

GIORNALE DI MATEMATICHE

DI BATTAGLINI

FONDATO NEL 1868

TERZA SERIE

DIRETTA DA

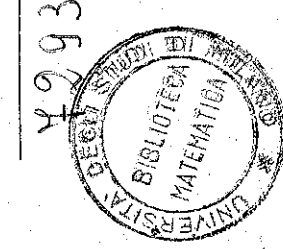
ERNESTO PASCAL

Professore ordinario nella R. Università di Napoli.

Volume LX — (13.^o della 3.^a Serie)

1922

indire 51.60



NAPOLI

LIBRERIA SCIENTIFICA ED INDUSTRIALE

DI BENEDETTO PELLERANO

LUIGI CARLO PELLERANO, Successore

1922

GIORNALE DI MATEMATICHE

DI BATTAGLINI

MATERIALE DIDATTICO ED ESPERIENZE NELL'INSEGNAMENTO

DI

ROBERTO MARCOLONGO (a Napoli)

Discorso tenuto al Congresso della Società MATHESIS a Napoli il 16 ottobre 1924.

« *Beati voi matematici che pel vostro insegnamento non avete bisogno che della lavagna e del gesso!* ».

Ecco il ritornello che mi sento spesso ripetere dai miei colleghi di altre Facoltà (e che non deve essere ignoto neppure a voi), soprattutto quando si tratta di dividere le poche centinaia di lire che il munifico ministero mette a disposizione ogni anno nei laboratori scientifici. Veramente, non saprei dire se la presuppuesta condizione di favore in cui si troverebbero i matematici sia effetto di una profonda ignoranza, da parte dei colleghi, dei bisogni del nostro insegnamento; o del caritatevole desiderio di devolvere quelle poche centinaia di lire a beneficio dei loro Istituti scientifici, non dando nulla a quei poveracci di matematici che non hanno bisogno che della lavagna e del gesso!

Con ben altre intenzioni lo dice pure un grande, il FABRE, nei suoi studi *Souvenirs entomologiques*:

« E per tenere a freno questo mondo irrequieto (degli allievi), dare ad ogni intelligenza il lavoro a seconda delle proprie forze, tenerne desta l'attenzione, cacciare infine la noia della triste sala, le cui mura trasudavano la tristezza, più che l'umidità, *j'avais pour unique ressource la parole, pour unique mobilier un bâton de craie* ».

Ora ciò è completamente ingiusto o falso.

In ogni scuola, di qualsiasi grado, accanto ai gabinetti di fisica, di chimica, di scienze naturali, di disegno, di topografia. ecc., ecc., vi deve essere quello di Matematica. Ogni insegnante dovrebbe avere a sua disposizione e costan-

temente valersene nell'insegnamento, facendo esperienze, libri, disegni, modelli, macchine e tavole matematiche, che debbono agevolare l'apprendimento della materia, il gusto per la ricerca scientifica e rendere lo studio più attraente, più facile e più redditizio!

Un docente che non abbia a sua disposizione tutti questi necessari sussidi, mi pare assomigli ad un meccanico che debba riparare o far funzionare una macchina senza la borsa dei suoi ferri, a dispetto di tutti i metodi Taylor. A furia di pazienza, di ingegno potrà forse venir a capo della sua bisogna; ma quanto tempo perduto che può essere assai più proficuamente impiegato!

Vediamo dunque in abbozzo quello che di più indispensabile dovrebbe contenere il nostro ideale Gabinetto di Matematica; vediamo in qual modo si possa fornirlo, e, come un organismo potente e vitale, possa vivere e prosperare.

Anzitutto, non si spaventi qualche capo d'Istituto, nessuna preoccupazione per locali. Il mio ideale gabinetto di matematica non ha bisogno di locali grandiosi come quelli di fisica, di chimica, di scienze naturali. Può trovare la sua degna sede in qualche modesto armadio della biblioteca, o della sala dei professori o, in caso disperato, nel sancta sanctorum della Direzione che, almeno, non manca mai; e in qualche cartella per collocare i disegni. Sono, come ognuno vede, esigenze molto modeste facilmente raggiungibili nel più modesto degli Istituti secondari e con spesa o nulla o assai lieve. Meglio se qualche fortunato potrà avere una stanza, cui intitolare orgogliosamente: Istituto di Matematica; ma è meglio non farsi troppe illusioni!

E dopo aver pensato ai locali, provvediamo ad addobbarli scientificamente, ed anzitutto pensiamo ai libri, soprattutto ai libri di consultazione.

Nelle mie varie peregrinazioni nelle scuole medie, specialmente del mezzogiorno, mi è spesso volte accaduto di trovare nella biblioteca di qualche modesto Istituto, e sino in un minuscolo ginnasio di Sicilia, le *Vorlesungen über Geometrie di CLEBSCH* e l'*Algèbre supérieure* del SERRET.

Erano stati acquistati chi sa quanti anni prima da qualche insegnante che voleva approfondire (scopo santo e lodevolissimo) la propria cultura o continuare (egregiamente) gli studi universitari. Tale insegnante (e chi può fargliene rimprovero) non avrà avuto la forza di far proprie le commoventi parole di FABRE: « i miei emolumenti, dice, dovevano bastare a tutto, nutrimento del corpo e dello spirito. Ciò che io darò di più all'anno, io lo toglierò all'altro, *balance à laquelle doit fatalement se résigner quiconque prend la science pour gagne-pain* ».

