ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLXX - 1973

QUADERNO N. 184

PROBLEMI ATTUALI
DI SCIENZA E DI CULTURA

ATTI DEL CONVEGNO INTERNAZIONALE SUL TEMA:

STORIA, PEDAGOGIA E FILOSOFIA DELLA SCIENZA

A CELEBRAZIONE DEL CENTENARIO DELLA NASCITA DI
FEDERIGO ENRIQUES

PROMOSSO DALL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI CON LA PARTECIPAZIONE DELLE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA, BOLOGNA E ROMA E DELLA DOMUS GALILAEANA

(Pisa, Bologna e Roma, 7-12 ottobre 1971)

(ESTRATTO)

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1973

Emma Castelnuovo

« L'INSEGNAMENTO DINAMICO » DI F. ENRIQUES IN UNA MODERNA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Sono passati cinquanta anni dalla pubblicazione di quell'articolo « Insegnamento dinamico » a cui si sono ispirate generazioni e generazioni di professori di matematica. Quell'articolo ha fatto ben più che suggerirci « quale matematica si deve insegnare » e « in quale modo si deve insegnare ». Sotto forma di dialogo con un interlocutore che riassume ed esplicita idee, tendenze e dubbi degli insegnanti di matematica, Enriques chiarisce il suo pensiero in un modo così forte da segnare addirittura la nostra linea di condotta.

Fermiamoci a considerare i punti fondamentali:

– la matematica – sembra chiedere l'interlocutore – deve avere uno scopo utilitario o formativo? Questa domanda è « smontata » da Enriques; che cosa significa? risponde. Perché, nell'utilitario non c'è forse anche il formativo? Un interesse pratico non può avere anche un intendimento educativo?

– la matematica deve esercitare maggiormente le facoltà intuitive o quelle logiche? Anche questa domanda – dice Enriques – è viziata per un'imperfetta visione del valore dell'insegnamento. Logica e intuizione non sono due facoltà distinte dell'intelligenza perché nell'esercizio dell'intuizione c'è una logica; e, d'altra parte, un pensiero logico muore senza il sostegno di un'intuizione creatrice, senza la fantasia. Voi non potete – egli dice – imporre ai ragazzi una logica che parte dall'astratto e deduce altre proprietà e da queste poi altre ancora, ma che non è mai sostenuta da un'immagine concreta, magari da un oggetto sensibile; voi non potete imporre all'allievo il vostro pensiero perché sarebbe « un pensiero morto da travasare dalla testa del maestro a quella del suo ascoltatore ». « Ho avuto la fortuna – sono le sue parole – di assistere a qualche lezione in cui il docente si metteva a conversare coi ragazzi..., ricercando insieme con loro, suggerendo a tentoni là via che essi stessi dovevano percorrere per guadagnare la verità ». E mentre si dichiara entusiasta di questa metodologia, aggiunge « ma, confessiamolo francamente, il compito che ci è proposto è tremendamente, stavo per dire divinamente difficile. Infatti, se il nostro pensiero e la nostra parola debbono muovere l'attività del discente, bisogna che qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco ».

In questi lunghi anni gli insegnanti hanno continuato a discutere su quei punti, abbracciando ora l'una ora l'altra tesi, contestando questo o quel metodo. Ma i tempi cambiano, e quello che era prima tema di discussione dei docenti passa ora in bocca ai discenti; lo sappiamo. Ma si rimane davvero impressionati quando questi allievi sono dei ragazzetti della scuola media, di un'età dunque fra gli 11 e i 14 anni. Ho degli interessantissimi documenti dei miei 171 allievi dell'anno scolastico ora terminato; sono allievi di una scuola media di Roma. Questi ragazzi, nel maggio scorso, dopo aver illustrato in occasione di *un'esposizione di matematica* durata tre giorni i più vari argomenti ad un pubblico davvero il più vario, hanno buttato giù, in meno di un'ora, le loro impressioni su questa esperienza « travolgente », come dice qualcuno di loro. Sembra davvero che la loro voce voglia, con parole semplici, rafforzare quella di Enriques; ascoltiamoli:

