EMMA CASTELNUOVO

RAPPORTI FRA L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E QUELLO DELLE OSSERVAZIONI SCIENTIFICHE NELLA SCUOLA MEDIA UNIFICATA

Estratto da ARCHIMEDE - Fasc. 5, 1962

FIRENZE
CASA EDITRICE FELICE LE MONNIER
1962

RAPPORTI FRA L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E QUELLO DELLE OSSERVAZIONI SCIENTIFICHE NELLA SCUOLA MEDIA UNIFICATA (1)

Una relazione sui « Rapporti fra l'insegnamento della matematica e quello delle osservazioni scientifiche » porta al tema più largo « La matematica e il mondo che ci circonda », ossia al problema dei rapporti fra concreto ed astratto. Il tema assume luci diverse a seconda che chi ne parla è un matematico o un naturalista, e presenta suggestioni differenti a seconda che lo si inquadri in una visione storica o psicologica, punti di vista che portano, l'uno e l'altro, al problema della conoscenza.

Non ho certo l'ambizione di risolvere l'ardua questione dell'avvicinamento dei due insegnamenti, ma vorrei piuttosto prospettare su quali principî, a mio parere, si potrebbe iniziarne una discussione e uno studio.

Abbiamo due insegnamenti: un insegnamento di matematica che dovrebbe partire dal concreto per cogliere le idee generali e condurre il ragazzo all'astrazione, e un insegnamento di scienze che, tuffando il ragazzo nel mondo della natura, nel suo mondo, dovrebbe avere per scopo di abituarlo a « saper guardare ». Da una parte, dunque, c'è un professore, il matematico, che deve sempre tener presente che gli enti su cui lavora hanno le proprie radici nel concreto, dall'altra, c'è il naturalista che deve continuamente vigilare a che la sua materia non si riduca ad una superficiale ed episodica « lezione delle cose », ed avere come obiettivo quello di portare a poco a poco i ragazzi dal qualitativo al quantitativo, valendosi dell'abito mentale dato dallo studio della matematica e delle nozioni di aritmetica e geometria apprese nel corso parallelo.

Dal concreto all'astratto, dunque, e dall'astratto al concreto; ma questi due processi non debbono mai considerarsi isolatamente perchè non vi è nella scienza una via d'ascesa verso l'astrazione e un totale distacco dal concreto, e non vi è, d'altra parte, un piegare, un adattare, un offrire simboli e formule alla risoluzione di fenomeni concreti lasciando da parte le leggi del pensiero e la visione generale del fenomeno stesso. Ma vi è un costante avvicendarsi dei due passaggi; ed è proprio secondo questa via di andata e ritorno, questa continua simbiosi, che si avanza nella ricerca scientifica.

In campo didattico, dovremo dunque proporci di dare al ragazzo un'attitudine mentale, un'educazione intellettuale che miri a questi fini.

---

(1) Conferenza tenuta presso l'Istituto di Fisica (Seminario didattico) dell'Università di Bologna il 22 febbraio 1962.

Il bambino che entra nella scuola media conosce, per quanto riguarda la matematica, numeri interi e semplici figure geometriche. Permettetemi di fermarmi un momento ad analizzare come questi concetti si sono formati nella mente del fanciullo, anche allo scopo di chiarire su quali processi sensoriali e intellettuali si può basare il nostro insegnamento.

La nascita del numero. – Credo davvero che chi ha seguito dei bambini nella primissima infanzia abbia potuto notare come difficile, faticosa, per nulla spontanea, sia la costruzione del numero intero: quale lavoro intellettuale per passare da 1 a 2 e da 2 a 3! Come si formano i numeri nella mente del bambino? Come si afferra, ad esempio, il numero 3? Come è noto, le vie d'acquisizione sono due: l'una costruisce il numero 3 per iterazione dell'unità, cioè aggiungendo 1 a 1 a 1, ovvero 1 a 2. Si segue un metodo costruttivo, o, come si dice in termini pedagogici, un metodo sintetico. Secondo l'altra via, invece, si segue un processo mentale del tutto diverso: il numero 3 appare come un qualcosa di comune in gruppi di oggetti diversi. Si astrae dal contingente per cogliere, nella diversità, l'invariante: il numero 3.

Il concetto di numero si forma ora «per astrazione». Si parte da «un globale» e si analizza, confrontandolo con altri globali; questa via segue un processo analitico.

L'una e l'altra costruzione del numero hanno bisogno di determinate strutture mentali, strutture che si formano a determinate età.

