GIORNALE

DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

PUBBLICATO PER CURA DEL PROFESSORE

G. BATTAGLINI

Volume XXXI. - 1895.

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
Via Gennaro Serra, 20.
1893.

Donc l'égalité (A) est

$$\frac{n(n-1)}{2}(q-2)+n=\frac{n(n+1)}{2}+(q-3)\frac{(n-1)n}{2}$$

ou, pour abréger:

$$Aq+B=A'q+B'.$$

Or:

$$A=\frac{n(n-1)}{2}\ ,\quad B=n-n(n-1)=-n^2+2n\,,$$

$$A'=\frac{(n-1)n}{2}=A$$

$$B'=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{3(n-1)n}{2}=-n^2+2n=B$$

etc.

Je voulais aussi, Monsieur, vous soumettre quelques remarques touchant la Note de M. Lerch; mais le temps me manque. Permettez moi, seulement, de vous faire observer que la formule (supposée exacte) resulte de ceci:

(1°) $$\mathrm{L}\Gamma(x)+\mathrm{L}\Gamma(y)=\mathrm{L}[\Gamma(x)\,\Gamma(y)]\,;$$

(2°) $$\mathrm{L}\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}x-x+\frac{1}{2}\mathrm{L}(2\pi)+\varpi(x)$$

$$\varpi(x)=2\int_0^\infty\frac{dv}{e^{2\pi v}-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{x}$$

$\varpi(x)$ étant la fonction de Binet (*).

Liège 4 décembre 1893.

(*) Recherches sur la constante G et sur les intégrales eulériennes (Académie de Saint Pétersbourg 1883).

SULLE SUPERFICIE DI RIEMANN

CON DATI PUNTI DI DIRAMAZIONE

MEMORIA

DI

A. HURWITZ

(in Zurigo)

VERSIONE ITALIANA DI ALBERTO BRAMBILLA

con note dell' Autore.

Dai Math. Annalen, *vol.* 39.

Ho appena bisogno di porre in rilievo l'importanza fondamentale del mio tema per la teoria Riemanniana delle funzioni algebriche. Tuttavia, questa teoria ha per punto di partenza le superficie di Riemann costruite graficamente sul piano della variabile complessa, e soltanto più tardi si passano ad esaminare le funzioni, che da questa superficie vengono determinate.

Il problema quì trattato, anche in lavori che si rannodano a Riemann, è stato in molte maniere in parte sfiorato, ed in parte – ma per casi molto particolari – esaminato profondamente. Devo citare prima di tutti i lavori di J. Thomae, specialmente la Memoria « *Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen* » comparsa nel vol. 75 del Giornale di Crelle, nella quale si fa vedere minutamente come la superficie Riemanniana medesima possa assumere le forme più varie cambiando i tagli di diramazione, e come, per un giro completo di uno dei punti di diramazione, la superficie possa anche cambiarsi in un' altra essenzialmente diversa. Del caso particolare della superficie a tre fogli tratta la Dissertazione di H. Kasten (Göttingen, 1876). In essa, il numero delle superficie essenzialmente distinte a tre fogli con n dati punti di diramazione ascende ad $\frac{1}{2}(3^{n-2}-1)$;

accade però il fatto strano, che l'Autore ritiene questo numero soltanto come un limite superiore del numero da determinarsi.

Inoltre devo citare i lavori di F. Klein sulla trasformazione delle funzioni ellittiche (*), le Memorie, che a quelli si riconnettono, di W. Dyck sopra la costruzione e la disamina dei gruppi e delle irrazionalità per superficie Riemanniane regolari (**), come pure lo scritto di F. Klein « *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* » (Leipzig, 1882), in cui fu toccato, a pag. 64, il problema di costruire tutte le superficie di Riemann con dati punti di diramazione.

I rimanenti lavori, a me noti, che trattano il presente tema o stanno con esso in più o meno stretta connessione, sono i seguenti:

I. Lürot. « *Note über Verzweigungsschnitte und Querscnitte in einer Riemann'schen Fläche* » Math. Ann., Bd. 4.

A. Clebsch. « *Zur Theorie der Riemann'schen Flächen* » ib., Bd. 6.

A. Kneser. « *Zur Theorie der algebraischen Functionen* » ib., Bd. 29 (***).

D. Hilbert. « *Ueber binäre Formen mit vorgeschriebener Discriminante* » ib., Bd. 31.

L. Schlesinger. « *Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen* » Crelle's Journal, Bd. 105 (****).

Ora, se è così stato sfiorato il problema di

« *Ricercare la totalità delle superficie Riemanniane ad* n *fogli, le quali sono diramate in modo prestabilito in* w *dati posti* »,

sembra che esso, tuttavia, non sia stato trattato finora nella sua generalità. Rispetto a ciò la maggior parte dei risultati a cui sono pervenuto dovrebbero esser nuovi. Frattanto, mentre mi occupo dell'esposizione di questi risultati, devo pregare anticipatamente di indulgenza il lettore. Perchè, sebbene per lungo tempo io mi sia occupato molto profondamente dell'argomento, ancora non mi è riuscito di portare in ogni caso al termine desiderabile i problemi, che mi si presentarono. Le questioni, alle quali più particolarmente ho rivolta la mia attenzione, sono le seguenti:

(*) Cfr. specialmente: « *Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* » Math. Annalen, Bd. 15, pag. 533 e seguenti.

(**) Inaugural-Dissertation, München, 1879 e Math. Ann., Bd. 17, pag. 473 e seguenti.

(***) Cfr. a pag. 180.

(****) Cfr. a pag. 185 e pag. 194. Le osservazioni che vi sono esposte sono però inesatte, perchè esse hanno per base il presupposto che le superficie Riemanniane contemplate dall'Autore siano determinate univocamente dai loro punti di diramazione.

I) Qual'è il numero N delle superficie Riemanniane ad n fogli, che sono diramate in w posti dati?

II) Qual'è il gruppo delle equazioni algebriche di grado N da cui dipende la determinazione di quelle superficie?

III) Quante sono le radici reali di questa equazione, e quante le coppie di radici imaginarie coniugate, nell'ipotesi che i w punti di diramazione siano in parte reali, in parte imaginari a coppie coniugate?

IV) Quali sono, nei casi più semplici, le funzioni algebriche, che definiscono le N superficie Riemanniane?

Aggiungerò più tardi, in luogo opportuno, le determinazioni più prossime di questi quesiti, che senza di ciò resterebbero in parte indeterminati. A questi quesiti corrispondono ordinatamente le prime quattro parti della Memoria. Nella quinta parte io tratto, colla massima brevità, di una generalizzazione ovvia del presente problema.

PARTE PRIMA

DETERMINAZIONI DI NUMERO.

---

§ 1.

Introduzione della superficie Riemanniana.

Era essenziale per le mie ricerche di considerare la superficie Riemanniana come una forma definita in modo puramente topologico, quindi affatto indipendente dalle funzioni che vi si distendono sopra.

Corrispondentemente a questo modo di vedere, le soluzioni del problema di determinare le superficie Riemanniane, che posseggono dati punti di diramazione, sono forme topologiche e non sono quantità numeriche. Esse mutansi in queste, solo quando al posto delle superficie vengono introdotti come incognite quei valori numerici che caratterizzano completamente le singole superficie. Ora io pongo la definizione della superficie di Riemann ad n fogli, che è diramata nei punti $a_1, a_2, \ldots, a^w$ del piano E dei numeri complessi, nel seguente modo:

Nel piano E si tirino da un qualunque punto O ai punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ delle linee

$$l_1, l_2, \ldots, l_w,$$

le quali non seghino sè stesse, nè l'una l'altra (fuor del punto O). Lungo queste lince si tagli il piano E, onde questo piano si muterà nel piano E*. Il piano E* è limitato dai $2w$ orli dei tagli eseguiti. L'ordine di successione delle linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ sia scelto in guisa che, in un giro negativo intorno al punto O, gli orli si succedano nell'ordine

$$l_1^+ \; l_1^- \; l_2^+ \; l_2^- \; \ldots \; l_w^+ \; l_w^-. \qquad (*)$$

Si depongano ora uno sull'altro n esemplari del piano E* e si indichino, in una qualunque successione, come $1^0, 2^0, \ldots, n^{mo}$ foglio. La superficie di Riemann nasce ora connettendo lungo i tagli $l_1, l_2, \ldots, l_w$ gli n fogli l'uno all'altro nel seguente modo. A ciascuna linea

$$l_1, l_2, \ldots, l_w$$

si coordini una sostituzione

$$S_1, S_2, \ldots, S_w$$

di n elementi. Se, per es., è

$$S_k = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix},$$

si connettano lungo il taglio l_k gli orli positivi dei fogli $1, 2, \ldots, n$ rispettivamente coi negativi dei fogli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, cosicchè con un giro positivo intorno al punto a_k in generale si perviene dal foglio i al foglio α_i.

Le sostituzioni $S_1, S_2, \ldots, S$, che si sono scelte per produrre la superficie, devono soddisfare alle seguenti due condizioni

I) *Mediante le sostituzioni deve esser possibile il passaggio da ogni elemento ad ogni altro.*

II) *L'insieme di tutte le sostituzioni deve produrre l'identità, deve quindi essere*

$$S_1 \, S_2 \ldots S_w = 1.$$

La prima condizione, che può anche essere enunciata così: *il gruppo generato da* $S_1, S_2, \ldots, S_w$ *deve esser transitivo*, ha per conseguenza che la superficie costruita si connette a sè stessa. In conseguenza della seconda condizione, per un giro intorno al punto O non si ha nessun scambio di fogli.