Poi il professore era stato trasferito; il successore non si occupava di alta matematica, e i due celebri volumi compirono indisturbati i loro tranquilli sonni in compagnia dei classici greci e latini, senza che una mano amica osasse levarli dallo scaffale per togliere lo spesso strato di polvere che gli anni vi aveva accumulato!

Ora — e spero di non incorrere nel pericolo di essere frainteso — sta be-

nessimo se si potranno acquistare libri di alta scienza, per allargare la coltura e sollevare lo spirito dell'insegnante; ma prima di pensare al superfluo, pensiamo al necessario; prima che agli abiti di festa, provvediamoci degli utili abiti di lavoro!

Non mancheranno naturalmente, in prima linea, i migliori libri di testo nostri e stranieri e tra questi ultimi mi sia permesso citare quelli del TANNERY, del BOREL, dell'HADAMARD; quello meraviglioso del KARPINSKI; mentre sarei assai imbarazzato a citare tutto ciò che di veramente bello e ammirabile si ha dalla Germania. E in una produzione, fin troppo rigogliosa, si sappia soprattutto ben scegliere: siano pochi e buoni; scelti anno per anno con cura e accumulati nel nostro scaffale per un ventennio e più, da vari professori, diversi di cultura e d'ingegno, staranno a rappresentare, dai vecchi ai nuovi, a traverso le varie edizioni, la storia più vera e più efficace di tutto un periodo. E sarà una raccolta ben più vasta, ben altrimenti ricca di quella che, assai facilmente per le recenti edizioni, può farsi ciascun insegnante!

Nè dovrebbero mancare i periodici dedicati alle questioni didattiche: il Bollettino di Matematica del benemerito collega Conti; il Periodico, risorto a nuova vita per merito del nostro illustre Presidente; e che io non ho mai trovati o trovati deplorabilmente incompleti in tutti gli Istituti da me visitati!

Ma vi sono altri indispensabili ferri del mestiere; le raccolte di esercizi! Tutti sanno quale miniera inesauribile siano quelle di F. I. C. (Frère Irlide Cazaneuve) e F. G. M. (F. Gabriel Marie). Se le teorie vi sono esposte in modo che i nostri insegnanti, di palato più squisito, non saprebbero accettare, la raccolta di esercizi, frutto di una sapiente collaborazione, è veramente pregevole! Ma non sono i soli; e qui, per ovvie ragioni di delicatezza, mi limito ad accennare soltanto ad alcuni degli stranieri.

Il Laisant, così benemerito della scuola o degli studi, ha avuto l'ottima idea di fare lo spoglio di tutto quanto di bello, di utile e di interessante si trova, in materia di esercizi, nei periodici francesi, inglesi e tedeschi e ne sono sorti tre volumi ottimi, coi soli enunciati e i nomi degli autori, una collezione rara alla portata di tutti e con preziose indicazioni bibliografiche.

A quante osservazioni, a quanti riscontri curiosi con molti libri di testo di tutti i tempi, si presta l'opera del Laisant! Quali storie curiose di scolarari ripetizioni di esercizi, di problemi, dai nostri vecchi quattrocentisti alla sempre fresca e profonda raccolta dell'*Arithmétique universelle* di Newton!

Quante prove, a volte, che il più recente Autore ha copiato di seconda mano l'esercizio (e ciò non è certamente un male), senza darsi la pena di risolverlo (e ciò invece sta malissimo)!

Basti ricordare il caso del famoso problema della costruzione di un triangolo date le tre bisettrici.

E col Laisant mi sia permesso citare gli ottimi libri del Lefebure con eccellenti note storiche; quelli del Deobves e dell'Hobson per la trigonometria; e tutti indistintamente i libri inglesi... Ma non siano troppo esigenti!

Bisognerebbe del pari provvedere la nostra bibliotechina di una buona enciclopedia di matematiche elementari; ma qui non saprei dare suggerimenti. Un noto libro recente del Brocard (che non è nemmeno una enciclopedia nel vero senso della parola) non riguarda che la geometria, e la enciclopedia del Weber e Wellenstein (malgrado il nome illustre di uno degli autori) non mi soddisfa affatto. Vari anni or sono la nostra associazione prese l'impegno di farne una italiana; ma poi la cosa non ebbe più seguito. Non sarebbe forse il caso di riprendere l'idea?

In mancanza di meglio si potranno acquistare (costano assai poco) i numerosi volumi della Bibliotheca mathem. del Lietzmann, veri gioielli di cultura e di didattica, per quanto di eccessivo sapore teutonico!

E poichè ogni insegnante deve interessarsi delle questioni storiche del proprio insegnamento (e tutti sanno quanto esse interessino anche gli stessi scolari) non mancheranno nel nostro scaffale i due volumi poderosi del Tröpfke e quello più recente del Cajori di più modesto, ma sempre di interessante contenuto; e infine, specialmente in uno Istituto classico, ci saranno i principali classici greci nelle splendide edizioni Heiberg.

Finalmente un'ultima raccomandazione: non manchi lo splendido libro del Simon; esso solo vale (almeno per la parte geometrica) una intera biblioteca. Perchè qualcuno dei nostri attivi e colti insegnanti non pensa a dargli un indispensabile compagno per la parte analitica?