« Pensavo a loro – dice Andrea –, a tanti miei amici, chini su un tavolo a studiare e ristudiare delle regole che non capiscono e che forse non applicheranno mai; mentre io invece (come del resto indistintamente i miei compagni) mi sento padrone di una matematica nuova e vera che capisco (e capiamo), e il cui significato non è staccato dalla realtà ». « Perchè non si tratta – dice Manuela – di imparare delle regole a memoria, ma di ragionare su un oggetto qualsiasi, non so, un bastoncino; da questo oggetto noi possiamo arrivare ad altri oggetti e ad altri fatti che sembrerebbero del tutto indipendenti ma che invece sono legati ». « È meraviglioso – dice Cristina – arrivare passo per passo dove non avrei mai immaginato; ragionando, discutendo, arrivare a capire senza l'imposizione di nessuno. Sarebbe ora che tutti si rendessero conto di quale è la matematica, quella viva che appassiona i ragazzi e li avvince con i suoi mille segreti da scoprire insieme all'insegnante ». « Secondo me – dice Gianluca – non c'è una matematica antica e una moderna; secondo me la matematica è una, e noi impariamo la matematica vera. E l'insegnamento che abbiamo avuto ci ha fatto capire soprattutto una cosa: che la matematica è bella ».

Questi ragazzi avevano tutti 13 anni. Ma vorrei ancora riferirvi di una frase, scritta dal timidissimo Claudio, di 11 anni: « ho notato – dice Claudio parlando del pubblico venuto all'Esposizione – che anche le persone che dicevano di non aver mai capito niente di matematica hanno visto accendersi, quando parlavamo noi, una luce nell'oscurità della loro mente ». Claudio ha capito che, nel vero insegnamento, occorre che « qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco ».

Quei « punti critici » di Enriques sono dunque oggi sempre vivi, tanto vivi da essere tema di discussione di ragazzetti della scuola media. Ma – ci si chiede – come hanno potuto questi ragazzi farseli loro? In quale modo hanno sentito che la matematica è una? Come hanno compreso che il professore è altrettanto interessato alla scoperta e alla costruzione della scienza di loro giovanissimi? Come hanno fatto a cogliere la bellezza della matematica? Attraverso quali argomenti?

Gli argomenti, oggi. Chi non ha occasione di entrare nelle nostre scuole medie e non è a contatto con gli insegnanti (intendo gli insegnanti moderni) rimane certamente impressionato dai contenuti: si parla, già alla scuola media, di curve e superficie, di trasformazioni affini e proiettive, di idendità strutturali, di logica delle proposizioni, di programmazione lineare, di calcolo delle probabilità...

La prima reazione a questa lista di argomenti è certamente di critica. Si chiede infatti: tutti questi argomenti che appartenevano ed appartengono alla sfera universitaria voi li fate « scendere » a livello 11–14 anni, e dunque li sviluppate attraverso la sola intuizione; non verrete a dare così delle

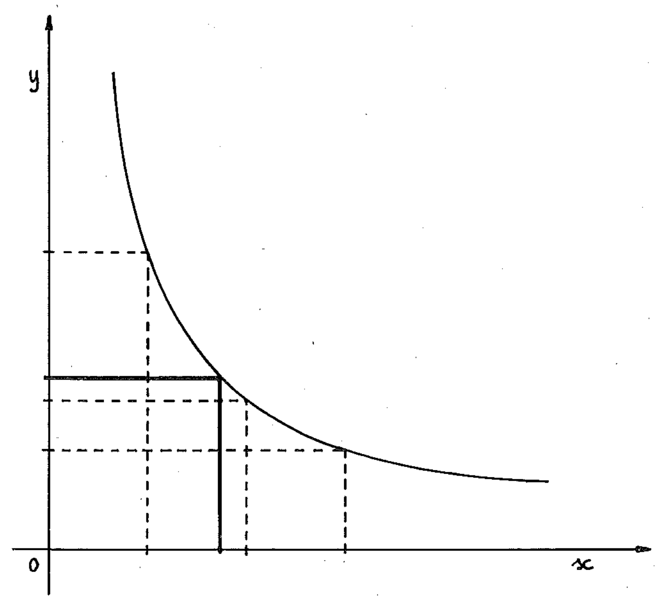

Fig. 1.