(*) Nell'esecuzione di un taglio, l'orlo a sinistra del taglio riesce indicato come positivo. Finalmente chiamasi « negativo » un giro intorno ad un punto nel senso degli indici dell'orologio.

Come si vede, secondo la definizione qui data, una superficie di Riemann è completamente determinata se noi diamo:

1) I punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_w$.

2) Il punto O e le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ uscenti di esso.

3) La numerizzazione degli n fogli E*.

4) Le sostituzioni $S_1, S_2, \ldots, S_w$ coordinate alle linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$.

§ 2.

Confronto di superficie Riemanniane—Coordinamento delle superficie a sistemi di sostituzioni.

Consideriamo ora due superficie di Riemann F ed F', che vogliamo supporre coincidenti nella condizione parziale (1), cioè dotati dei medesimi punti di diramazione. Imaginiamo nel piano E un punto A diverso da questi punti di diramazione, e consideriamo i cammini W che incominciano e finiscono in A senza passare per alcun punto di diramazione.

Ora *se i fogli delle due superficie* F *ed* F' *si possono numerizzare in guisa che lungo ogni cammino* W *i fogli di una delle due superficie subiscano esattamente gli stessi scambi dei fogli dell'altra superficie, le due superficie verranno riguardate come non diverse. In caso contrario le superficie si considerano come diverse.*

Si dimostra facilmente che due superficie, le quali secondo questa convenzione si comportano come non diverse, si comportano pure come non diverse se al punto A si sostituisce un altro punto B qualunque. Inoltre risulta chiaramente dalla nostra convenzione, che si ottengono già tutte le superficie diverse coi punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_w$, se delle condizioni di determinazione (1), (2), (3), (4) si scelgono in tutti i modi soltanto le ultime, cioè le sostituzioni $S_1, S_2, \ldots, S_w$, fissando una volta per sempre le rimanenti condizioni.

Per conseguenza otterremo tutte le superficie Riemanniane coi punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_w$ determinando tutti i sistemi di W sostituzioni

$$S_1, S_2, \ldots, S_w$$

che soddisfanno alle condizioni (I) e (II).

A due differenti di cotali sistemi

$$S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_w$$

ed

$$S'_1\ ,\ S'_2\ ,\ \ldots\ ,\ S'_w$$

corrisponderà manifestamente una medesima superficie di Riemann, quando, e soltanto allora, siano i tre sistemi trasformabili uno nell'altro; cioè quando esista una sostituzione T tale, che siano

$$S_1 = TS'_1T^{-1}\ ,\ S_2 = TS'_2T^{-1}\ ,\ \ldots\ ,\ S_w = TS'_wT^{-1}.$$

Perchè soltanto in questo caso, con un'opportuna numerizzazione dei fogli, si può ottenere che sopra ogni cammino chiuso passante per O i fogli delle due superficie subiscano i medesimi scambi. Noi riassumiamo queste considerazioni nel seguente teorema:

Se si fissano le linee $l_1\ ,\ l_2\ ,\ \ldots\ ,\ l_w$, *che da un qualunque punto* O *vanno ai punti* $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_w$, *le superficie Riemanniane coi punti di diramazione* $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_w$ *sono univocamente coordinate ai sistemi di* w *sostituzioni*

$$S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_w$$

soddisfacenti alle condizioni (I) *e* (II) *del* § 1, *dove tuttavia sono da riguardarsi come non diversi due sistemi trasformabili uno nell'altro.*

In seguito io designerò le singole superficie F mediante il sistema delle sostituzioni ad esse coordinate, quindi porremo

$$F = (S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_w).$$

Se però fosse richiesto di far risaltare nella notazione le linee $l_1\ ,\ l_2\ ,\ldots,\ l_w$, io scriverò

$$\begin{pmatrix} l_1 & , & l_2 & ,\ldots, & l_w \\ S_1 & , & S_2 & ,\ldots, & S_w \end{pmatrix}.$$

Secondo quando precede la superficie

$$(S_1'\ ,\ S_2'\ ,\ \ldots\ ,\ S_w')$$

è identica alla superficie

$$(S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_w)$$

quando esista, ed allora soltanto, una sostituzione T soddisfacente alle equazioni

$$S_1' = TS_1T^{-1}\ ,\ S_2' = TS_2T^{-1}\ ,\ \ldots\ ,\ S_w' = TS_wT^{-1}.$$

Consideriamo una qualunque delle superficie ad n fogli

$$(S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_w)$$

coi punti di diramazione $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_w$. Evidentemente la sostituzione S_i dà subito il « modo » della diramazione nel punto a_i, cioè la sostituzione lascia riconoscere senz'altro in quanti cicli si raggruppino in a_i i fogli, e quanti fogli connetta ogni singolo ciclo. Per es., il punto a_i sarà un punto di diramazione semplice, se la sostituzione S_i sarà una trasposizione, e soltanto allora. Se quindi poniamo il problema di determinare tutte le superficie che nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ sono diramate in modo prescritto, dobbiamo cercare tutti i sistemi di w sostituzioni

$$S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_w$$

soddisfacenti alle condizioni I) e II), dove per ciascuna sostituzione è anche prescritto il numero dei cicli ed il numero degli elementi contenuti in ciascun ciclo. Dovendo, per es., determinare tutte le superficie che nei w punti sono diramate semplicemente, noi dobbiamo costruire tutti i sistemi di w trasposizioni

$$t_1\ ,\ t_2\ ,\ \ldots\ ,\ t_w,$$

che soddisfanno alle condizioni I) e II) del § 1.

Noi dobbiamo rivolgere anzitutto la nostra attenzione a questo caso, in cui tutti i punti di diramazione devono essere semplici, ed in proposito dobbiamo trattare della determinazione del numero di queste superficie. Secondo quanto precede possiamo dire:

Il numero delle superficie Riemanniane ad n *fogli con* w *dati punti di diramazione semplici coincide col numero delle soluzioni dell'equazione*

$$t_1\, t_2\, \ldots\, t_w = 1 \tag{1}$$

per mezzo di w *trasposizioni* $t_1\ ,\ t_2\ ,\ \ldots\ ,\ t_w$ *formate con* n *elementi e che permettano il passaggio da ogni elemento ad ogni altro.*

Due soluzioni dell'equazione (1), che siano trasformabili una nell'altra, devono, inoltre, riguardarsi come non diverse.

§ 3.

Numero delle rappresentazioni di una sostituzione mediante un prodotto di w trasposizioni.

Il determinare il numero delle soluzioni della equazione (1) nella loro dipendenza da n e w è un problema molto complicato, e soltanto dopo molte ricerche infruttuose mi è riuscito di ottenere un risultato in qualche modo soddisfacente. Anzitutto mi occupo del seguente problema, che forse offre già in sè stesso un interesse:

Si vuol sapere in quanti modi possa esprimersi una data sostituzione S *fra* n *elementi come prodotto di* w *trasposizioni.*

Il numero cercato potrà indicarsi con

$$[S]_w.$$

In generale, indicando con Σ un sistema qualunque $S_1, S_2, \ldots, S_k$ di quelle sostituzioni, con $[\Sigma]_w$ non vogliamo intendere altro che la somma

$$[S_1]_w + [S_2]_w + \ldots + [S_k]_w.$$

Dopo di che, $[\Sigma]_w$ significa il numero dei diversi sistemi di trasposizioni $t_1, t_2, \ldots, t_w$ che soddisfanno alla condizione che il prodotto $t_1 t_2 \ldots t_w$ si trovi nel sistema Σ. Osserviamo subito che questo numero possiede le seguenti proprietà:

In primo luogo è:

$$[\Sigma]_w = [T^{-1} \Sigma T]_w,$$

quando T indichi una sostituzione arbitrariamente scelta e $T^{-1} \Sigma T$ quel sistema di sostituzioni che nasce da Σ mediante la trasformazione di ogni singola sostituzione con T.

In secondo luogo, se

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\rho$$

indicano le $\rho = \dfrac{n(n-1)}{2}$ trasposizioni prese in una successione qualunque, è

$$(2) \qquad [\Sigma]_w = [\Sigma\tau_1]_{w-1} + [\Sigma\tau_2]_{w-1} + \ldots + [\Sigma\tau_\rho]_{w-1}$$

intendendo con $\Sigma\tau_i$ quel sistema di sostituzioni che nasce da Σ moltiplicandone ogni sostituzione per τ_i. Consideriamo adesso un particolare sistema Σ: quello formato nel seguente modo. Decomponiamo il numero n in una somma di r numeri positivi:

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r,$$

che ordiniamo per grandezza in guisa che sia

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3 \geq \ldots \geq \nu_r > 0.$$

Corrispondentemente a questo spezzamento separiamo gli n elementi, con cui formiamo le sostituzioni, in qualunque modo in r gruppi

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1}; \ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu_2}; \ldots; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_r},$$

di cui il primo contiene ν_1 elementi, il secondo $\nu_2, \ldots$, l'ultimo ne contiene ν_r.

Indichiamo inoltre con

$$\Gamma_1 = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1})$$

il sistema di tutte le $\nu_1!$ sostituzioni che possono formarsi cogli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1}$. Cosicchè questo sistema deve ridursi alla identità se è $\nu_1 = 1$. Ognuna delle notazioni

$$\Gamma_2 = \Gamma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu_2}), \ldots, \Gamma_r = \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_r})$$

possiede significato analogo.