Così dopo aver provvisto di libri il nostro Istituto in modo da riempire uno degli scaffali dell'ipotetico armadio, supponendo, come nelle favole del buon tempo antico, che siano trascorsi già molti e molti anni; passiamo alla parte più importante; cioè a riempire i restanti scaffali!!

Il professore di scienze naturali con un po' di buona volontà (ed io ne ho visti esempi meravigliosi) fa relativamente assai presto ad arricchire, con lieve spesa, il proprio gabinetto per opera propria o colla collaborazione, spesso efficacissima, degli allievi. Si fa presto un buon erbario, una raccolta di uccelli, d'insetti; o di minerali. Non è chi non sappia quanto esse siano efficaci nello insegnamento delle scienze naturali; insegnamento che è solo veramente proficuo quando si è visto, operato ed osservato!

Come formerà il matematico la propria raccolta, il proprio erbario? In un modo egualmente facile, più importante ancora, poco dispendioso.

Nelle prime classi ginnasiali, nelle scuole tecniche e complementari, poichè è in qualche caso esplicitamente richiesto dai programmi, i giovani studenti fanno qualche disegno delle figure geometriche che studiano; fanno o dovrebbero fare molti calcoli numerici (anche mentali); sono esercitati coi soliti istruimenti a riprodurre le più note e le più semplici costruzioni geometriche (tutt'al più con la costante esclusione del doppio decimetro). Nel ripetere alla lavagna, dovrebbero valersi della riga e del grosso compasso di legno; ma anche questi, se pur esistono, tengono il più delle volte buona compagnia all'Algebra del

Serret e alla Geometria di Clebsch! Purtroppo, poco, molto poco, ma in questo primo studio dell'insegnamento geometrico, qualche cosa di pratico e di grafico si fa.

Ma dopo questo, più nulla o quasi nulla!

La geometria e l'analisi diventano insegnamenti aristocratici e la geometria non ha più (Dio liberi!) nessuno scopo pratico. Coi suoi procedimenti logici; col suo rigore deve formare, plasmare le intelligenze; e se occorrerà risolvere qualche problema, sia pure nel piano, basterà accennare le costruzioni: si traccia una retta di qui, un cerchio di là e si trova quello che si deve trovare, perchè così ce ne convince (ed è ottimo) il puro ragionamento e i teoremi indiscussi della geometria! La verifica è perfettamente inutile; alcuni pensano anche che il meglio, l'ideale, sarebbe addirittura l'abolizione delle figure (i sommi geometri greci non si contentavano forse delle grossolane figure tracciate sulla sabbia?); infatti le rette che voi tracciate sul foglio coll'arte e la perizia più raffinate non saranno che una grossolana rappresentazione delle rette dei geometri; il foglio di disegno il più levigato non è quello dei geometri.

E la cosa è, nelle ultime classi delle nostre scuole secondarie, talmente bene intesa ed è quasi unanime il consenso che, salve rarissime eccezioni, io non ho mai viste eseguite le costruzioni nè in iscuola, nè in casa.

Non diciamo poi nulla sull'abisso, mai colmato, tra la poesia delle sapienti combinazioni algebriche e la prosa delle applicazioni numeriche!

Ora senza voler toglier nulla al valore educativo delle teorie rigorose geometriche ed algebriche, quanto sopra ho notato a me non sembra giusto.

Tutti sanno la grande importanza che Monge e la sua scuola attribuivano al disegno nitido e sapientemente condotto, con felice vocabolo chiamato «*épure*»; tutti sanno quanto occorre saper bene e rapidamente calcolare in tutte le applicazioni della vita moderna. In un insegnamento ben condotto, non deve mancare la parte formativa, teorica, esposta con il rigore conciliabile in un insegnamento elementare; ma non deve mancare assolutamente la parte applicativa, integrazione della prima; il disegno, il calcolo numerico. Più o meno estesa, s'intende, a seconda dell'indirizzo della scuola, delle naturali disposizioni degli allievi; per quanto il disegno e la pratica del calcolo siano oramai quasi indispensabili a tutti. Perchè mai il professore di matematica deve far meno del collega di geografia che pure esige schizzi e carte e prospettivi?

Ho spesse volte assistito ad ottime lezioni e ripetizioni; gli allievi mi hanno saputo perfettamente ripetere costruzioni non facili e descrizioni di curve classiche; ma alla mia domanda: le avete mai disegnate? non ho avuto che una risposta: no; basta la figura del libro; il disegno esige troppo tempo e non viene mai bene, come ci ha assicurato il professore.

Credo che ben pochi (e voglio essere ottimista) di quelli che parlano del problema dei contatti circolari e del famoso problema di Apollonio si siano mai presi la briga, mai abbiamo avuto la curiosità di fare o di far eseguire

il disegno e di vedere nel caso più ovvio e lampante gli otto bei cerchi tangenti a tre dati!

In qualche caso di giovanile entusiasmo, il professore si è pure permesso qualche piccola escursione nel piccolo orto della geometria del triangolo. Lieve colpa, perchè chi di noi non è stato, in giovane età, ghiotto di queste questioni, non è stato un triangolista? E del resto non si trova sino un cenno di geometria del triangolo (sia pure come interessante esercizio di piegatura di carta, ginoco sapiente e altamente istruttivo) nella geometria per i piccoli dei coniugi Y o u n g ?