I due processi, il sintetico e l'analitico, si ritrovano anche nella identificazione di *figure geometriche*. Da studi di grafiti preistorici e da osservazioni fatte presso tribù attualmente arretrate sembra ormai accertato che le figure geometriche compaiono solo dopo che necessità pratiche, fatti concreti, hanno portato alla loro costruzione. Così, per esempio, il triangolo nasce per questioni tecniche come sostegno del tetto a spioventi di una capanna a base rettangolare, cioè come capriata. Tre assi disposte in una certa maniera determinano una figura che si rivela utilissima nelle costruzioni statiche. Si parte dunque dagli elementi, i lati, per arrivare alla costruzione; si segue un metodo sintetico. Nel bambino di popoli civilizzati l'idea di triangolo nasce anche per un processo d'astrazione: l'analisi di tanti triangoli di forma e grandezza diversa porta a cogliere quello che c'è di uguale, l'invariante, il triangolo.

Abbiamo voluto fermarci un momento su questioni apparentemente lontane dal tema per ricordare come i due processi di analisi e sintesi sono ormai familiari per il bambino che entra alla scuola media; l'uno, l'analitico, ha enorme importanza nelle scienze della natura, l'altro, il sintetico, è essenziale soprattutto nelle applicazioni tecniche.

Prendiamo ora in esame il corso di osservazioni scientifiche. Saremo condotti a dei continui ravvicinamenti col corso di matematica, e, a un certo punto, ci accorgeremo che lo stesso spirito che conduce ad indagare i fenomeni della natura, porta, in campo matematico, a cogliere profonde astrazioni; da queste, poi, si è ricondotti, in modo del tutto naturale, all'applicazione concreta.

Siamo certamente tutti d'accordo nel riconoscere che l'educazione scientifica deve avere per scopo di far passare da una visione fantasiosa, magica, sovrannaturale del mondo che ci circonda ad una obiettiva consapevolezza e ad un sereno giudizio dei fenomeni naturali; deve essere, in breve, una continua ascesa nell'arte del «saper guardare». Ora, mi sembra di poter distinguere

in questa ascesa quattro grandi periodi ai quali dovrebbero corrispondere quattro tappe nel corso triennale.

I. – I tanti interessi del bambino di 10-11 anni lo portano molto spesso a saltare da un'osservazione all'altra, a confondere fenomeni diversi, a separare concetti simili, a non distinguere l'essenziale dal superfluo. E se, molto spesso, passa da una lettura a un'altra, se lascia sovente un gioco per un altro, questo ci fa comprendere come il disordine mentale gli dia irrequietezza e gli crei uno stato di poca soddisfazione. Ma, l'osservazione dei suoi passatempi preferiti ci offre l'opportunità di una scoperta pedagogica: è proprio sui 10 anni che si acuisce il senso del collezionismo, la passione classificatoria: raccolta di figurine, di francobolli, di farfalle, ecc. Il collezionismo è – per usare una felice espressione della Montessori – il «momento sensibile» del periodo 8-12 anni. È dunque proprio a questa età, nel primo anno della scuola media, che dobbiamo interessare i ragazzi alla classificazione degli animali e delle piante. Ma, presi dal desiderio di far presto, non dobbiamo esporre una fredda sistematica; dovremo invece far sentire le enormi difficoltà che si sono presentate nella costruzione di una classificazione, le varie possibilità secondo i vari criteri, gli errori, i perfezionamenti, i raffinamenti. La costruzione di una classificazione ha per scopo di organizzare le idee, di dare un ordine alle forme, al *qualitativo*.

Ci accorgiamo di essere in piena costruzione matematica: è lo stesso processo mentale, infatti, che ci conduce, ad esempio, in geometria alla classificazione delle famiglie di poligoni (in particolare dei quadrilateri).

Il «saper guardare» porta dunque il ragazzo, spontaneamente, senza l'ausilio del numero ma sorretto da un abito matematico, a una costruzione astratta basata – lo ripeto – su osservazioni qualitative.

Riassumendo: in questo primo stadio il bambino, *analizzando* il concreto, coglie analogie e diversità, raggruppa cose simili, forma delle classi, costruisce, *sintetizza*. Sono anche qui le operazioni di analisi e sintesi che conducono a una costruzione astratta.

Si può, per nostra comodità e guida di pensiero, associare questo periodo al nome di *Aristotele*.

