitesse de $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. L'inclinaison du canon par rapport à l'horizontale peut changer, ce qui veut dire qu'on change les composantes v_x et v_y. On prend par exemple

$$v_x = 300 \quad \text{et} \quad v_y = 400,$$

et on est sûr par le théorème de Pythagore que ces composantes correspondent à une résultante égale à 500.

On a écrit 3 et 4 à la place de 300 et 400, et 10 à la place de 9, 8, valeur de g. Voici l'équation:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{10}{3^2}x^2 + \frac{4}{3}x$$

c'est-à-dire

$$y = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{3}x.$$

Il faut maintenant dessiner cette parabole. On se demande: à quelle distance du canon, placé en O, retombe la balle? On regarde bien la figure (Figure 7): la balle retombe au sol en A, lorsque son hauteur y est égale à zero. Pour avoir la distance OA, qu'on appelle la portée, il faut donc imposer à y d'être nul, c'est-à-dire on doit avoir

$$-\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{3}x = 0.$$

On voit bien, toujours à partir du dessin, qu'il y a deux solutions: l'origine et le point A pour lequel

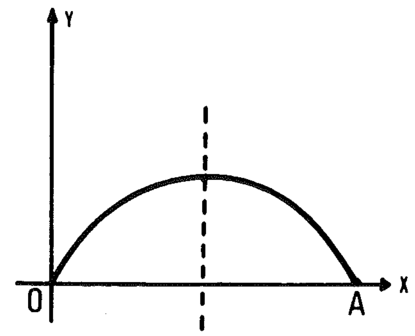

Fig. 7.

$$-\frac{5}{9}x + \frac{4}{3} = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{12}{5} = 2,4.$$

Il est évident que l'axe de la parabole sera

$$x = -\frac{6}{5} = 1,2.$$

Connaissant l'abscisse c'est facile de trouver l'ordonnée du sommet:

$$y = -\frac{5}{9}\frac{36}{25} + \frac{4}{3}\frac{6}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Il faut bien souligner que c'est l'intérêt pour le problème physique qui a permis aux élèves de surmonter les difficultés algébriques.

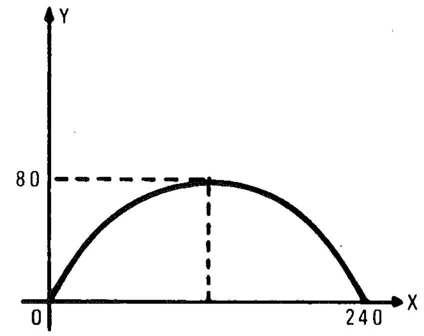

Fig. 8.

Maintenant on est à même de dessiner (Figure 8) la parabole avec précision. On revient à la réalité:

on pense "en mètres":

portée = 240 m; hauteur maximale = 80 m.

A ce point on a proposé d'échanger v_x avec v_y, c'est-à-dire de prendre

$$v_x = 4 \quad \text{et} \quad v_y = 3.$$

La réaction a été immédiate: "cette fois – c'est évident – la portée sera plus grande".

On a fait les calculs. Résultat: même portée. "Evidemment – ils ont dit – on s'est trompé dans les calculs". Mais, ils ont constaté, il n'y avait pas d'erreur.

Alors on a voulu traiter d'autres cas numériques, et chaque fois l'échange de v_x avec v_y donnait le même portée. Pourquoi? L'intuition physique n'aurait jamais prévu ce résultat. Un des élèves a demandé si on pouvait trouver une règle générale pour la portée. On a pensé qu'on pouvait procéder de la même façon sans mettre des nombres à la place de v_x et de v_y. On a travaillé ensemble: une expérience formidable! Tout le monde voulait suivre, voulait comprendre: on a posé $y = 0$ et on a eu l'origine et le point A pour lequel

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x + \frac{v_y}{v_x} = 0$$

d'où

$$x = \frac{2v_x v_y}{g}.$$

Maintenant on se rend compte pourquoi la portée ne change pas lorsqu'on échange v_x avec v_y. Et – réaction de tous les élèves: "mais, $v_x v_y$ est l'aire du rectangle dont la diagonale est v" (Figure 9).

Ils regardent le dessin, ils refléchissent, et "il s'agit du quart de 'notre' rectangle construit avec des barres de mécano!" (Figures 10 et 11).

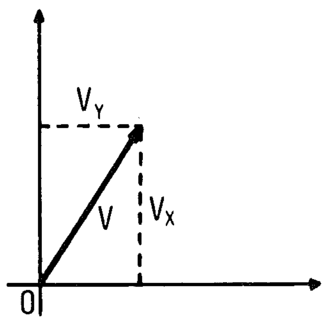

Fig. 9.

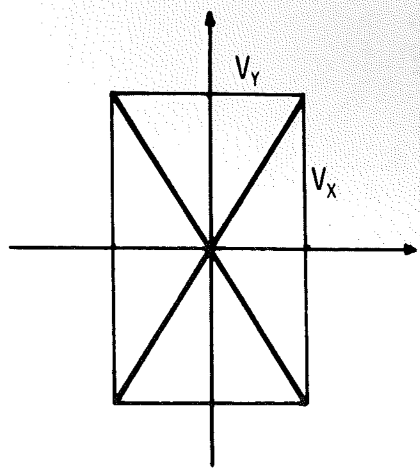

Fig. 10.