Ebbene: avete mai disegnato o fatto disegnare il cerchio di F e u e r b a c h e i suoi primi sedici cerchi tangenti; o quello non meno famoso di B r o c a r d ?

Ora io penso che il professore deve esigere che si disegnino le cose più importanti che riflettono l'insegnamento della geometria. I migliori disegni fatti anno per anno dai migliori allievi costituiranno il proprio album, il proprio erbario; anche da rinnovarsi di tanto in tanto. Oppure si potranno porre in appositi quadri esposti nella sala delle lezioni, per stare costantemente sotto gli occhi degli alunni; e per eccitarne la curiosità, eccitarne l'emulazione! E forse, chi sa, non soltanto questa. S o f i a K o w a l e w s k i nei « *Souvenirs de ma jeunesse* » racconta della forte impressione ricevuta da vecchi disegni e dalle formule che ella vedeva su vecchi fogli di carta incollati alle pareti della sua stanza, e appartenenti al padre, generale russo!

Quanto materiale egli potrà raccogliere in pochi anni, sia col lavoro proprio, sia colla collaborazione di più generazioni di studenti!

In pochi anni, non l'insegnante, ma la scuola avrà un album e quadri in tale quantità da poter largamente riempire il secondo degli scaffali del nostro armadio. La varietà dei disegni si imporrà da sé; a seconda della cultura, delle predilezioni del docente, anzi dei vari docenti che per forza ineluttabile di eventi si succederanno nella scuola.

Non ho la pretesa di dare dei consigli a chi ne sa più di me. Mi limito ad accennare a qualche altra cosa.

Si potranno far disegnare le più celebri dimostrazioni del teorema di P i t a g o r a : da quella meravigliosamente semplice dovuta forse ad un commentatore arabo di E u l i d e che riuscì a decomporre il quadrato della ipotenusa in tre triangoli, un quadrilatero ed un pentagono rispettivamente eguali e diversamente situati nei quadrati dei cateti (ridotta a mirabile piegatura di carta dai coniugi Y o u n g); a quelle dell' E p s t e i n , del N i e l s e n ; o far costruire degli abachi grafici per la risoluzione in numeri interi dell'equazione pitagorica; o per quella dei triangoli eroniani. La risoluzione grafica delle equazioni (con rispetto alle dimensioni) e l'uso costante della carta millimetrata, col sussidio di coniche o di qualche semplice curva algebrica o trascendente offre uno sterminato campo di disegni, di osservazioni preziose. Gli studenti vi si diletteranno in modo meraviglioso, anzi con entusiasmo!

E se poi il professore di matematica vorrà (e dovrebbe) unirsi in fraterna

collaborazione col suo collega di fisica e di chimica; quale altro immenso campo alle rappresentazioni grafiche delle oscillazioni armoniche e delle svariate loro composizioni; al moto dei proiettili; alla teoria del potenziale; alle più semplici curve cinematiche (moto a tre aste, p. es.) che pure interessano gli alunni di una delle sezioni dell'Istituto tecnico.

La pazienza e l'abilità di ottenere un disegno bello ed esatto; le dimensioni stesse del disegno ben più ampie di quelle del testo; la diversa colorazione delle parti del disegno; le piccole questioni che il giovane disegnatore deve superare da sé in ogni momento; insomma queste prime esperienze geometriche, non solo sviluppano, acquiscono il senso estetico e geometrico, non solo possono promuovere la invenzione geometrica, e la discussione dei problemi, ma danno una sicurezza ed una padronanza della materia che difficilmente si acquisterebbe in altro modo.

Anche in questo i tedeschi sono maestri. Senza ricordare ciò che si fa nelle scuole tedesche, mi sia permesso richiamare la vostra attenzione sopra due libri in cui si possono avere ottimi modelli: quello del N o o t : *Mathematische Experimentiermappe für die Hand der Schüler*; e quello meraviglioso di A u e r b a c h , *Die Physik in graphischen Darstellungen*.

Quel poco che io, in via di modestissimo esperimento e coll'aiuto di una mia distinta allieva (proveniente dal liceo), ho potuto fare in pochi mesi, mi dà completo affidamento che quanto ho proposto non sia di impossibile attuazione.

Voi vedrete, giudicherete e certamente saprete fare assai meglio.

E vengo, rallegratevi, all'ultima parte di questo mio discorso; anzi a quella che dovrebbe essere la più interessante; ai modelli, ed agli strumenti matematici.

È incredibile tutto ciò che la più fine industria di artisti, di meccanici, di matematici ha saputo produrre in questo campo che va arricchendosi ogni giorno di più.