semplici informazioni senza sviluppare affatto le facoltà logiche? che cosa vi proponete? Non voglio rispondere senza portare qualche esempio; dopo, risulterà chiaro il significato di quelle frasi scritte dai ragazzi. Vorrei cercare di farvi cogliere lo spirito di questa didattica attraverso la trattazione di un argomento che si sviluppa nell'arco dei tre anni: *le coniche*. Mi piace, fra i tanti, scegliere questo argomento che se nella storia segna – come dice Enriques – il passaggio ad una matematica superiore, significa, nell'insegnamento, la prima presa di coscienza da parte dei bambini di *una matematica nuova*. È questo un argomento di cui tratto da molti anni e di cui ho avuto quindi la possibilità di affinare l'indagine da vari punti di vista, da quello psicologico a quello storico.

Fra le coniche ci viviamo: vediamo l'oggetto rotondo sotto forma di *ellisse*, vediamo due rami *d'iperbole* disegnarsi su una parete quando un lume con paralume cilindrico è disposto lì accanto, e vediamo la *traiettoria parabolica* descritta da una palla lanciata in aria. Queste curve le vediamo ma non le osserviamo. Così, non le osservano i nostri ragazzi fino a che non le incontrano in un contesto matematico. Ma il contesto matematico può essere veramente alla portata di un bambino della scuola media. Sono davvero « cose » molto semplici; osservate le figg. 1, 2, e 3: sono lavori di bambini di I media.

– la fig. 1 mostra dei rettangoli, ritagliati in cartoncino dai bambini, aventi tutti la stessa area; sono stati « raggruppati » così, « a libretto », su un piano cartesiano. I vertici liberi sembrano disporsi su una curva: si tratta di un ramo d'iperbole. Un punto qualunque di quella curva è vertice di un rettangolo, di dimensioni x e y, avente un'area stabilita; se ad esempio l'area è di cm² 36, il rettangolo sarà tale che $x . y = 36$, e questa sarà l'equazione dell'iperbole.

– i triangoli della fig. 2, ritagliati in cartoncino, hanno tutti la stessa base e lo stesso perimetro. I vertici liberi si dispongono su una curva: è un'ellisse. L'idea di prendere uno spago, di fissarlo agli estremi della base, e di effettuare così la costruzione del giardiniere è immediata.

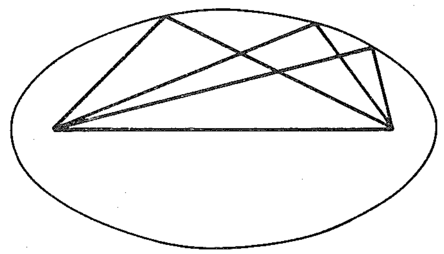

Fig. 2.

– è una storia antica...: se il lato di un quadrato raddoppia..., che cosa succede dell'area? Tutti i bambini rispondono: « anche l'area raddoppia ».

Eppure... Si disegna, si osserva, si riporta poi questa funzione in grafico (fig. 3): sulla lavagna viene a disegnarsi un arco di parabola. Ogni punto di questa curva è tale che l'ordinata, che rappresenta il valore dell'area, è il quadrato dell'ascissa; l'equazione della curva è dunque $y = x^2$.

I bambini hanno costruito iperbole, ellisse, parabola perché dei problemi sulle aree e sui perimetri dei poligoni più elementari ce li hanno condotti. E ora? Ascoltiamoli: è il loro primo compito scritto a due mesi dall'inizio dell'anno scolastico, ai primi di dicembre: « Io dell'ellisse non ne sapevo niente fino a poco tempo fa – dice Antonio. Poi, dopo averla incontrata nel problema dei triangoli isoperimetrici e di ugual base, ho visto tante ellissi intorno a me; anche il piatto sulla tavola mi sembra un'ellisse quando lo guardo da lontano ». « Ora so riconoscere l'ellisse – dice Massimo. Guardo l'ombra data dal sole di un disco segnaletico: è un'ellisse. Era lì, eppure non la vedevo. L'ho osservata solo dopo averla incontrata in una questione

di matematica ». « È solo dopo averla costruita con lo spago – dice Silvia – che ho pensato che questa curva io la conoscevo già: se ne parla sempre a proposito delle orbite nei voli spaziali ».