Finalmente indichiamo con S una qualunque delle $n!$ sostituzioni che si possono formare con tutti gli n elementi.

Il sistema Σ, che noi consideriamo, sia ora il sistema delle $\nu_1! \nu_2! \ldots \nu_r!$ sostituzioni

$$(S \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_r);$$

per brevità diremo che *il sistema* $(S \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_r)$ *ed il numero* $[S \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_r]_w$ « appartengono » *allo spezzamento* $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ *del numero* n.

Ora, per la (2), è

$$(3) \qquad [S\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_r]_w = [S\Gamma_1\Gamma_3 \ldots \Gamma_r \tau_1]_{w-1} + \ldots + [S\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_r \tau_\rho]_{w-1}$$

Il secondo membro di questa equazione si può mettere in forma conveniente pel nostro scopo.

Prendiamo anzitutto una trasformazione τ formata con due elementi α, o con due elementi β, ..., o con due elementi λ: è evidente che il sistema

$$(S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\,\ldots\,\Gamma_r\,\tau)$$

conterrà esattamente le stesse sostituzioni del sistema

$$(S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\,\ldots\,\Gamma_r).$$

Queste trasposizioni τ forniscono quindi al secondo membro della (3) il contributo

$$\left[\binom{\nu_1}{2}+\binom{\nu_2}{2}+\ldots+\binom{\nu_r}{2}\right]\cdot[S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\,\ldots\,\Gamma_r]_{w-1},$$

dove, secondo l'uso, è scritto $\binom{\nu_1}{2}, \ldots$ per $\frac{\nu_1(\nu_1-1)}{2}, \ldots$.

Prendendo inoltre quei termini del secondo membro della (3) i quali corrispondono alle trasposizioni

$$\tau'=(\alpha_1\,\beta_1)\;,\;\;\tau''=(\alpha_2\,\beta_1)\,,\ldots,\tau^{(\nu_1)}=(\alpha_{\nu_1}\,,\,\beta_1)\,,$$

essi danno complessivamente il contributo

$$[S\,\Gamma_2\,\Gamma(\alpha_1\,,\ldots,\alpha_{\nu_1}\,,\,\beta_1)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_r]_{w-1}-[S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}\,,$$

perchè le sostituzioni

$$\Gamma_1\,\tau'\;,\;\;\Gamma_1\,\tau''\,,\ldots,\Gamma_1\,\tau^{(\nu_1)}\,,$$

formano, nel loro insieme, il sistema $\Gamma(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1},\beta_1)$ diminuito del sistema $\Gamma_1=\Gamma(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1})$. In seguito a ciò le trasposizioni del tipo $(\alpha\beta)$ forniscono al secondo membro della (3) il contributo

$$\sum_1^{\nu_2}{}_i\,[S\,\Gamma_2\,\Gamma(\alpha_1\,,\ldots,\alpha_{\nu_1}\,,\,\beta_i)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_{\nu_r}]_{w-1}-\nu_2\,[S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}\,.$$

Analogamente formiamo il contributo che forniscono le trasposizioni dei tipi

$$(\alpha\gamma)\,,\ldots,(\alpha\lambda)\;;\;(\beta\gamma)\,,\ldots,(\beta\lambda)\;;\ldots$$

rispettivamente, ed otteniamo in tal modo

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w=f\cdot[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}\\&+\sum_1^{\nu_1}{}_i[S\Gamma_2\Gamma(\alpha,\beta_i)\Gamma_3\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\sum_1^{\nu_2}{}_i[S\Gamma_3\Gamma(\alpha,\gamma_i)\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\ldots+\sum_1^{\nu_r}{}_i[S\Gamma_r\Gamma(\alpha,\lambda_i)\ldots\Gamma_{r-1}]_{w-1}\\&\qquad+\sum_1^{\nu_3}{}_i[S\Gamma_3\Gamma(\beta\gamma_i)\Gamma_i\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\ldots+\sum_1^{\nu_r}{}_i[S\Gamma_r\Gamma(\beta,\lambda_i)\ldots\Gamma_{r-1}]_{w-1}\\&\qquad+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&\qquad\qquad+\sum_1^{\nu_r}{}_i[S\Gamma_r\Gamma(\varepsilon\,,\,\lambda_i)\ldots\Gamma_{r-2}]_{w-1}\,,\end{aligned}\right.$$

dove il fattore f ha il valore

$$(5)\qquad f=\binom{\nu_1}{2}+\binom{\nu_2}{2}+\ldots+\binom{\nu_r}{2}-(\nu_1+2\,\nu_2+3\,\nu_3+\ldots+r\,\nu_r)+n.$$

Il significato dei rimanenti simboli usati nel secondo membro della (4) non richiede nessun maggior schiarimento.

Del numero f diremo che « *appartiene* » allo spezzamento $(\nu_1,\ldots,\nu_r)$ del numero n.

Ora, i singoli sistemi che entrano sotto i segni di somma nel secondo membro della (4) si ponno decomporre come segue. Consideriamo, per es., il sistema

$$(S\,\Gamma_2\,\Gamma(\alpha\,,\,\beta_1)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_r):$$

noi lo possiamo comporre coi seguenti sistemi:

$$(S\Gamma(\beta_2\,,\ldots,\beta_{\nu_2})\,\Gamma(\alpha\,,\,\beta_1)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_r)\,,$$

$$(S\cdot(\beta_1\,\beta_2)\cdot\Gamma(\beta_2\,,\ldots,\beta_{\nu_2})\Gamma(\alpha\,,\,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r)\,,$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$(S\,(\beta_1\,\beta_{\nu_2})\cdot\Gamma\,(\beta_2\,,\ldots\beta_{\nu_2})\,\Gamma(\alpha\,,\,\beta_1)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_r)\,,$$

ognuno dei quali appartiene allo spezzamento $(\nu_1+1\,,\,\nu_2-1\,,\,\nu_3\,,\ldots,\nu_r)$ di n.

Decomponendo in simil modo tutti i sistemi che entrano nella (4) sotto i segni di somma, noi riconosciamo che al secondo membre della medesima (4) si ottiene una somma di numeri appartenenti rispettivamente ai seguenti spezzamenti di n:

$$(\nu_1+1\,,\,\nu_2-1\,,\,\nu_3\,,\,\dots\,,\,\nu_r)\;;\;(\nu_1+1\,,\,\nu_2\,,\,\nu_3-1\,,\,\dots\,,\,\nu_r)\;;\;\dots\;;\;(\nu_1+1\,,\,\nu_2\,\nu_3\,,\,\dots\,,\,\nu_r-1)$$

$$(\nu_1\,,\,\nu_2+1\,,\,\nu_3-1\,,\,\dots\,,\,\nu_r)\;;\;\dots\;;\;(\nu_1\,,\,\nu_2+1\,,\,\nu_3\,,\,\dots\,,\,\nu_r-1)$$

. . . .

. . . .

$$(\nu_1\,,\,\nu_2\,,\,\nu_3\,,\,\dots\,,\,\nu_{r-1}+1\,,\,\nu_r-1).$$

Questi spezzamenti possono chiamarsi *contigui* allo spezzamento $(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_r)$. Si dimostra ora senza difficoltà che il numero f appartenente allo spezzamento $(\nu_1\,,\,\nu_2\,,\,\dots\,,\,\nu_r)$ è più piccolo del corrispondente numero formato per un qualunque spezzamento contiguo (*). Quindi, se denotiamo con

$$f_1'\,,\,f_2'\,,\,\dots$$

i numeri che appartengono agli spezzamenti contigui di $(\nu_1\,,\,\nu_2\,,\,\dots\,,\,\nu_r)$, inoltre con

$$f_1''\,,\,f_2''\,,\,\dots$$

quei numeri che appartengono ai contigui dei contigui, e così via, il numero f sarà più piccolo di ognuno di questi numeri $f_1'\,,f_2'\,,\dots,f_1''\,,f_2''\,,\dots$.

Da ciò si riesce ora a concludere, che

$$[S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\dots\Gamma_r]_w=cf^w+c_1'\,(f_1')^w+c_2'\,(f_2')^w+\dots+c_1''\,(f_1'')^w+c_2''\,(f_2'')^w+\dots$$

dove le $c\,,e_1'\,,c_2'\,,\dots,c_1''\,,c_2''\,,\dots$ denotano numeri razionali indipendenti da w. Supponiamo già dimostrato ciò per tutti gli spezzamenti contigui a $(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_r)$. Allora, in virtù della (4) sarà

$$[S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\dots\Gamma_r]_w=f^w\cdot[S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\dots\Gamma_r]_{w-1}+\sum_{i,k}d_{i,k}\,(f_i^{(k)})^{w-1},$$

dove i coefficienti $d_{i,k}$ indicano numeri razionali indipendenti dal numero w.

(*) Veggasi il n.° 1 dell'Appendice,

Se in quest' equazione poniamo successivamente

$$w=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\dots\,,\,w$$

e combiniamo tutte le equazioni così ottenute, troviamo

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_r]_w=f^w\cdot[S\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_r]_0+\sum_{i,k}d_{i,k}\,\{\,f^{w-1}+f^{w-2}f_i^{(k)}+\dots+(f_i^{(k)})^{w-1}\,\}.$$

Poichè f è diverso da ciascuno dei numeri $f_i^{(k)}$, la somma, che appare nel secondo membro, si può metter nella forma

$$\sum_{i,k}\frac{d_{i,k}}{f-f_i^{(k)}}\,[f^w-(f_3^{(k)})^w]\,,$$

e con ciò otteniamo

$$[S\,\Gamma_1\,\Gamma_2\dots\Gamma_r]_w=cf^w+c_1'\,(f_1')^w+c_2'\,(f_2')^w+\dots$$

dove le $c\,,\,c_1'\,,\,c_2'\,,\,\dots$ indicano dei numeri razionali indipendenti da w.