Dai semplici e antichissimi strumenti: la riga, il compasso, la squadra, a tutta la ricca collezione di compassi per tracciamento di determinate curve (ellissografo, spiralografo, compassi cicloidal del R i d o l f i , sistemi articolati, ecc.); dalle varie squadre cicloidal, evolventi, polisettrici; dai curvimetri, planimetri, agli integrali di A b d a n k - A b a k a n o w i c z a quelli del P a s c a l per la integrazione delle equazioni differenziali, per la risoluzione del problema balistico; a quelli dello S c a t i z z i ; agli integrali per le equazioni integrali di F r e d h o l m ; all'analizzatore armonico di C o r a d i e di M i c h e l s o n , veri miracoli di ingegnosità e di meccanica di precisione; dai fiori geometrici, dall'anello prestigioso del S u a r d i (1672) capaci di descrivere oltre mille curve antiche e moderne, alle miracolose penne geometriche del K e r r , ai vari armoniografi, wondergraph, all'auto Vibration Recorder, e al pendolo giroscopico di G r u e y , dai semplici modelli di solidi in cartone, in gesso in celluloido, in cristallo; dai semplici solidi decomponibili del D u p i n e del

Rossi, agli eleganti modelli geometrici e cinematici dello Schilling e del Brill; dalle semplici costruzioni di carta delle superficie quadriche mediante le loro sezioni circolari, alle sapienti e raffinate costruzioni in gesso, in fili di seta, in celluloido, di superficie algebriche e trascendenti, anche le più complicate; dal regolo calcolatore e dai vari compassi geometrici alle portentose macchine calcolatrici (Brunswiga, Borrunghs); dalle figure stereoscopiche del Greenhill, agli anaglifi del Vuibert; si ha una tale quantità di modelli, di strumenti matematici, di potente ausilio per l'insegnamento elementare e superiore, che a volervi nominare tutti ci sarebbe da scrivere un volume; e, possedendoli, ci sarebbero da riempire, non uno scaffale, ma parecchie sale.

Chi ami avere particolari completi ricorra al libro del Galle, al volume pubblicato in occasione del trentenario di Nepero, alle opere di Abakano wicz e di Pascal, ai cataloghi dello Schilling e del Brill.

Ne vedrete, mi auguro, buon numero nella visita che faremo ai Gabinetti della nostra Facoltà ed alla minuscola mostra che ho preparato.

Il nostro ideale Gabinetto di Scuola secondaria non può naturalmente aspirare a tanta ricchezza, la quale, per molti lati, sarebbe del tutto fuor di luogo e superflua.

Vediamo quello che è possibile e ragionevole collocare nel nostro Gabinetto.

Anzitutto i modelli dei solidi della geometria elementare. È presto fatto: Paravia vende, a poco prezzo, una buona raccolta di solidi di legno, largamente profusa, ma non egualmente utilizzata, in tutte le scuole d'Italia.

Ho avuto sempre pochissima simpatia per queste raccolte; sono troppo rigide, troppo tozze; lasciano vedere poco o nulla dell'interno e se cadono si deteriorano facilmente. Peggio ancora, non sono fatte dagli studenti; rappresentano una esperienza già fatta; invece l'esperienza la deve fare lo studente, guidato naturalmente dal professore.

Quanto sono preferibili i modelli in cartone, quelli costruiti con sottili asticelle di legno connesse con un po' di cera e con sottili fili di seta, dagli studenti!

Colla carta si fanno cose meravigliose (l'osservava lo stesso compianto Vaiati) come sa bene chi ha letto il più volte citato libro degli Young. E non si può credere con quale arte consumata vi si provino gli studenti, specialmente le donne!

Non so, del resto, se abbiate mai fatto l'osservazione che i bambini giuocano più volentieri con dei rozzi fantocci disegnati e ritagliati da un pezzo di carta colorata, che con una bambola artistica!

Nessuno dubiterà, io spero, che chi dopo aver studiato con ogni rigore geometrico, per es., i cinque solidi regolari, si sarà ingegnato a costruirli, resterà più soddisfatto e ne saprà assai di più di chi si è contentato di studiarli e di vederli sul libro; poichè alla teoria avrà fatto seguire la verifica sperimentale. Dirò di più: anche la lezione del professore sarà assai più efficace (perchè meno astratta e quindi meno noiosa) se la dimostrazione, la costruzione

teorica sarà fatta di pari passo (quando è possibile e lo è il più delle volte) coll'esame del modello. Non si esercitano forse le facoltà di astrazione dell'allievo? Eh! lasciamo andare.

Questa facoltà di astrazione ben pochi la posseggono a sedici anni; in ogni modo, tra mani sapienti, il piccolo modello può essere una fonte inesauribile di piccole esperienze, di facili constatazioni, un avviamento all'osservazione, alla scoperta sperimentale di nuove proprietà che poi l'allievo cercherà di dimostrare per via logicamente rigorosa.

Non poche volte ho assistito ad una prima lezione di geometria solida. Il Professore si è presentato avanti alla scolaresca armato del libro di testo e del solito pezzo di gesso (che del resto non ha adoperato). Ed ha cominciato la sinfonia colla introduzione degli assiomi e postulati; ha seguito poi col maestro e coll'adagio dei teoremi, terminando con l'allegro di qualche esercizio; il tutto, ben'inteso, in chiave di pura astrazione. Nove volte su dieci, con questo sistema, malgrado la sapienza del docente, non si arriva a tener desta più di un quarto d'ora l'attenzione di una scolaresca, che ha poc'anzi udito il commento di un classico, o è stata deliziata dai misteri della grammatica greca o latina, o ha assistito ad una lezione di fisica o di chimica in cui ha pur visto e sentito qualche cosa!

La noia guadagna più o meno tutti quanti, compreso l'ispettore (che il forte sentimento del dovere costringe a stare cogli occhi aperti); e non è possibile ripetere lo scherzo di quel tale accademico in una grave seduta in cui si parlava dell'*échappement*.