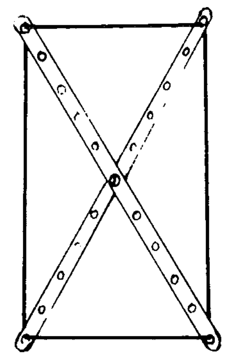

Fig. 11.

Conséquence immédiate: "l'aire est maximale dans le cas d'un carré, c'est-à-dire si les diagonales sont perpendiculaires, et donc si le canon forme avec l'horizontale un angle de 45°". L'un a impliqué l'autre: ils étaient fort excités, ils avaient l'impression d'une découverte faite sans l'aide de personne. L'excitation était une conséquence du fait que, au moyen de la géométrie, ils avaient découvert des propriétés étrangères à l'intuition physique.

On a poussé l'étude encore plus loin, toujours aidé par "notre" rectangle avec les diagonales réalisées en mécano: si $v_x = v_y$, c'est-à-dire dans le cas du carré, l'aire est donnée par

$$\frac{vv}{2} = \frac{v^2}{2}.$$

On a alors:

$$x_{\max} = \frac{2(v^2/2)}{g} = \frac{v^2}{g}.$$

Dans le cas numérique de tout à l'heure on avait $v = 5$ et donc la portée maximale sera

$$x_{\max} = \frac{25}{g} = \frac{25}{10} = 2,5.$$

Donc, si la vitesse imprimée par le canon est de $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, la plus grande portée qu'on peut atteindre est de 250 mètres (sans tenir compte de la résistance de l'air).

La règle de la portée permet de calculer l'ordonnée du sommet de la parabole. Dans le cas de la portée maximale on découvre que l'ordonnée du sommet est le quart de la portée.

4. DE LA PHYSIQUE À LA MATHÉMATIQUE: LA CONSTRUCTION DE LA PARABOLE

Revenons à la physique et proposons-nous de suivre la balle à tout instant.

On lance le projectile de O (Figure 12) avec la vitesse initiale v_0 (dans le dessin on a prit $v_x = 4$ et $v_y = 6$). Après la première seconde le projectile arrive en A_0.

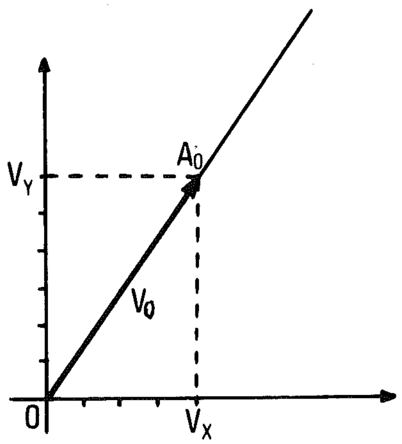

Fig. 12.

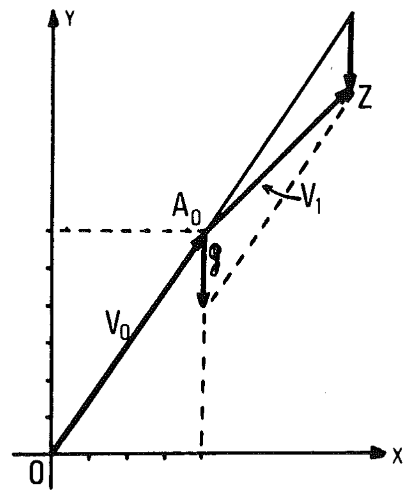

Fig. 13.

Or, s'il n'y avait pas d'accélération de gravité, le projectile continuerait dans la même direction pendant la deuxième seconde, et il se déplacerait d'autant. Mais il y a l'accélération g, représentant une vitesse dans l'unité de temps, qui agit en direction verticale: dans le dessin (Figure 13) on a indiqué ce vecteur par 2 unités. Les deux vecteurs, v_0 et g, se composent selon la règle du parallélogramme, et on obtient v_1: le projectile arrive en Z à la fin de la deuxième seconde.

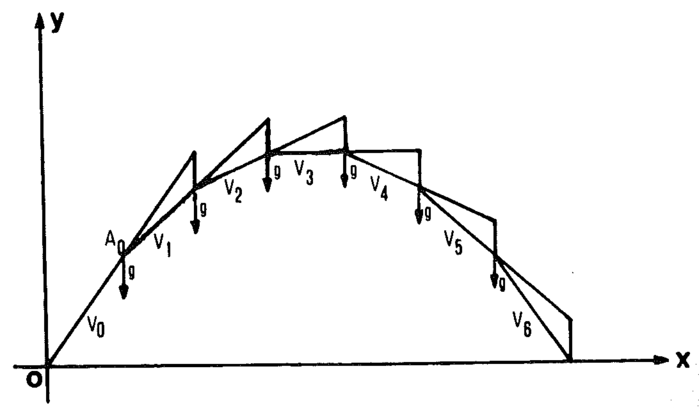

Fig. 14.