Per completare la dimostrazione bisogna mostrare ancora, che colla continuata formazione degli spezzamenti contigui, si arriva finalmente ad uno spezzamento per il quale vale il teorema da dimostrare.

Ora nel passaggio da $(\nu_1\,,\,\nu_2\,,\,\dots\,,\,\nu_r)$ ad un altro spezzamento contiguo, uno degli r numeri $\nu_1\,,\,\nu_2\,,\,\dots\,,\,\nu_r$ viene aumentato di un'unità. Alla fine dovrà pervenirsi allo spezzamento, per il quale sono $r=1$ e $r_1=n$, il quale non possiede nessuno spezzamento contiguo. Per questo spezzamento si ha

$$f=\rho=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2},$$

ed il corrispondente sistema $(S\Gamma_1)$ consta di tutte le $n!$ sostituzioni. Ora, poichè ognuna delle f^w combinazioni

$$t_1\,t_2\,\dots\,t_w$$

di w trasposizioni appartiene al sistema $(S\Gamma_1)$, così è in questo caso

$$[S\Gamma_1]_w=f^w\,,$$

con che la dimostrazione è finita.

Applichiamo adesso il risultato ottenuto allo spezzamento

$$n = 1 + 1 + \ldots + 1 \qquad (r = n \;,\; \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n = 1).$$

Quì il sistema $[S\, \Gamma_1\, \Gamma_2 \ldots \Gamma_n]$ consta di una sostituzione S; ed il numero $[S\, \Gamma_1\, \Gamma_2 \ldots \Gamma_n]_w$ è quello delle rappresentazioni di S come prodotto di w trasposizioni.

Con che noi troviamo il seguente teorema, il quale risolve, fino ad un certo punto, il problema proposto:

« *Il numero delle rappresentazioni di una sostituzione* S *di* n *elementi come prodotto di* w *trasposizioni è eguale a*

$$c_1 f_1^w + c_2 f_2^w + \ldots + c_k f_k^w \;,$$

dove i numeri $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *non dipendono da* w. *I numeri* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *dipendono razionalmente dalla sostituzione* S *e dal numero* n. *Invece i numeri* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *sono interi che dipendono esclusivamente da* n, *e sono formati nel seguente modo. Si supponga scomposto* n *in tutti i modi possibili in somma di numeri interi positivi*

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r \;,$$

dove è supposto

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3 \geq \ldots \geq \nu_r > 0 \;,$$

e si ponga

$$f = \frac{\nu_1(\nu_1 - 1)}{2} + \ldots + \frac{\nu_r(\nu_r - 1)}{2} - (\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + r\,\nu_r) + n.$$

I numeri f *nascenti in questo modo sono appunto quelli sopra indicati con* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ».

Non mi è riuscito di caratterizzare più da vicino la dipendenza dei coefficienti $c_1, c_2, \ldots, c_k$ da n e dalla sostituzione S, sebbene gli sforzi miei in proposito mi lasciassero presumere una legge semplice di formazione dei medesimi coefficienti.

Si dimostra facilmente che i numeri $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (esclusi quelli che sono nulli) sono due a due eguali ed opposti.

Questa circostanza si poteva anche dedurre dal fatto, che una data sostituzione S è rappresentabile, o soltanto mediante un numero pari, o soltanto con un numero dispari di trasposizioni.

§ 4.

Numero delle superficie di Riemann ad n fogli con w dati punti di diramazione semplici.

Indichiamo con

$$f(w \mid n)$$

il numero delle soluzioni dell'equazione

$$(1) \qquad t_1\, t_2 \ldots t_w = 1$$

mediante w trasposizioni $t_1, t_2, \ldots, t_w$ formato con n elementi.

Questo numero, secondo il paragrafo precedente, si rappresenta nella forma

$$(2) \qquad f(w \mid n) = c_1(n)\,[f_1(n)]^w + c_2(n)\,[f_2(n)]^w + \ldots + c_k(n)\,[f_k(n)]^w \;,$$

ovvero, più brevemente

$$(2') \qquad f(w \mid n) = \Sigma\, c(n) \cdot [f(n)]^w \;,$$

dove, per maggior chiarezza, abbiamo designato i numeri

$$c_1, c_2, \ldots, c_k \quad , \quad f_1, f_2, \ldots, f_k \;,$$

dipendenti soltanto da n, coi simboli

$$c_1(n), c_2(n), \ldots, c_k(n) \quad , \quad f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n).$$

Si può inoltre indicare con

$$\varphi(w \mid n)$$

il numero dei sistemi di trasposizioni, che soddisfanno all'equazione (1) e permettono ad un tempo il passaggio da ciascuno degli n elementi a ciascun altro. In forza della conclusione del § 2 è allora

$$N = \frac{\varphi(w \mid n)}{n\,!}$$

il numero delle superficie Riemanniane ad n fogli con w dati punti di diramazione semplice, escludendo il caso volgare di $n = 2$, in cui è

$$N = 2\,\frac{\varphi(w \mid n)}{n\,!} = 1.$$

Poichè $n > 2$, i $\varphi(w \mid n)$ sistemi di trasposizioni $t_1, t_2, \dots, t_w$ si dividono in gruppi, ciascuno di $n\,!$ sistemi trasformabili uno nell'altro, ed i $n\,!$ sistemi di un gruppo forniscono tutti una medesima superficie Riemanniana.

Vogliamo ora esprimere il numero $\varphi(w \mid n)$ mediante il numero $f(w \mid n)$ a noi già noto.

A questo scopo spezziamo il numero $f(w \mid n)$ in sommandi separando gli $f(w \mid n)$ sistemi $t_1, t_2, \dots, t_w$ in classi. Separiamo cioè gli n elementi in un qualunque modo in gruppi

$$G = a_1, \dots, a_{n_0},$$

$$G_1 = b_1, \dots, b_{n_1},$$

$$G_2 = c_1, \dots, c_{n_2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$G_r = l_1, \dots, l_{n_r},$$

rispettivamente di $n_0, n_1, n_2, \dots, n_r$ elementi, dove, quindi, è

$$n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_r = n,$$

e coordiniamo ai gruppi $G_1, G_2, \dots, G_r$ rispettivamente r numeri qualunque $w_1, w_2, \dots, w_r$, che soddisfacciano alla condizione

$$w_1 + w_2 + \dots + w_r = w.$$

I numeri $n_1, n_2, \dots, n_r$ devono tutti esser maggiori di 1 ed il numero $n_0 \gtreqless 0$. Contiamo ora in una classe tutti quelli degli $f(w \mid n)$ sistemi $(t_1\, t_2 \dots t_w)$ che non contengono gli elementi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0}$, mentre w_1 delle trasposizioni $t_1, t_2, \dots, t_w$ mettono in relazione gli elementi $b_1, \dots, b_{n_1}$, w_2 delle trasposizioni gli elementi $c_1, \dots, c_{n_2}$, e così via, w_r delle trasposizioni gli elementi $l_1, \dots, l_{n_r}$.

Il numero dei sistemi di trasposizioni $(t_1, t_2, \dots, t_w)$ contenuti in una classe ascende, come si riconosce facilmente, a

$$\frac{w\,!}{w_1\,!\,w_2\,!\dots w_r\,!}\,\varphi(w_1 \mid n_1)\cdot\varphi(w_2 \mid n_2)\dots\varphi(w_r \mid w_r).$$

Addizionando adesso rispetto a tutte le classi, si ottiene

$$(3) \qquad f(w|n) = \sum \frac{n\,!}{r!\,n_0!\,n_1!\dots n_r!}\cdot\frac{w\,!}{w_1!\,w_2!\dots w_r!}\,\varphi(w_1 \mid n_1)\,\varphi(w_2 \mid n_2)\dots\varphi(w_r \mid n_r)$$

dove la sommazione è da estendersi a tutte le soluzioni delle equazioni

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_r = n, \\ w_1 + w_2 + \dots + w_r = w, \\ \left(\begin{array}{c} n_0 \geq 0 \;,\; n_1 > 1 \;,\; n_2 > 1, \dots, n_r > 1 \;,\; r > 0 \\ w_1 > 0 \;,\; w_2 > 0, \dots, w_r > 0 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Ora l'equazione fondamentale (3) si può invertire (*). E precisamente si trova:

$$(5) \qquad \varphi(w|n) = \sum (-1)^{r+n_0-1}\, r^{n_0-1}\,\frac{n\,!}{n_0!\,n_1!\dots n_r!}\,\frac{w\,!}{w_1!\,w_2!\dots w_r!}\,f(w_1|n_1)\dots f(w_r|n_r),$$

dove la sommatoria va parimenti estesa alle soluzioni delle equazioni (4). Poniamo ora per $f(w_1|n_1), \dots, f(w_r|n_r)$ le loro espressioni secondo l'equazione (2'), e

---

(*) Veggasi il n.° 2 dell'Appendice.

sommiamo quindi rispetto a $w_1, w_2, \ldots, w_r$, rimanendo fissi $r, n_0, n_1, \ldots, n_r$. Nell'eseguimento di questa sommazione si osservi che $w_1, w_2, \ldots, w_r$ sono assoggettati alle condizioni $w_1 > 0, w_2 > 0, \ldots, w_r > 0$ e $w_1 + w_2 + \ldots + w_r = w$, e si ha da tener conto dell'identità facilmente verificabile

$$\sum \frac{w!}{w_1! w_2! \ldots w_r!} x_1^{w_1} x_2^{w_2} \ldots x_r^{w_r} = s^w - \sum_i (s - x_i)^w + \sum_{i,k} (s - x_i - x_k)^w - + \ldots$$

dove è posto $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_r$, e gli indici $i, k, ..$ devono percorrere i valori $1, 2, \ldots, r$ (*).