Ma fate che il professore venga alle lezioni armato di modelli, di fogli di carta (meglio se colorati); che faccia prima osservare, sperimentare, e poi dedurre e legiferare e tutti vedranno (come qualche volta ho visto io) un cambiamento di scena; la scolaresca si anima, comprende e (permettetemi la frase) digerisce subito.

Io parlo qui anche per mia esperienza personale, che, sebbene si eserciti in campi diversi, ha pure un certo valore.

Dunque si facciano costruire dei modelli di solidi decomponibili, con date dimensioni e di cui, in determinati casi l'allievo misurerà gli angoli confrontandoli con quelli teorici; modelli che realizzino qualche difficile dimostrazione di geometria piana e solida; e sono innumerevoli quelli che si possono ideare pel teorema di Pitagora; pei triedri e loro supplementari; con i triangoli sferici di varia specie tracciati su sfere reali di gomma, di celluloido, di legno. E si otterrà una delle più belle ed efficaci integrazioni al proprio insegnamento; si faranno, in piccolo, delle vere e proprie esperienze.

Certo, non tutti gli allievi riusciranno egualmente bene; ma si tenga ben presente il famoso proverbio inglese: *nessuno sa mai quello che è capace di fare fino a che non ci si prova!* Si provi, si tenti e si avranno risultati e sorprese mirabili.

I modelli migliori, i più artistici, verranno a far parte del patrimonio della scuola e riempiranno il terzo ed ultimo scaffale del nostro armadio. La raccolta crescerà di anno in anno e la emulazione potrà far fare miracoli; l'esperienza degli anni precedenti sarà savia ammaestratrice per le costruzioni future; il materiale non sarà disperso; ogni professore a seconda delle sue preferenze, delle sue abitudini, del suo ingegno, facendo tesoro dell'esperienza dei suoi predecessori, troverà nuovi metodi per migliorare, estendere il campo delle esperienze e arricchire il Gabinetto della scuola colla diretta collaborazione degli allievi; effettuando così, con pochi sforzi e con poca spesa, una vera e felice integrazione di lavoro!

Ma qui è possibile che « qualche vecchio brontolone » obietterà: Dovremo dunque noi insegnanti di matematica, abituati a spaziare nel campo della pura astrazione e della immaginazione, armati dei severi e formidabili strumenti della logica (e qualche volta anche dei simboli), ridurre i nostri allievi a dei puri artefici, a dei piegatori di carta, a dei ritagliatori di cartone; dovremo contaminare, violare, la pura geometria, la severa Urania, con dei pezzi di carta, con dei modelli quasi sempre inesatti e goffi?

La risposta completa meriterebbe un lungo discorso ed io ho già abusato della vostra pazienza! Il geometra S. K a n t o r che verso il 1878 seguiva in Roma il corso di geometria superiore del mio venerato maestro L. C r e m o n a sulle superficie ad area minima, chiamava il C r e m o n a « *geometra stiale* » perchè egli si valeva dell'analisi! Oggi siamo tutti d'accordo che un geometra che volesse privarsi dell'uso dell'analisi, o un analista di quello della geometria, fanno un po' l'impressione di chi, potendo camminare con due buone gambe, si eserciti nel discutibile e poco estetico sport di camminare con una gamba sola!

Nessun timore di « violazioni »; invece saggio richiamo, felice connubio del puro ragionamento colla intuizione, della teoria coll'esperienza! E del resto risponda in ogni modo la storia. G a l i l e o saggia coi fatti le scoperte leggi del moto; e diventa costruttore di occhiali, lavoratore di vetri; T o r r i c e l l i non esita a discendere dalle sublimi investigazioni geometriche e meccaniche per diventare anche lui esimio costruttore di lenti e tutti sanno della abilità di H y g h e n s che costruisce il suo pendolo cicloidale e il telescopio; di N e w t o n; tutti sanno della fenomenale potenza di calcolo mentale di E u l e r e di C a u c h y!

L'esercizio di facoltà costruttrici, lo sperimentare ridotto alle semplici e modeste mansioni cui ho accennato, integra brillantemente lo studio della geometria; non deve nè abbassarlo, nè sostituirlo. Esso rende più facile, più attraente un tale studio; esso mette una nota gaia tra le severe leggi della scienza!

Non da i soli modelli eseguiti dagli allievi si debbono trarre gli indispensabili ausili per un insegnamento attraente e variato.

Molti altri ve ne sono cui accennerò brevemente.

È ben nota la difficoltà che incontrano i principianti nello studio della stereometria, e nel dover rappresentare sopra il piano della lavagna o della carta delle figure solide. Si deve risolvere infatti un problema di prospettiva e lo studente lo risolve quasi sempre incoscientemente, facendo quello che vede, fare al professore sulla lavagna e riprodotto nel testo. È assai dubbio che lo comprenda subito e ne penetri lo spirito!

Ad eliminare le prime inevitabili difficoltà, servono molto bene le figure stereoscopiche così largamente usate nelle scuole inglesi (*Ladies' schools*) e che sono oramai ben note anche da noi. Se ogni allievo possedesse il proprio stereoscopio, colla corrispondente figura relativa al teorema da dimostrare, il professore sarebbe dispensato dal fare la figura alla lavagna; vi sarà risparmio di tempo e maggiore chiarezza. Io stesso ho sperimentato la bontà del metodo. Dopo poche prove, gli alunni, anche i meno pronti sapranno riprodurre le schematiche figure alla lavagna (perchè ora ben impresse nella mente) e rifare la dimostrazione senza il sussidio della figura stereoscopica.