Frasi di questo tipo si trovano in tutte le loro composizioni. Queste curve non se le dimenticheranno mai forse proprio perché sentono che hanno segnato il loro primo incontro con una matematica che non è l'esercizio di calcolo o lo sforzo mnemonico di apprendere una definizione o una proprietà « non sentita ».

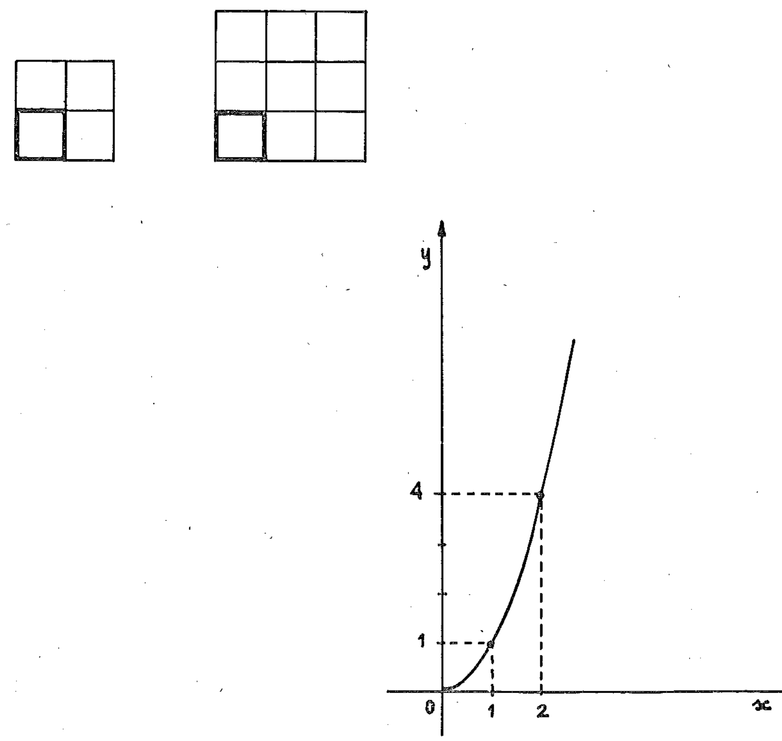

Fig. 3.

Sono, in generale, questioni di carattere metrico quelle che interessano maggiormente ai ragazzi di I. Ed è proprio per metterle in evidenza che è bene dare dei « contro-esempi »; così, per esempio, per evitare la leggerezza per cui molto spesso un ovale viene identificato con un'ellisse è stato fatto notare come la pianta del Colosseo e anche la Piazza S. Pietro non abbiano forma ellittica ma siano invece formate da raccordi di archi di cerchio.

In II si fa un passo avanti nel mondo delle coniche. Avevamo notato, già all'inizio della I, che si ha un'ellisse come ombra di un disco segnaletico data dai raggi del sole. Riflettiamo: si può « vedere » un cilindro le cui generatrici sono i raggi del sole che « si appoggiano » al bordo del disco;

l'elisse non è altro che l'intersezione di questo cilindro col terreno. L'ellisse ci appare dunque come la trasformata di un cerchio per opera dei raggi solari. Di che trasformazione si tratta? Come vengono ad alterarsi le altre figure? Quali proprietà sono invarianti? Per indagare sulle caratteristiche di questa trasformazione siamo condotti a riprodurre l'esperienza dell'ombra del disco, ad ampliarla passando ad altre figure, ad analizzarla. Si studiano *le trasformazioni affini*: l'ellisse è la trasformata del cerchio per affinità.