L'equazione (5) prende allora la forma

$$(5') \qquad \varphi(w \mid n) = \Sigma\, C_{n_1, n_2, \ldots, n_r} \{ f(n_1) + f(n_2) + \ldots + f(n_r) \}$$

dove i coefficienti $C_{n_1, \ldots n_r}$ sono numeri razionali indipendenti da w, e gli indici di sommatoria $n_1, \ldots, n_r$ sono assoggettati alle condizioni

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r \lesseqgtr n \quad ; \quad n_1 > 1, \; n_2 > 1, \ldots, n_r > 1.$$

Dei diversi numeri $f(n_1)$ i più grandi in valor assoluto sono $-\frac{n_1(n_1-1)}{2}$ e $+\frac{n_1(n_1-1)}{2}$, come risulta dai paragrafi precedenti. Segue da ciò che i valori massimi in grandezza assoluta dell'espressione

$$f(n_1) + f(n_2) + \ldots + f(n_r),$$

che si presenta sotto il segno di somma nella (5'), si hanno per $r = 1$ ed $n_1 = n$ e sono

$$-\frac{n(n-1)}{2} \quad \text{e} \quad +\frac{u(n-1)}{2}.$$

Per conseguenza il numero $\varphi(w \mid n)$ si esprime nella forma

$$(6) \qquad \varphi(w \mid n) = \sum_{s=-\frac{n(n-1)}{2}}^{+\frac{n(n-1)}{2}} C_s s_w$$

dove i coefficienti C_s dipendono da n, ma non da w.

(*) Veggasi il n.° 3 dell'Appendice.

Il numero $\varphi(w \mid n)$ deve annullarsi quando sia w un numero dispari, perchè il numero dei punti di diramazione è necessariamente pari. Quindi sarà $C_{-s} = C_s$. Avuto riguardo a ciò, noi possiamo enunciare il seguente teorema:

Il numero N *delle superficie Riemanniane ad* n *fogli, che posseggono* w *dati punti di diramazione semplici, si può rappresentare nella forma*

$$N = c_1 \cdot 1^w + c_2 \cdot 2^w + c_3 \cdot 3^w + \ldots + c_{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^w$$

dove i coefficienti $c_1, c_2, \ldots, c_{\frac{n(n-1)}{2}}$ *sono numeri razionali dipendenti esclusivamente da* n.

Di questi coefficienti $c_1, c_2, \ldots, c_{\frac{n(n-1)}{2}}$ possono aver valore diverso da zero soltanto quelli i cui indici sono esprimibili nella forma

$$f(n_1) + f(n_2) + \ldots + f(n_r).$$

§ 5.

I casi di $n = 3, 4, 5, 6$ come esempi.

Per i casi di $n = 3, 4, 5, 6$ ho eseguito la determinazione dei coefficienti $c_1, c_2, \ldots$ e ne raccolgo qui i risultati. Premetto l'elenco dei valori dei numeri $f(n)$ ed $f(w \mid n)$ per i medesimi casi.

n :	I numeri $f(n)$:
2	1 , − 1 ,
3	3 , 0 , − 3 ,
4	6 , 2 , 0 , − 2 , − 6 ,
5	10 , 5 , 2 , 0 , − 2 , − 5 , − 10,
6	15 , 9 , 5 , 3 , 0 , − 3 , − 5 , − 9 , − 15.

Se il numero $f(w \mid n)$ indica in quanti modi può esser rappresentata l'identità come prodotto di w trasposizioni fra n elementi, allora si ha

per $n =$	$f(w \mid n) =$
2	1
3	$\frac{1}{3} \cdot 3^w$
4	$\frac{1}{12} \cdot 6^w + \frac{3}{4} \cdot 2^w$
5	$\frac{1}{60} \cdot 10^w + \frac{4}{15} \cdot 5^w + \frac{5}{12} \cdot 2^w$
6	$\frac{1}{360}\, 15^w + \frac{5}{72} \cdot 9^w + \frac{9}{40} \cdot 5^w + \frac{25}{72} \cdot 3^w$

Il numero N delle superficie Riemanniane ad n fogli, le quali in w posti dati sono diramate semplicemente, ascende a

per $n =$	$N =$
2	1,
3	$\frac{1}{18} \cdot 3^w - \frac{1}{2} = \frac{1}{3!} (3^{w-1} - 3)$
4	$\frac{1}{288} \cdot 6^w - \frac{1}{18} \cdot 3^w - \frac{1}{32} \cdot 2^w + \frac{1}{2} = \frac{1}{4!} (2^{w-2} - 4)(3^{w-1} - 3)$
5	$\frac{1}{7200} \cdot 10^w - \frac{1}{288} \cdot 6^w + \frac{1}{450} \cdot 5^w - \frac{1}{72} \cdot 4^w + \frac{1}{18} \cdot 3^w + \frac{1}{12} \cdot 2^w - \frac{5}{9}$,
6	$\frac{1}{2(360)^2} \cdot 15^w - \frac{1}{7200} \cdot 10^w + \frac{1}{2(72)^2} \cdot 9^w - \frac{1}{2(24)^2} \cdot 7^w + \frac{7}{2(36)^2} \cdot 6^w - \frac{1}{360} \cdot 5^w + \frac{1}{36} \cdot 4^w - \frac{19}{324} \cdot 3^w - \frac{19}{144} \cdot 2^w + \frac{727}{1152}$.

In queste tabelle la w denota un numero *pari* positivo qualunque.

§ 6.

Determinazione del numero $f(k_1, k_2, \ldots, k_\rho)$.

Il genere p di una superficie Riemanniana ad n fogli, le cui diramazioni siano equivalenti a W punti di diramazione semplici, è determinato, come è noto, dall'equazione

$$2p + 2n - 2 = W.$$

Se i w punti di diramazione sono tutti semplici, sarà $W = w$. Ora, poichè il genere non può diventar negativo, dovrà il numero N annullarsi per $w = 2, 4, 6, \ldots, 2n-4$; e per $w = 2n-2$, sarà N il numero delle superficie Riemanniane ad n fogli di genere *zero* con dati punti di diramazione semplici. L'ultimo numero può essere determinato per altra via direttamente. A tale scopo trattiamo anzitutto il seguente problema:

« *È data la sostituzione* S *fra* n *elementi, che, decomposta in cicli, può esprimersi con*

$$S = (a_1 \ldots a_{k_1})(b_1 \ldots b_{k_2}) \ldots (l_1 \ldots l_{k_\rho}) = C_1 \ldots C_\rho .$$

Si cerca il numero

$$f(k_1, \ldots, k_\rho)$$

di sistemi di $n + \rho - 2$ *trasposizioni* $t_1, \ldots, t_{n+\rho-2}$, *che soddisfanno alla condizione*

$$(1) \qquad S t_1 t_2 \ldots t_{n+\rho-2} = 1$$

e che permettono inoltre, insieme alla sostituzione S, *un passaggio da ciascuno degli* n *elementi a ciascun altro* ».

Indichiamo con

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots$$

le $\dfrac{n(n-1)}{2}$ trasposizioni e coordiniamo il sistema

$$t_1 t_2 \ldots t_{n+\rho-2}$$

alla trasposizione τ_i, se è $t_1 = \tau_i$. Ad una determinata trasposizione τ_i sono quindi coordinati tanti sistemi quante sono le soluzioni dell' equazione

$$(2) \qquad (S\tau_i) t_2 t_3 \ldots t_{n+\rho-2} = 1$$

soddisfacenti alla condizione che sia possibile un passaggio da ogni elemento ad ogni altro.

Se $\psi(\tau_i)$ indica il numero di queste soluzioni è, chiaramente

$$(3) \qquad f(k_1, k_2, \ldots, k_\beta) = \psi(\tau_1) + \psi(\tau_2) + \ldots + \psi(\tau_i) + \ldots$$

Sia ora dapprima τ_i una trasposizione, la quale connetta elementi di cicli diversi di S, per es. sia $\tau_i = (a_1 b_1)$. Allora sarà

$$(S_{\tau_i}) = (a_1 \ldots a_{k_1} b_1 \ldots b_{k_2}) \ldots (l_1 \ldots l_{k_\rho}),$$

e l' equazione (2) avrà perciò $f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\rho)$ soluzioni. Di qui si intravede, che le trasposizioni, le quali connettono elementi di cicli diversi di S, forniscono al secondo membro dell' equazione (3) il contributo

$$k_1 k_2 f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\rho) + k_1 k_3 f(k_1 + k_3, k_2, \ldots, k_\rho) + \ldots$$

$$= \Sigma k_1 k_2 f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\rho),$$

dove la sommatoria è da estendersi a tutte le combinazioni dei numeri $k_1, k_2, \ldots k_\rho$ a due a due.