Et le discours continue: s'il n'y avait pas g, dans la troisième seconde le projectile se déplacerait en direction v_1, mais on doit composer v_1 avec g et on obtient v_2. Et ainsi de suite. Dans la Figure 14 "on voit" naître la courbe-enveloppe: c'est la parabole découverte par le moyen analytique.

Et maintenant observons la Figure 15: on a prolongé les droites $v_1, v_2, v_3, \ldots$, qui rencontrent v_0 en $A_0, A_1, A_2, \ldots$ et v_6 en $B_0, B_1, B_2, \ldots$.

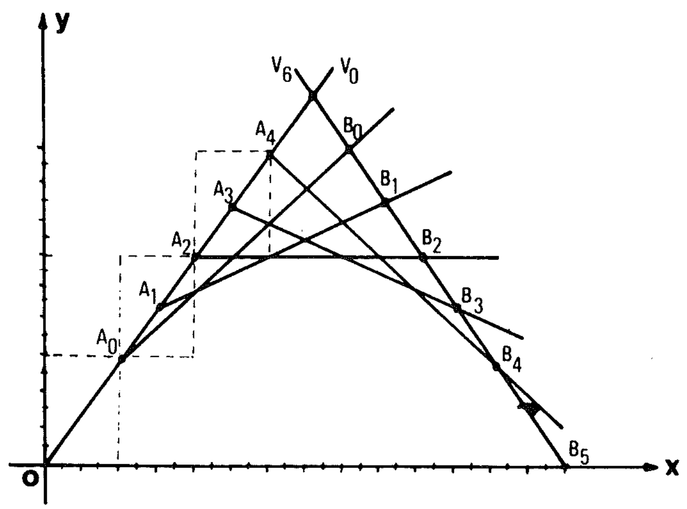

Fig. 15.

Il est facile de comprendre que les segments $A_0A_2, A_2A_4, \ldots$ sont égaux comme diagonales de rectangles égaux (de dimensions 4 et 6).

Mais de même $A_0A_1 = A_1A_2$, $A_2A_3 = A_3A_4$, ..., car $A_1, A_3, \ldots$ sont les centres de rectangles égaux (il suffit d'observer l'inclinaison des droites $v_2, v_4, \ldots$ – chose facile si le dessin est fait sur une feuille quadrillée).

On conclut que la droite v_0 est divisée en parties égales; même chose pour la droite v_6. Remarquons qu'on a joint le premier point de division d'une de ces droites avec le dernier de l'autre, le deuxième point de l'une avec l'avant-dernier de l'autre, ... et que cette construction nous a conduit à l'enveloppe d'une courbe; courbe qui est une parabole, ce qu'on sait par l'équation. On découvre ainsi – et c'est la physique qui nous a conduit à cette découverte – la construction projective de la parabole (Figure 16).

Il n'y a pas besoin de souligner la richesse de notions de mathématique et de physique que ce sujet comporte. Mais il y a, à notre avis, une chose qui est

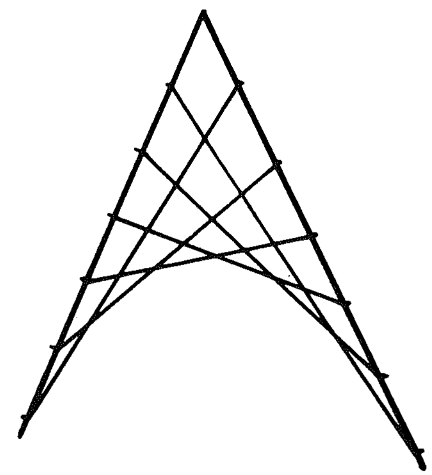

Fig. 16.

encore plus formative: on se rend compte que s'il est difficile de "bien voir en mathématique", il est parfois encore plus difficile de "bien prévoir en physique".

L'enthousiasme avec lequel tous les élèves de deux classes ont suivi ce sujet nous a poussé à y faire participer nos collègues.

BIBLIOGRAPHIE

Bridgman, P. W., *Dimensional Analysis*, New Haven, 1922.

Castelnuovo, E., *La matematica, I numeri*, La Nuova Italia Editrice, Firenze, 1979a.

Castelnuovo, E., *La matematica, La geometria*, La Nuova Italia Editrice, Firenze, 1979b.

Castelnuovo, E. and Barra, M., *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino, 1976; traduction française OCDE.

Galilei, G., *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze*, Boringhieri, Torino, 1958.

Huntley, H. E., *Dimensional Analysis*, London, 1952.

Levi-Civita, T. and Amaldi, U., *Lezioni di meccanica razionale*, Zanichelli, Bologna, 1923.

Marion, J. B., *Physics and Physical Universe*, Wiley, London, 1971.

Resnick, R. and Halliday, D., *Physics*, Wiley, London, 1966.