II. – Ma una più precisa osservazione esige *la misura*. Se vogliamo approfondire la nostra indagine sulla natura dovremo cominciare a valerci non solo dell'abito matematico ma anche della matematica come strumento: dovremo osservare la natura misurando quello che i sensi e il pensiero ci suggeriscono.

Se avevamo associato il primo periodo al nome di Aristotele, potremo associare questo secondo periodo al nome di *Leonardo da Vinci*: l'esperienza sui fenomeni naturali – dice Leonardo – va fatta misurando.

Si troveranno rapporti, proporzioni, armonie nella natura, quelle stesse armonie che i Greci avevano trovato nell'arte. Così, lo studio della botanica ci porterà alla scoperta della fillotassi, la zoologia e l'anatomia del corpo umano ci offriranno infiniti spunti e continuo terreno di ricerca. Ma l'esperienza di Leonardo non si ferma qui e ci fa capire quali relazioni potremo trovare fra questi argomenti e la meccanica e quindi la matematica. Vogliamo studiare l'azione dei muscoli? – dice Leonardo. Creiamo un modello della struttura sostituendo i muscoli con opportuni fili di rame; lo studio dell'anatomia si riconduce a quello della meccanica, della più elementare meccanica, dove entrano in gioco rapporti e proporzioni.

Al giudizio vago e personale si sostituiscono dei dati numerici, universali. Si evita in tal modo di parlare a sproposito. « A me pare – dice Leonardo nel *Trattato della Pittura* – che quelle scienze sieno vane e piene di errori le quali non sono nate dall'esperienza, madre di ogni certezza, e che non terminano in nota esperienza ». L'esperienza è dunque la ragione, per Leonardo. Ed ecco come continua: « E veramente accade che sempre dove manca la ragione supplisce le grida; la qualcosa non accade nelle cose certe. Dove si grida non è vera scienza.... L'esperienza fa penetrare la verità per i sensi e pone silenzio alla lingua dei litiganti ».

Rendiamoci conto che è di questo « saper guardare » che i nostri bambini hanno bisogno, rendiamoci conto che è proprio questo che occorre ad un popolo che avendo una lingua dolce, armonica e fluida tende, troppo spesso, ad esagerare nella parola che precede sovente una serena e silenziosa presa di coscienza dei fatti.

Siamo andati avanti nell'arte di saper guardare; prima erano le somiglianze, le diversità, le forme, era *il qualitativo* che ci faceva distinguere, discernere, scoprire gli invarianti; ora, in questo secondo periodo, il saper guardare vuol dire affinare i sensi con l'ausilio del numero: è *il quantitativo* che ci fa scoprire uguaglianze di rapporti, semplici leggi di proporzioni.

III. – Ma la sola misura in un certo numero di casi non è spesso sufficiente per scoprire la legge. Dobbiamo arrivare al terzo stadio, al *sistema ipotetico-deduttivo di Galilei*, per poter dare al ragazzo la consapevolezza della potenza dello strumento matematico allo scopo di riuscire a leggere nel « gran libro della natura ».

Galileo si rivolge, come Leonardo, all'esperienza, ma non si accontenta di ciò che essa dà spontaneamente. La natura viene provocata, interrogata, idealizzata; si fanno delle ipotesi sui fenomeni che si rivelano ai sensi, si deducono da queste ipotesi delle conseguenze, si verifica con esperimenti se queste conseguenze sono esatte. Anche a dei ragazzetti possiamo parlare del problema della caduta dei gravi: possiamo loro riferire dell'ipotesi di Galileo che la velocità sia proporzionale al tempo; è difficile verificare direttamente questa legge. Ma, se vale questa legge, se ne trae la conseguenza che gli spazi sono proporzionali ai quadrati dei tempi; e questa seconda legge è facile verificarla. La verifica sperimentale assicura la validità di questa legge; è vera allora l'ipotesi da cui eravamo partiti.

Non è solo la potenza del procedimento ipotetico-deduttivo che il ragazzo coglie in un'esperienza di fisica molto meglio che in un ragionamento geometrico, ma egli comprende « sul vivo » la dinamicità di una formola, e questo è – a mio avviso – un risultato importantissimo. Le formole che noi presentiamo nel corso di matematica appaiono in generale come qualcosa di fisso, di statico; cogliere la dinamicità di una formola significa entrare in pieno nel concetto di funzione, entrare cioè nello spirito della matematica moderna, moderna nel senso classico.

Ecco come, una volta ancora, il ricorso all'oggetto e all'azione illumina e completa concetti e leggi matematiche.