In secondo luogo, sia τ_i una trasposizione che collega elementi di un medesimo ciclo di S, sia per es. $\tau_i = (a_1 a_{r+1})$. Allora sarà

$$(S\tau_i) = (a_1 \ldots a_r)(a'_1 \ldots a'_s)(b_1 \ldots b_{k_2}) \ldots (l_1 \ldots l_{k_\rho}), = C_1' C_1'' C_2 \ldots C_\rho$$

dove, per maggior chiarezza, si è scritto $a'_1, \ldots, a'_s$ in luogo di $a_{r+1}, \ldots a_{k_1}$.

Qual' è ora il numero $\psi(\tau_i)$ delle soluzioni della (2), sotto la condizione che le sostituzioni

$$S, (a_1 a_{r+1}) = \tau_i, t_2, \ldots, t_{\nu+\rho-2}$$

permettano un passaggio da ogni elemento a ciascun altro? Osserviamo anzitutto

che in ogni caso non è più possibile tale passaggio mediante il sistema

$$(4) \qquad (S\tau_i), t_2, \ldots, t_{n+\rho-2}.$$

Perchè altrimenti noi potevamo produrre, conformemente a questo sistema, una superficie ad n fogli con

$$(r-1) + (s-1) + (k_2 - 1) + \ldots + (k_\rho - 1) + n + \rho - 3 = 2n - 4$$

punti semplici di diramazione, e quindi di genere -1.

Ma siccome mediante il sistema (4) deve essere certamente possibile un passaggio da ciascun elemento

$$a \qquad b_1, \ldots b_{k_2}, \ldots, l_1, \ldots, l_{k_\rho}$$

ad un elemento a o ad un elemento a', così gli elementi si separano in due gruppi soltanto vicendevolmente connessi. In un gruppo si trovano gli elementi $a_1, \ldots a_r$, nell'altro gli elementi $a'_1, \ldots a'_s$.

Mediante il sistema (4) quindi si connetteranno da un lato gli elementi dei cicli

$$C'_1, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \ldots, C_{\alpha_\lambda}$$

tra loro, e dall'altro lato si connettano tra loro gli elementi dei cicli

$$C''_1, C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \ldots, C_{\beta_\mu}.$$

In corrispondenza a ciò l' equazione (2) si scinde nelle due equazioni

$$(5) \qquad \begin{cases} (C'_1 C_{\alpha_1} \ldots C_{\alpha_\nu}) t'_1 t'_2, \ldots, t'_\sigma = 1, \\ (C''_1 C_{\beta_1} \ldots C_{\beta_\mu}) t''_1 t''_2, \ldots, t''_\tau = 1, \end{cases}$$

dove $t'_1, t'_2, \ldots, t'_\sigma$ e $t''_1, t''_2, \ldots, t''_\tau$ designano rispettivamente quelle, tra le sostituzioni $t_2, t_3, \ldots, t_{n+\rho-1}$, che collegano gli elementi dei cicli $C'_1, C_{\alpha_1}, \ldots, C_{\sigma_\lambda}$ o $C''_1, C_{\beta_1}, \ldots, C_{\beta_\mu}$ rispettivamente. Facilmente si dimostra che deve essere

$$
(6) \qquad \begin{cases} \sigma = r + k_{\alpha_1} + \ldots + k_{\alpha_\lambda} + \lambda - 1 \,, \\ \tau = s + k_{\beta_1} + \ldots + k_{\beta_\mu} + \mu - 1 \,, \end{cases}
$$

poichè ogni altra ipotesi condurrebbe ad una superficie connessa di genere negativo (*). Le equazioni (5) hanno rispettivamente $f(r, k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda})$ ed $f(s, k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu})$ soluzioni, e quindi esistono

$$
f(r\,,\,k_{\alpha_1}\,,\,\ldots\,,\,k_{\alpha_\lambda})\; f(s\,,\,k_{\beta_1}\,,\,\ldots\,,\,k_{\beta_\mu})
$$

sistemi $t'_1, \ldots, t'_\sigma, t''_1, \ldots, t''_\tau$, che soddisfanno alle equazioni (5).

Ora, da ciascuno di questi sistemi possono essere formate esattamente

$$
\frac{(n + \rho - 3)\,!}{\sigma\,!\;\tau\,!}
$$

soluzioni dell' equazione (2). Possiamo cioè identificare σ trasposizioni qualunque

$$
t_{\alpha'}\,,\, t_{\alpha''}\,,\,\ldots\,,\, t_{\alpha^{(\sigma)}} \quad (\alpha' < \alpha'' < \ldots < \alpha^{(\sigma)})
$$

con

$$
t'_1\,,\, t'_2\,,\,\ldots\,,\, t'_\sigma\,,
$$

dopo di che le rimanenti trasposizioni t, nell' ordine di successione che posseggono, nel complesso $t_2, t_3, \ldots, t_{n+\rho-2}$ sono da identificare con $t''_1 \cdot t''_2, \ldots, t_\tau''$.

Per conseguenza il numero $\psi(\tau_i)$ per $\tau_i = (a_1\, a_{r+1})$, è espresso dalla somma

$$
(7) \qquad \Phi_r(k_1|k_2,\ldots,k_\rho) = \sum \frac{(n+\rho-3)!}{\sigma!\,\tau!} f(r\,, k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda})\, f(s\,, k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_r})
$$

dove la sommatoria si riferisce a tutti gli spezzamenti di

$$
k_2\,,\, k_3\,,\,\ldots\,,\, k_\rho
$$

in due gruppi $k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda}$ e $k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu}$. Il numero s è eguale a $k_1 - r$, i numeri σ e τ hanno i valori (6). È da osservare, che nelle separazioni in gruppi, si devono considerare anche quelle, in cui in uno dei gruppi non vi è *nessun* numero $k_2, \ldots, k_\rho$ e coll'altro sono inclusi tutti questi numeri.

(*) Veggasi il n.° 4 dell' appendice.

Inoltre al simbolo insignificativo $f(1)$ è da attribuirsi il valore 1. Il numero $\psi(\tau_i)$ possiede manifestamente il medesimo valore (7) anche per ciascuna delle ipotesi

$$
\tau_i = (a_2\,,\, a_{r+2}) \quad , \quad \tau_i = (a_3\,,\, a_{r+3})\,,\,\ldots\,,
$$

cosicchè le trasposizioni, che collegano due elementi a, forniscono al secondo membro della (3) il contributo

$$
\frac{1}{2} k_1[\Phi_1(k_1|k_2,\ldots,k_\rho) + \Phi_2(k_1|k_2\,,\ldots,k_\rho) + \ldots + \Phi_{k_1-1}(k_1|k_2\,,\ldots,k_\rho)].
$$

Quì il fattore $\frac{1}{2}$ compensa il fatto che ogni trasposizione $(a_i\, a_j)$ è contata due volte, cioè una volta come trasposizione $(a_i\, a_j)$ e l' altra come trasposizione $(a_j\, a_i)$.

Un contributo analogo forniscono ora le trasposizioni che collegano due elementi b, o due elementi c, ecc., cosichè la equazione (3) assume la seguente forma :

$$
(8) \qquad f(k_1,k_2,\ldots,k_\rho) = \sum k_1 k_2\, f(k_1+k_2\,, k_3,\ldots,k_\rho) + \sum \frac{1}{2} k_1 \sum_{1}^{k_1-1}{}_r \Phi_r(k_1|k_2,\ldots,k_\beta).
$$

Partendo da questa formola (8), io sono condotto attraverso una penosa induzione alla congettura che sia

$$
(9) \qquad f(k_1\,, k_2\,, \ldots, k_\rho) = (n + \rho - 2)!\, n^{\rho-3} . \frac{k_1^{k_1+1}}{k_1\,!} . \frac{k_2^{k_2+1}}{k_2!} \;\ldots\; \frac{k_\rho^{k_\rho+1}}{k_\rho\,!}
$$

$$
(k_1 + k_2 + \ldots + k_\rho = n).
$$

Per mostrare come si presenta questa congettura, basta far vedere che l' equazione (8) è identicamente soddisfatta dal precedente valore di $f(k_1, k_2, \ldots, k_\rho)$. Poichè questa equazione permette il calcolo successivo del valore di $f(k_1, k_2, \ldots, k_\rho)$, partendo dal valor $f(1) = 1$, il quale è in accordo colla (9).

Non starò quì ad esporre per disteso la dimostrazione, che ancor resterebbe a darsi, che l' equazione (8) diventa un' identità colla sostituzioae (9) (*). In ori-

(*) Veggasi il n.° 5 dell'Appendice.

gine mi ero servito a tal'uopo di alcune identità che ho pubblicato nello *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (*). Più tardi però ho riconosciuto che mediante alcune altre identità si giunge più direttamente allo scopo. Credo che queste identità possano quì trovar posto, perchè sono di natura semplice.

Se u, v, $x_1 \cdot x_2$, ..., x_ρ designano delle grandezze variabili, si ha

$$\Sigma (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1}$$

$$= (u + v + x_1 + \ldots + x_\rho)^{\rho-1} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)$$

e

$$\Sigma (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu}$$

$$= (u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_\rho)^{\mu} \cdot \frac{1}{u}$$

dove la sommatoria si riferisce a tutte le separazioni di x_1, x_2, ..., x_ρ in due gruppi x_{α_1}, x_{α_2}, ..., x_{α_λ} ed x_{β_1}, x_{β_2}, ..., x_{β_μ}.

§ 7.

Numeri per le superficie Riemanniane di genere *zero*.