Non sarà facile avere 30 o 40 stereoscopi; ma uno o due se ne possono avere certamente e anche con questi ci si può industriare. Ma forse si può cercare per altra via una soluzione meno dispendiosa!

Esistono in commercio (naturalmente marca tedesca) degli album di vedute panoramiche delle principali città del mondo. Viste ad occhio nudo sono piuttosto bruttine, a contorni slavati ed indecisi, in due colori (rosso e blu).

Ma guardatele attraverso un doppio oculare di celluloido, uno rosso e l'altro blu, e dopo un po' di adattamento, regolando la distanza, i colori complementari si fondono, i contorni diventano visibilmente netti e tutta la figura, in nero, par che si stacchi dal foglio; case, alberi, uomini paiono come rilevati e situati in piani diversi!

Il V u i b e r t ha voluto sfruttare gli stessi principi per il rilievo delle figure geometriche e ne sono venuti fuori gli *Anaglyfi*.

Sono veramente semplici e meravigliosi; costano poco e sono alla portata di tutti. Alcuni dei disegni, p. e. la figura degli scaenoidi inscritti e circoscritti nella piramide triangolare; alcuni complicati poliedri per lo studio della cristallografia, e fino le figure di alcuni strumenti, viste a traverso il doppio oculare colorato, sono veramente impressionanti! Quelle figure, rigide, l'una poco diversa dall'altra e quasi sovrapposte, si fondono, si animano; par che una virtù magica le faccia sorgere dal foglio; le rette diventano tanti sottili fili di seta che a piacere si fanno allontanare e avvicinare!

L'esempio del V u i b e r t è stato imitato e ampliato; ed ora possediamo altre magnifiche tavole pel rilievo in geometria.

Io penso che non sia difficile riprodurre collo stesso sistema le più notevoli figure della stereometria su grandi quadri murali da disporre sulla lavagna; basterebbe in tal caso che ogni studente si valesse del doppio oculare

colorato di celluloido, con una spesa di pochi soldi. La cosa non è stata ancora tentata, per quanto io sappia; ma mi auguro lo sia ed al più presto.

Non mi dilungo sull'uso continuo che lo studente dovrebbe fare delle tavole matematiche e sui veicoli al servizio dei calcolatori di cui ha parlato colla usata competenza il Loria; dalle più modeste alle più complete (cito solo quelle dello Iahnke); dalle umili tavole di logaritmi alle tavole dei numeri primi pubblicate in America a quelle del nostro Poletti, destinate a svelare ancora non pochi misteri della teoria dei numeri!

E così mi pare che un po' per anno, con lievissima spesa, abbiamo riempito il nostro armadio e costituito il gabinetto sperimentale di matematica; soprattutto con poca spesa.

Perchè se si chiedessero al Ministero della P. I. dei fondi anche modesti per la fondazione e la sussistenza di questo nostro Istituto sperimentale, anche in questo momento in cui le scienze sperimentali sono così degnamente ed altamente rappresentate al Ministero della P. I., potete essere più che certi che tale Istituto o non sorgerà mai, o, se non si vuol essere così pessimisti, per lo meno con una secolare lentezza! Ma la collaborazione e talvolta, chi sa, anche la generosità degli studenti; l'industria del professore che deve variare in ragione inversa del quadrato o del cubo dei soldi che sono a sua disposizione, possono e debbono far miracoli.

Lasciatemelo augurare per bene della nostra scuola!

E, torno a ripeterlo, per i modesti scopi dell'esperienza che può farsi in un istituto secondario, non occorrono oggetti di lusso e costosi, da lasciare ad istituti superiori forniti di adeguati mezzi finanziari; come del pari per dare una prima e sintetica visione di qualche importante scoperta o legge o teorema, non è del tutto inutile valersi di qualche procedimento un po' sommario e intuitivo!

Abusando ancora della vostra pazienza, permettetemi di insistere con qualche esempio. Vi confesso che questa dei modelli è stata ed è sempre una mia debolezza, una passione; e permettetemi questo piccolo sfogo di vanità, ricordo a mio onore aver fatto discutere, in Napoli, due ottime tesi di laurea per ognuna delle quali si era costruito il relativo modello (giroscopio della Kowalewski; doppio pendolo).

Poche asticelle di spesso cartoncino o di legno sottile permettono a qualsiasi studente di riprodurre i modelli dei più semplici inversori (Pauce-Lier, Hart) e di constatare sperimentalmente le più notevoli proprietà della trasformazione per inversione; un buon cartoncino e un di foglio di carta oliata, permettono, sperimentalmente, la riproduzione di una o dell'altra delle curve cicloidali nel moto di una figura piana nel proprio piano; teorema e teoria che figurano nei classici elementi di geometria del Bobillier, dedicati alle scuole di operai (a quelle scuole in cui, almeno in Inghilterra, non si teme di parlare di vettori, di derivate e di integrali); un cordone di caucciù fissato in un estremo e recente nell'altro un piccolo giroscopio (di quelli

che si vendono nelle fiere, senza ricorrere alle sapienti costruzioni di Max Kobl) fa comprendere in modo lampante il teorema di Frisi sulla composizione delle rotazioni istantanee intorno ad assi concorrenti; un ruvido blocco parallelepipedo di legno o un modesto libro, visto dal dritto e poi, in due diverse maniere, dal rovescio, dà la semplice legge della composizione di due simmetrie intorno ad assi ortogonali; la figura posta da Galileo al principio della terza giornata dei Discorsi sopra due nuove scienze, e che si è trovata essere almeno anteriore di tre secoli a Galileo, fa comprendere, senza integrazione o passaggi al limite, istantaneamente, la relazione celebre tra spazio e tempo nel moto uniformemente vario; e finalmente, l'uso, non molto religioso, di un modesto rosario o catena omogenea attorcigliata ad un prisma triangolare, secondo la mirabile idea dello Stevin, conduce alla scoperta della legge di equilibrio sul piano inclinato!