Mi sia ora permesso di fare un salto di secoli e di inserire in questo stesso terzo periodo un ramo della matematica applicata che sembra, a prima vista,

lontanissimo dalla metodologia che abbiamo trattato: parlo della statistica. La diversità di metodo non mi pare sostanziale: anche in statistica, infatti, la natura viene provocata, anche in statistica si fanno delle ipotesi e si verificano le conseguenze. Quello che c'è di veramente nuovo è che il metodo statistico riesce ad abbracciare matematicamente anche delle questioni che sembra nulla abbiano a che fare con la matematica. Si potrà portare l'esempio quanto mai suggestivo degli studi di linguistica e di decifrazione delle lingue morte, condotti, appunto, in base a calcoli statistici.

IV. – Prepariamoci ora a fare un altro passaggio, l'ultimo, che ci porterà a stringere ancora di più i rapporti fra il concreto e l'astratto: entriamo nel quarto periodo.

Nella faticosa ascesa nell'arte del « saper guardare » abbiamo visto quali immensi progressi scientifici siano stati suggeriti dall'idea di cogliere in gruppi disuguali cose uguali, dall'idea cioè di concepire l'uguaglianza da un punto di vista sempre più largo.

Questo principio – abbiamo visto – conduce ad esempio il bambino piccolo ad astrarre dal contingente per cogliere l'invariante in gruppi di oggetti diversi e formarsi così « per astrazione » l'idea di numero; ed è sempre questo principio che permette di astrarre dalle prime, superficiali apparenze per gettare le basi di una classificazione. Sarà questo principio che, facendo astrarre dalle forme astratte – il numero e la figura – condurrà *Cartesio* all'identificazione di due rami così apparentemente diversi come l'algebra e la geometria. Ed è questo stesso principio, sempre applicato in campi astratti, che condurrà la matematica ad un più alto grado d'astrazione, portando l'attenzione non più sul particolare ente (sia esso numero o figura) ma sulle leggi formali che legano questi enti, ossia – come si dice in una parola – sulla *struttura* del sistema.

Non è difficile avviare il ragazzo alla comprensione del concetto di struttura, fondamentale nelle matematiche moderne, facendogli intravedere quali importantissimi riflessi esso abbia nelle applicazioni tecniche.

Desidero riferire un argomento che ho sviluppato durante cinque o sei lezioni in classi di allievi di 12 o 13 anni, suscitando un interesse e una rispondenza veramente impressionanti.

Ho portato l'attenzione dei bambini sul mondo beato dei numeri interi; questo insieme si divide in due sotto-insiemi: i numeri pari e i numeri dispari. Consideriamo la somma e il prodotto di numeri pari e dispari; operando con addizioni e moltiplicazioni siamo certi di non uscire dall'insieme dei numeri interi.

Avremo le seguenti tavole:

pari + pari = pari		pari · pari = pari
pari + dispari = dispari	e	pari · dispari = pari
dispari + pari = dispari		dispari · pari = pari
dispari + dispari = pari		dispari · dispari = dispari.

Guardando la tavola della somma possiamo dire che: quando i numeri appartengono allo stesso sotto-insieme il risultato è pari; quando appartengono a sotto-insiemi diversi il risultato è dispari. Questa semplice osservazione conduce a strane analogie: le regole della somma dei numeri pari e dispari assomigliano molto a certe regole grammaticali, che i ragazzi conoscono benissimo, relative alle proposizioni affermative e negative. Immaginate – si dice loro – che « pari » corrisponda a « sì » (proposizione affermativa) e che dispari corrisponda a « no » (proposizione negativa). Un esempio fa comprendere come due proposizioni affermative diano affermazione, come anche due negative diano affermazione, mentre invece come una affermativa e una negativa diano negazione:

io voglio che tu vada = sì, devi andare
io voglio che tu non vada = no, non devi andare
io non voglio che tu vada = no, non devi andare
io non voglio che tu non vada = sì, devi andare.

Questo esempio si può schematizzare così:

sì e sì = sì
sì e no = no
no e sì = no
no e no = sì.

Si dice, in breve, che la struttura della somma dei numeri pari e dispari è uguale alla struttura del sì e del no in casi come quello ora considerato.

Consideriamo ora la tabella del prodotto dei numeri pari e dispari; possiamo dire che dove compare il pari come uno dei fattori il risultato è pari; il pari ha dunque sul risultato un'influenza maggiore del dispari.