Ora è facile determinare il numero delle superficie Riemanniane ad n fogli e di genere *zero*, le quali soddisfanno alle seguenti condizioni:

1) I punti di diramazione devono esser *dati* tutti quanti.

2) In tutti questi punti, uno eccettuato, la diramazione deve esser semplice.

3) Nell'ultimo punto gli n fogli devono raggrupparsi in m_1 cicli di n_1 fogli ciascuno, m_2 cicli di n_2 fogli, ..., m_ν cicli di n_ν fogli.

Le superficie in discorso sono coordinate una ad una alle diverse soluzioni dell'equazione

$$(1) \qquad S t_1 t_2 \ldots t_{n+\rho-2} = 1,$$

(*) Bd. 35, p. 56. *Ueber einige Verallgemeinerungen der Leibniz'schen Differentiationsformel und des polynomischen Satzes* ».

dove S indica una sostituzione con m_1 cicli di n_1 elementi, m_2 di n_2, ..., m_ν di n_ν e t_1, t_2, ..., $t_{n+\rho-2}$ denotano trasposizioni.

Il numero ρ è eguale al numero totale dei cicli di S, quindi

$$\rho = m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu.$$

Ora, esistono, come è noto,

$$M = \frac{n!}{m_1!\, n_1^{m_1} \cdot m_2!\, n_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot m_\nu!\, n_\nu^{m_\nu}}$$

sostituzioni del carattere indicato, e quindi il numero delle soluzioni dell'equazione (1) sarà

$$M . f(k_1, k_2, \ldots, k_\rho),$$

dove, dei numeri k_1, k_2, ..., k_ρ, ne sono m_1 eguali ad n_1, m_2 ad n_2, ..., m_ν ad n_ν.

Ma siccome le soluzioni della (1) trasformabili una nell'altra noi le riguardiamo come *non diverse*, così noi otteniamo (per $n > 2$) il numero cercato di superficie Riemanniane espresso da

$$\frac{M \cdot f(k_1, \ldots, k_\rho)}{n!} = (n + m_1 + \ldots + m_\nu - 2)!\, n^{m_1 + \ldots + m_\nu - 3} \frac{1}{m_1!} \left(\frac{n_1^{n_1}}{n_1!}\right)^{m_1} \cdots \frac{1}{m_\nu!} \left(\frac{n_\nu^{n_\nu}}{n_\nu!}\right)^{m_\nu}$$

In particolare, ponendo $\nu = 1$, $m_1 = n$, $n_1 = 1$, noi otteniamo il seguente risultato (*):

Il numero delle superficie Riemanniane di genere zero, *che posseggono* $2n-2$ *punti semplici di diramazione dati, ascende a*

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\, n^{n-4}.$$

Nel solo caso di $n = 2$, questo numero è anche da moltiplicarsi per 2.

(*) Il numero qui determinato indica, manifestamente, anche il numero dei fasci di forme binarie d'ordine n, che posseggono un dato discriminante. È interessante il confrontare con questo numero quello calcolato dai signori F. Meyer, Schubert Stephanos pei fasci di forme binarie d'ordine n con un dato determinante funzionale. L'ultimo numero è eguale a $\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!}$. Si confronti anche un lavoro di Hilbert nei Math. Ann. Bd. 33, p. 227.

PARTE SECONDA

GRUPPI DI MONODROMIE.

§ 1.

Gruppi A e B di monodromie.

Noi vogliamo supporre che i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ si mettano simultaneamente in moto nel piano E dei numeri complessi e passino alla fine nelle nuove posizioni $a'_1, a'_2, \ldots, a'_w$. Inoltre, il sistema di punti $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ deve però constare, in ogni stadio del movimento, di w punti distinti. Se ora consideriamo una superficie Riemanniana F ad n fogli, la quale sia diramata nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, la medesima si cambierà continuamente col sistema di punti $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$, e sarà passata in una superficie determinata F′, quando il sistema di punti avrà raggiunta la posizione finale $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_w)$.

Ora, nel caso che questa posizione finale coincida colla posizione iniziale, nel caso cioè che i punti $a'_1, a'_2, \ldots, a'_w$ in un ordine qualunque coincidono coi punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, noi designeremo il movimento considerato come un « *cammino chiuso* ». Allora, se $F_1, F_2, \ldots$ sono tutte le superficie Riemanniane ad n fogli coi punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_w$, le superficie $F'_1, F'_2, \ldots$ in cui le medesime si trasformano saranno identiche colle $F_1, F_2, \ldots$ in un ordine qualunque. Per conseguenza:

A ciascun cammino chiuso del sistema di punti $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ *corrisponde una determinata sostituzione*

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} F_1, & F_2, & \ldots \\ F'_1, & F'_2, & \ldots \end{pmatrix}$$

delle superficie Riemanniane.

Le sostituzioni $\mathfrak{S}$, che corrispondono a tutti i possibili cammini chiusi formano un gruppo, che noi designiamo come

Gruppo A di monodromia.

Questo gruppo possiede una serie di sottogruppi, che si presenta immediatamente. Cioè, ad ogni cammino chiuso appartiene una sostituzione

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_w \\ a'_1, & a'_2, & \ldots, & a'_w \end{pmatrix}$$

dei w punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Se ora consideriamo tutti i cammini le cui relative sostituzioni $\mathfrak{A}$ appartengono ad un determinato gruppo G di permutazioni degli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_w$, le sostituzioni $\mathfrak{S}$ corrispondenti a questi cammini formeranno evidentemente un gruppo, il quale è contenuto nel gruppo A. Se il gruppo G di scambi consta di una sostituzione identica, ciò vuol dire, che noi consideriamo soltanto quei cammini chiusi, nei quali le posizioni finali $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_w)$ coincidono anche nell'ordine di successione colle posizioni iniziali, cosicchè ogni punto a_i descrive per sè stesso un cammino chiuso. Noi chiameremo questi cammini « *completamente chiusi* ». Il gruppo delle permutazioni delle superficie Riemanniane $F_1, F_2, \ldots$ corrispondente ai cammini completamente chiusi si dirà

Gruppo B di monodromia.

Si riconosce senza difficoltà, che questo gruppo B è un sottogruppo eccezionale (*) (invariante) del gruppo A di monodromia.

§ 2.

Diluoidazione.

Le considerazioni seguenti non sono, invero, necessarie per gli sviluppi ulteriori, però sarà bene qui esporle, perchè esse sono opportune a facilitarne la intuizione.

Tutte le possibili posizioni del sistema di punti $(a_1, \ldots, a_w)$ formano un continuo R_{2w} illimitatamente esteso in $2w$ dimensioni. I numeri complessi $a_1, a_2, \ldots, a_w$

(*) Traduciamo così la parola *ausgezeichnet*, denominazione data ai sottogruppi che godono della proprietà di essere permutabili a tutte le sostituzioni del gruppo di cui fanno parte. *Trad.*

potranno esser riguardati come le coordinate del « posto » $(a_1 \cdot a_2, \ldots, a_w)$ di questo continuo.

Da ciascun posto noi possiamo ora dedurre, in generale, $w! - 1$ nuovi posti colla permutazione delle coordinate. Però non è più così quando tra le coordinate del posto iniziale se ne trovino di eguali, quando cioè per questo posto un punto a_i, almeno, coincida con un punto a_k, perchè allora si deducono meno di $w!-1$ posti. Questi posti speciali, i quali sono caratterizzati dall'equazione

$$\prod_{i>k} (a_i - a_k) = 0 \quad , \quad (i\,,\,k = 1\,,\,2\,,\ldots,\,w)$$

formano un continuo a $2w-2$ dimensioni V_{2w-2}, che, per riguardo al significato che possiede nelle nostre considerazioni, potrà chiamarsi « varietà di diramazione ». La varietà di diramazione non divide il continuo R_{2w} in pezzi, perchè essa possiede un numero di dimensioni inferiore di due unità a quello di questo continuo. Del resto la varietà di diramazione si scinde nelle $\frac{w(w-1)}{2}$ singole varietà

$$a_2 - a_1 = 0 \quad , \quad a_3 - a_1 = 0\,,\ldots,\, a_w - a_{w-1} = 0.$$

Ora, un « cammino chiuso » altro non è, manifestamente, che un cammino scorrente nel continuo R_{2w}, il quale, evitando la varietà V_{2w-2}, esce da un posto $(a_1, a_2 \ldots, a_w)$ per ritornare ad esso, o per terminare in uno dei $w!-1$ posti dedotti. Nel primo caso noi abbiamo a fare con un cammino « completamente » chiuso.

Adesso, sia N il numero delle superficie Riemanniane ad n fogli diramate in w dati posti, e si imaginino N esemplari fra loro coincidenti del continuo R_{2w}. Delle N superficie ne coincidono tra loro due o più solamente quando il posto $(a_1, \ldots, a_w)$ si fa entrare nella varietà di diramazione V_{2w-2}. Corrispondentemente a questa circostanza, gli N esemplari si connetteranno tra loro lungo certi spazi di passaggio collocati attraverso V_{2w-2}, con che nasce uno spazio Riemanniano a $2w$ dimensioni disteso sul continuo R_{2w}, ai cui posti la totalità delle superficie ad n fogli con w punti di diramazione viene riferita con univocità. Il gruppo di monodromia di questo spazio Riemanniano non è altro, evidentemente, che il gruppo B di monodromia.