Esperienze realizzate con altri mezzi ci fanno poi ottenere l'ellisse come trasformata del cerchio: un cerchio disegnato su una tela a rete, incernierata a una cornice quadrata, si trasforma in ellisse quando il quadrato si trasforma in rombo; un cerchio disegnato su una tela elastica si trasforma, anche, in ellisse quando la tela viene « stirata ». Si tratta sempre di trasformazioni affini, ed è proprio l'idea dello stiramento che conduce a scrivere le equazioni dell'affinità, nella II classe.

Ma riprendiamo l'osservazione dell'ombra del cerchio data dai raggi del sole. E se il tempo è nuvoloso o in quel momento il sole non entra nell'aula? C'è sempre chi dice « è lo stesso; accendiamo il lume ». È veramente lo stesso? Un lume con paralume cilindrico ci fa apparire sulla parete un cerchio, un'ellisse, ma anche una parabola e un'iperbole. Si ha dunque una nuova trasformazione, più ricca: *la trasformazione proiettiva*.

E perché non si hanno gli stessi effetti? Sono i ragazzi stessi che rispondono; ormai hanno imparato a guardare: non si ha più, adesso, un cilindro, ma si ha un cono che ha per vertice la sorgente luminosa e le cui generatrici sono i raggi che si appoggiano ai due bordi del paralume. È così che il bordo circolare si trasforma nell'una o nell'altra conica a seconda della posizione del cerchio rispetto alla parete.

Questa esperienza può realizzarsi valendosi dei più vari mezzi tecnici: basta ad esempio far colpire con un piano di luce un cono « di fili », per vedere disegnarsi sul cono una curva di « punti di luce »; e questa curva, al variare della posizione del piano rispetto al cono, assumerà la forma di ellisse, di parabola e di iperbole. È la continuità che permette anche a un ragazzo di cogliere l'uguaglianza di queste curve attraverso il passaggio, appunto « continuo », da una conica all'altra.

Si tratta fin qua di considerazioni di carattere intuitivo; ma ci si può spingere oltre considerando le coniche da un punto di vista analitico: fin dalla I classe i ragazzi si erano resi conto del significato dell'equazione dell'iperbole e dell'equazione della parabola. In III si riesce a scrivere l'equazione dell'ellisse come trasformata di un cerchio per affinità. Ci si rende allora conto che le equazioni delle coniche, pur essendo diverse, hanno però « qualche cosa » di uguale: tutt'e tre sono di 2° grado, e ciò significa – e i ragazzi sono colpiti dal fatto geometrico più che da quello analitico – che una retta può avere al massimo due punti d'intersezione con una di queste curve.

Vorrei ora riflettere un momento sulla linea seguita: siamo partiti da problemi metrici (riguardanti aree e perimetri), siamo poi stati condotti ad

osservare la realtà, lo spazio affine creato dai raggi del sole; in questo spazio l'ellisse appare come la trasformata del cerchio. La realtà stessa ci ha poi condotto ad osservare l'effetto delle ombre date da una sorgente luminosa puntiforme: siamo ora in uno spazio proiettivo e il cerchio si trasforma adesso anche in altre curve.

Lo studio delle coniche appare dunque anche ai nostri ragazzi come intimamente legato a quello delle trasformazioni affini e proiettive, uno studio suggerito, direi imposto, dalla realtà stessa in cui viviamo.

Ho a lungo riflettuto su questi passaggi che riproducono, anche se a partire da tutt'altro genere di problemi, un momento della storia: il momento impersonato da una mente geniale del 300 av. Cr., quella di Menecmo. Anche per Menecmo è un problema di carattere metrico, il problema della duplicazione del cubo, che ha segnato il suo incontro con le coniche; è in un secondo tempo che egli stesso scopre che queste curve appartengono alla realtà che ci circonda: sono le sezioni del cono.

Non ho mai lavorato in storia della matematica ma le origini e « il cammino delle idee » (come diceva Enriques) mi ha sempre appassionato forse proprio per i suoi riflessi didattici. Ho cercato di vedere, di studiare, d'informarmi; e, prima di tutto, ho cercato di « sentire » l'ambiente matematico di Menecmo.