È incredibile ciò che può insegnare di geometria e di meccanica quel meraviglioso giuocattolo che è la trottola o il giroscopio.

I tentativi di riprodurre in modo grossolano la celebre rappresentazione di Poincaré del moto di un mezzo ellissoide di gesso, a centro fisso, che rotola su di un piano cosparsa di nero fumo, gettarono i primi dubbi sull'esistenza dei flessi della erpoloide dando poi origine ai lavori teorici di Hesse e di De Sparre e quindi ai modelli più perfezionati di Grassman jun.

Anche le determinazioni sia pure grossolane delle radici di una equazione di 2° grado colle intersezioni di una parabola fissa con una retta; o quelle di una di 3° grado colle intersezioni di una parabola con un cerchio; la verificazione sulla carta del teorema di Pitagora sui triangoli a lati interi; la ricerca del valore di π colla misura diretta di diametri e circonferenze di monete, dischi, tondi di bicchiere, ecc. e finalmente tutto lo sconfinato campo delle approssimazioni numeriche, non sono forse altrettante piccole esperienze accessibili a tutti?

Insomma bisogna operare e far operare; risvegliare certe facoltà che in maggiore o minor grado ciascuno di noi possiede; inculcare anche dalla Cattedra di matematica che se è bello, sublime seguire i voli della fantasia, le esigenze più estreme del rigore, è ugualmente bello ed utile scendere alle applicazioni; bisogna, in altre parole, anche in matematica, essere più fattivi, direi quasi più dinamici! Come nel fatto lo si è nelle scuole estere.

So bene: questo desiderio di far poco o nulla nel senso esclusivamente pratico; aver, non dico paura, ma un po' di disprezzo per la piccola esperienza matematica (contenuta entro i modestissimi limiti cui ho accennato); innamorarsi della pura speculazione e disdegnare l'esercizio più modesto e più noioso del tracciamento di curva, di un calcolo numerico che vi costringe a litigare coll'aritmetica ed a far uso delle tavole, è, diciamo francamente, un po' nell'indole della nostra razza, nelle caratteristiche del nostro ingegno. Il nostro paese che ha avuto e vanta uomini sommi sia nel campo della pura

speculazione scientifica, sia nel campo puramente sperimentale; presenta, molto, molto meno delle altre nazioni, esempi di quel felice connubio dell'alta speculazione scientifica colla abilità sperimentale che è soprattutto vanto dell'Inghilterra e della Germania.

Basti citare (e non nomino i viventi) Thomson, Maxwell, Rayleigh, Helmholtz, Kirchhoff, Hertz.

I nostri tempi (e più ancora l'avvenire) richiedono bensì uomini di alta scienza; ma altresì uomini alacri e fattivi capaci di maneggiare il calcolo con consumata abilità; non insensibili alle sottili investigazioni dell'analisi e della geometria, ma anche abili davanti ad un tornio; pronti a saper far funzionare una macchina come a comprenderne e a idearne la teoria e la costruzione. A questo grado non si arriva che con una lunga, lenta e continua preparazione!

La scuola secondaria può, secondo il mio modesto parere, essere il primo e più facile gradino di questa lunga ed erta scala.

Mi par quasi di sentire insieme col sospiro di sollievo per la fine della mia conferenza, un grido di orrore. Dio mio! a quante cose deve servire questa benedetta scuola!

Formazione ed educazione della mente coi rigori logici; ampiezza di cognizioni; esercitazioni; vettori, derivate,.... ed ora ci vorrebbe anche..... la esperienza e le costruzioni di modelli!

Ma tutto « est modus in rebus ». L'armonia e soprattutto il buon senso della misura, sono doti eminentemente italiane e della gran maggioranza dei professori delle nostre scuole secondarie!

A voi adunque, gentili e paziente uditori, di dichiarare se da queste poche idee, possa ricavarci qualche cosa di bello, di utile, di proficuo, per ciò che, pure nelle strettezze e amarezze dell'ora presente, è sempre nei nostri pensieri, nel nostro cuore; la nostra scuola!

CONCORSI AL PREMIO TENORE PRESSO L'ACCADEMIA PONTANIANA DI NAPOLI

- I. *Le ricerche aerodinamiche di Joukowski e loro applicazioni.*
- II. *Un lavoro storico monografico relativo alle diverse ricerche che abbiano riferionato o esteso il teorema di Sturm sul numero delle radici di un'equazione algebrica (Brioschi, Trudi, Darboux, Terquem, Kronecker, Phragmen, etc.).*

Premio, per ciascuno dei due concorsi: L. 446,25.

Lavori anonimi, contrassegnati da un motto.

Scadenza: 31 Marzo 1923.