Uno schema di questo genere si presenta spesso in campi fuori della matematica. L'esempio che vi porto mi è stato suggerito da uno dei miei allievi di III media, l'anno scorso. Immaginiamo di mischiare acqua colorata e acqua comune; avremo lo schema seguente:

acqua colorata e acqua colorata = acqua colorata
acqua colorata e acqua = acqua colorata
acqua e acqua colorata = acqua colorata
acqua e acqua = acqua.

Come si vede, questo schema assomiglia molto a quello del prodotto dei pari e dei dispari: basta sostituire al termine « pari » le parole « acqua colorata » e al termine « dispari » la parola « acqua ».

Si dice brevemente che la struttura del prodotto dei numeri pari e dispari è uguale alla struttura di queste possibilità di miscugli.

Esempi banali, fuori dubbio, quelli che abbiamo portato; ma già illuminano, da un punto di vista qualitativo, la nozione di struttura.

Se si esaminano ancora le tabelle della somma e del prodotto dei numeri pari e dispari, ci si accorge, entrando nell'intimo dei concetti, che esse si possono scrivere in modo più semplice e nello stesso tempo più generale.

La tabella della somma ci dice che quando si aggiunge un numero pari il risultato è pari se l'altro addendo era pari, mentre se l'altro addendo era dispari il risultato è dispari; è come se il pari non avesse alcuna influenza sul carattere del numero a cui viene aggiunto. Aggiungere un numero pari è dunque, ai fini del carattere del numero dato, come aggiungere uno *zero*; cioè, nei riguardi della somma dei pari e dei dispari, il pari si comporta come lo zero.

Esaminando poi la tabella del prodotto, ci accorgiamo che quando si moltiplica per un numero dispari il risultato ha lo stesso carattere dell'altro fattore, cioè se l'altro fattore era pari il risultato è pari, se l'altro fattore era dispari il risultato è dispari; è come se il numero dispari per cui moltiplichiamo non avesse alcuna influenza sul carattere del numero per cui viene moltiplicato. Accade proprio quello che si verifica quando si moltiplica un numero per l'*unità*: l'1 non ha nessuna influenza nella moltiplicazione. I numeri dispari si comportano dunque, nei riguardi del prodotto dei pari e dei dispari, come il numero 1.

Si dice che l'aritmetica dei pari e dei dispari ha le stesse proprietà dell'aritmetica dello zero e dell'uno. Spesso perciò si sostituiscono alle parole pari e dispari rispettivamente i simboli 0 e 1. Le tabelle della somma e del prodotto si scriveranno allora così:

$$\begin{array}{l} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=0 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{l} 0\cdot 0=0 \\ 0\cdot 1=0 \\ 1\cdot 0=0 \\ 1\cdot 1=1. \end{array}$$

0 e 1 sono dei *simboli*, non sono lo zero e l'uno della nostra aritmetica. Ma sono dei simboli così espressivi che parlano da soli e ci conducono a delle grandiose scoperte tecniche. È del tutto naturale per un ragazzo di oggi interpretare lo zero come mancanza di corrente in un circuito elettrico, e, per contrapposizione, interpretare l'uno come passaggio di corrente. E, quale impressione far vedere che il funzionamento delle segnalazioni luminose stradali corrisponde allo schema del prodotto dei numeri pari e dispari, e che, quindi, basta studiare uno schema di questo tipo per poter realizzare dei « giochi » di luce o di « Alt », senza aver bisogno di fare dei tentativi sperimentali! E, quale interesse, quando essi capiscono che il funzionamento delle macchine calcolatrici elettroniche corrisponde allo schema della somma dei numeri pari e dispari, ove si adotti il sistema di numerazione a base 2, e che sono dunque dei principî estremamente semplici quelli su cui sono basate delle macchine che hanno del sovrumano!

Matematica e tecnica sono qui addirittura la stessa cosa, si confondono, e non si arriva a capire dove finisca l'una e cominci l'altra.

Avevamo detto all'inizio che l'insegnante di osservazioni scientifiche deve collegare il suo corso con quello di matematica affinchè il mondo della natura non appaia al bambino come qualcosa di fantastico, di magico, di sovrannaturale; mi sembra che si possa dire ora, a conclusione di questa breve scorsa su un tema tanto affascinante, che l'insegnante di matematica deve introdurre il bambino non solo nel campo delle matematiche classiche, ma anche in quello delle cosiddette matematiche moderne affinchè non sia il mondo della tecnica, il suo mondo di oggi, ad apparirgli come qualcosa di fantasioso, di magico, di sovrannaturale.

Emma Castelnuovo.