A distanza di più di un secolo era ancora viva ai tempi di Menecmo l'influenza della scuola pitagorica e in particolare quella di Archita, « il teorico » della musica, che si era particolarmente interessato alla costruzione di una media o più medie proporzionali allo scopo di inserire opportuni intervalli di toni fra due toni dati. Non è quindi strano che Ippocrate prima e Menecmo poi abbiano riportato a un problema di inserzione di medie dei problemi che sembravano molto distanti, dei problemi sulle aree e sui volumi: la duplicazione del quadrato e la duplicazione del cubo.

Il primo, la duplicazione del quadrato, equivale a quello di inserire una media x fra due segmenti uno doppio dell'altro, a e $2a$; infatti la proporzione

$$a : x = x : 2a \tag{1}$$

porta a

$$x^2 = 2a^2 , \tag{2}$$

problema della duplicazione del quadrato.

E la (1) si risolve geometricamente valendosi della proprietà, nota fino da allora, del triangolo inscritto in un semicerchio; basta infatti (fig. 4) fare in modo che il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa divida il diametro in due parti di cui una sia doppia dell'altra, per avere

$$x^2 = a \cdot 2a$$

e quindi la (2).

Il secondo, come aveva visto Ippocrate, equivale al problema d'inserzione di due medie proporzionali x, y fra due segmenti lunghi a e $2a$.

Infatti la proporzione

$$a : x = x : y = y : 2\,a \tag{3}$$

porta a

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2\,ax \end{cases} \tag{4}$$

da cui

$$x^3 = 2\,a^3 \tag{5}$$

e quindi al problema della duplicazione del cubo.

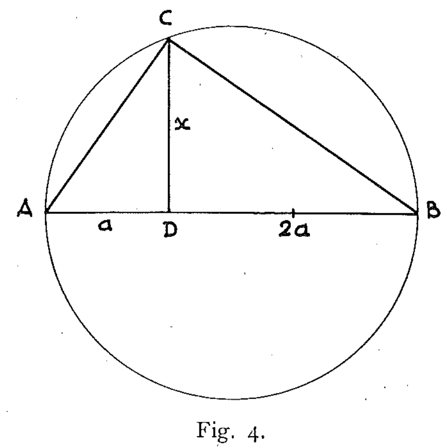

Fig. 4.

È Menecmo che (come risulta da fonti attendibili) avrebbe parlato di parabola (e anche di iperbole e di ellisse), ed avrebbe « visto » questa curva come sezione del cono.

Il passaggio, direi il salto fra la considerazione di una curva nel piano e la sua visione come sezione del cono è così forte da suscitare l'interesse anche di un ragazzetto della Scuola Media. In quale modo Menecmo può essere stato portato a questa intuizione? Al tempo di Menecmo era in uso la clessidra e questo strumento può aver attirato l'occhio sulla diversa disposizione della superficie libera della sabbia, cioè sulle coniche come sezioni del cono. Quanto a un legame fra questa concezione delle coniche e l'altra legata al problema dell'inserzione delle due medie proporzionali, non mi sembra azzardata l'ipotesi storica suggerita da José Silva di Lisbona.

È naturale – dice Silva – che Menecmo abbia ripreso la costruzione del del lato di un quadrato doppio di uno dato, e abbia pensato ad una costruzione dello stesso tipo per risolvere il problema della duplicazione del cubo. Se deve essere

$$a : x = x : y = y : 2\,a\,,$$

si penserà ad un segmento fisso a, al suo doppio $2\,a$, e a due segmenti $x\,,y$ che devono variare secondo quella doppia proporzione. Partiamo da

un cerchio fisso di diametro AB $= a$ e di centro O (fig. 5), e costruiamo dei cerchi concentrici a questo, per esempio il cerchio di diametro CD. Riportando da D (fig. 6) un segmento lungo a si ottiene un punto E, tale che DE $= a$. Se BD $= x$, sarà anche CA $= x$ e anche AE $= x$. Costruiamo

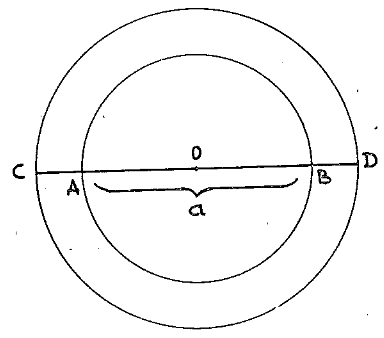

Fig. 5.

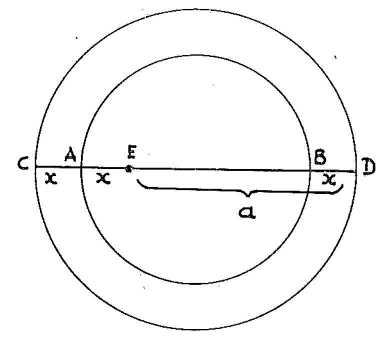

Fig. 6.

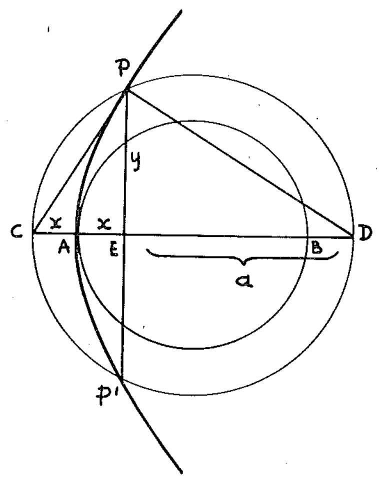

Fig. 7.

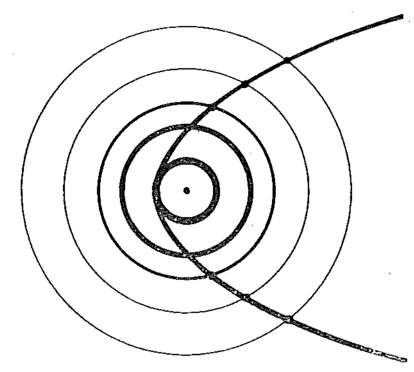

Fig. 8.

ora la perpendicolare al diametro in E fino ad incontrare in P e P' il cerchio di raggio OC (fig. 7). Indicando EP con y si ha

$$y^2 = 2\,x \cdot a$$

cioè

$$y^2 = 2\,a\,x.$$

Il punto P appartiene dunque ad una parabola di vertice A. Si ha così una semplice costruzione per punti della parabola.

Disegnando parecchi di questi cerchi concentrici come si è fatto in fig. 8 si ha l'intuizione spaziale di un cono, e la parabola appare come sezione piana di questo cono. Può Menecmo avere avuto questa intuizione?

Rientriamo adesso nello spirito della scuola di tutti i giorni. Ho voluto in questa mia relazione mettere in rilievo due punti:

– i ragazzi s'interessano alla realtà che li circonda. Per guidarli a comprendere questa realtà non si deve temere di affrontare e di rendere loro familiari degli argomenti che la tradizione riservava a livelli d'insegnamento superiore. Con la condizione però che tali argomenti siano trattati in maniera dinamica e senza pretese di falso rigore;

– i ragazzi s'interessano a problemi storici. Questo non significa che debbano essere avviati a ricerche storiche o obbligati a ripercorrere le varie tappe dello sviluppo di ogni argomento. Si tratta di altro; si vuole destare in loro il gusto dell'indagine nei due sensi opposti: verso l'avvenire da cui, come è naturale, si sentono attratti e verso il passato di cui indubbiamente sentono il fascino.

Ma ascoltate le parole di Enriques che riassumono questi due punti: « Non vi è iato o scissura fra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell'albero dalla tenera pianticina. E come riguardando l'albero, potremo scoprire nella pianticina nuovi aspetti o comprendere caratteri di cui ci era sfuggito il significato, così anche lo sviluppo dei problemi matematici recherà luce sulle dottrine elementari in cui essi profondano le loro radici. Ad una condizione però: che di ogni dottrina si studino le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi aspetto statico ».