Anche il gruppo A di monodromia si può interpretare in modo corrispondente. Si ha allora da considerare, in luogo del continuo R_{2w}, un altro continuo $\overline{R_{2w}}$, i cui singoli posti posseggono per coordinate le funzioni simmetriche elementari dei numeri $a_1, a_2, \ldots, a_w$.

Dai seguenti sviluppi risulterà, che, generalmente parlando, lo spazio Riemanniano, sovra citato, non consta di un sol pezzo, ma si decompone in più spazi Riemanniani differenti.

§ 3.

Cambiamento delle superficie Riemanniane per un cammino descritto dai punti di diramazione.

Ricercheremo adesso in che modo si cambia una superficie Riemanniana

$$(1) \qquad F = \begin{pmatrix} l_1 & , & l_2 & , \ldots , & l_w \\ S_1 & , & S_2 & , \ldots , & S_w \end{pmatrix},$$

quando il sistema di punti $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ si muove in modo continuo fino ad una nuova posizione $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_w)$. Un tale passaggio noi lo diremo un « cammino », e parleremo di « posto iniziale » $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ e di « posto finale » $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_w)$. In questa ricerca determineremo le linee $l_1, l_2, \ldots l_w$ nel seguente modo (*). Tiriamo una linea L senza nodi, che da a_1 conduca ad a_w passando per $a_2, a_3, \ldots, a_{w-1}$, e completiamo questa linea congiungendo a_w con a_1, per ottenere una linea L chiusa, che spezzi il piano E in due campi G e G'. Sia G il campo che giace dalla banda negativa di L. Supponiamo ora che le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ siano condotte da un qualunque punto O del campo G e nell'interno di G fino ai punti $a_1, a_2 \ldots, a_w$.

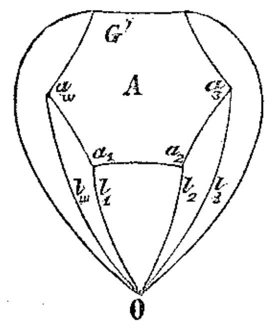

fig. 1.ª

(*) Cfr. Clebsch, l. c. – Per il seguito cfr. la fig. 1ª.

Se da un punto A interno al campo G' tiriamo dei cappi ai punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, i quali, astrazion fatta dei contorni circolari circondanti i punti a_i, corrano interamente dentro G', per un percorso positivo di questi cappi, i fogli subiscono rispettivamente le sostituzioni $S_1, S_2, \ldots S_w$. È comodo per il seguito di osservare che queste sostituzioni si realizzano appunto, se al passaggio dal lato negativo al positivo delle linee

$$a_1 a_2 \;,\; a_2 a_3 \;,\; a_3 a_4 \ldots, \; a_{w-1} a_w \;,\; a_w a_1.$$

si coordinano rispettivamente le sostituzioni

$$(2) \qquad S_1 \;,\; S_1 S_2 \;,\; S_1 S_2 S_3 , \ldots, \; S_1 S_2 \ldots S_w = 1.$$

Dopo ciò, al cappio (a_k) corrisponde la sostituzione

$$(S_1 S_2 , \ldots, S_{k-1})^{-1} (S_1 S_2 \ldots S_{k-1} S_k) = S_k ,$$

come deve essere, perchè il medesimo cappio oltrepassa le linee $a_{k-1}\, a_k$ ed $a_k\, a_{k+1}$, e precisamente la prima dal lato positivo al negativo e la seconda dal negativo al positivo.

Comunque si mutino la linea $a_w\, a_1$ di completamento, il punto O e le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$, la superficie (1) resterà invariata, purchè teniamo fisso il sistema di sostituzioni

$$(3) \qquad \Sigma = (S_1 \;,\; S_2 \;,\; \ldots, \; S_w)$$

Perciò la superficie sarà anche già completamente determinata mediante l'indicazione della linea L e del sistema Σ, e, corrispondentemente a ciò, la si potrà indicare con

$$(4) \qquad F = \binom{L}{\Sigma}.$$

Noi designeremo i singoli pezzi delle linee L con

$$(5) \qquad s_1 = a_1 a_2 \;,\; s_2 = a_2 a_3 , \ldots, \; s_{w-1} = a_{w-1}\, a_w .$$

Evidentemente, noi possiamo cambiare ad arbitrio il pezzo $a_i\, a_{i+1}$ senza alterare la superficie F, purchè non oltrepassiamo nessuno dei punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ e lasciamo fissi i rimanenti pezzi s, come pure il sistema Σ.

Ciò posto, consideriamo adesso un cammino qualunque. Questo sarà rappre-

sentato nel piano E da un sistema di linee

$$(6) \qquad a_1 a'_1 \;,\; a_2 a'_2 , \ldots, \; a_w a'_w$$

percorse simultaneamente dai punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Ora, se queste linee non si tagliano fra loro, nè alcuna taglia sè stessa, il cammino si chiamerà « semplice » Basterà considerare cammini semplici, perchè ogni cammino si può, manifestamente, rappresentare come una serie di cammini semplici consecutivi. Ora, in quale superficie è passata in modo continuo la superficie (4) percorrendo il cammino semplice (6)? Per decidere ciò, assoggettiamo anzitutto i pezzi $s_1, s_2, \ldots, s_w$ a tali deformazioni, che alla fine la linea L non abbia in comune colle linee (6) nessun altro punto fuor di $a_1, a_2, \ldots, a_w$.

Ciò è sempre possibile; perchè, se, per es., la linea $a_1\, a'_1$ possiede fuor di a_1 altre intersezioni con L, consideriamo l'ultima vicino ad a'_1, situata sul pezzo $s_i = a_i\, a_{i+1}$. Uno sguardo alla fig. 2ª mostra allora che possiamo sostituire alla

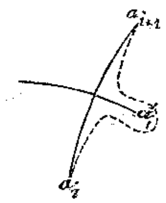

fig. 2.ª

linea s_i un'altra linea (punteggiata nella figura) la quale abbia con $a_1\, a'_1$ almeno un punto comune di meno, ma colle restanti linee (6) non ne abbia più della primitiva linea s_i. Con questo procedimento, applicato più volte, si possono togliere tutti i punti d'intersezione di L colle linee (6) (*). Si osservi, che l'alterazione della linea L non riguarda, in ogni caso, quei pezzi s_i, i quali dal principio non incontrano nessuna delle linee (6).

Se adesso consideriamo le linee

$$(7) \qquad a'_1\, a_1\, a_2\, a'_2 \;,\; a'_2\, a_2\, a_3\, a'_3 , \ldots, \; a'_{w-1}\, a_{w-1}\, a_w\, a'_w ,$$

queste si compongono in una linea priva di nodi, la quale è però distesa doppiamente lungo i pezzi $a_2 a'_2 \;,\; a_3 a'_3 , \ldots, \; a_{w-1}\, a'_{w-1}$. Deformiamo le linee (7), con-

(*) Anche il caso, in cui interi pezzi di L coincidano con interi pezzi delle linee (6), non offre, chiaramente, alcuna difficoltà.

servandone gli estremi a'_1, a'_2, ..., a'_w, e senza oltrepassare alcuno di questi punti, così che, dopo la deformazione, esse formino una linea semplice L' priva di nodi

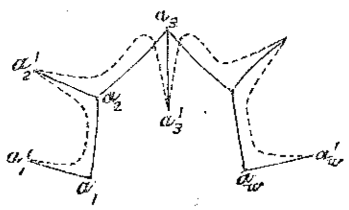

fig. 3.ª

(punteggiata nella fig. 3). La superficie (4) passa manifestamente con continuità nella superficie

$$(8) \qquad F' = \left(\begin{matrix} L' \\ \Sigma \end{matrix}\right),$$

quando i punti $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ percorrono il cammino semplice (6). Se dunque noi vogliamo determinare il cambiamento delle superficie Riemanniane per un percorso di un qualunque cammino, basterà aver di mira la successiva alterazione della linea L. Se il cammino è « chiuso », la linea L è passata in una linea L', che congiunge i medesimi punti a_1, a_2, ..., a_w come la L, e precisamente anche nel medesimo ordine di successione nel caso che il cammino sia « completamente chiuso ».

§ 4.

Cammini completamente chiusi.

Noi limitiamo adesso la considerazione ai cammini completamente chiusi, e vogliamo far vedere che per opportuna scelta di un tale cammino, ogni linea

$$L = (s_1, s_2, \ldots, s_{w-1})$$

può essere passata in ogni altra linea

$$L' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_{w-1}).$$

Per generalità supponiamo che le linee L ed L' coincidano nei primi $i-1$ pezzi, cosicchè sia

$$s_1 = s'_1 \;,\; s_2 = s'_2 \;,\; \ldots \;,\; s_{i-1} = s'_{i-1} \;,$$

mentre i pezzi s_i ed s'_i (*) sono tra loro diversi. Il numero i può assumere anche il valor 1, nel qual caso sono già diversi s_1 ed s'_1.

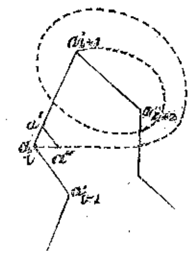

fig. 4.ª

Indichi ora B_{i+1} un cammino, il quale sia definito nel modo seguente. Tutti i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, ad eccezione di a_{i+1}, rimangano fissi: questo ultimo si mova prima lungo s_i fino ad a', poi si mova fino al punto a'' sopra s'_i, e finalmente lungo s'_i ritorni al suo punto di partenza. I punti a', a'' e la loro congiungente $a'a''$ sono quì da scegliersi in guisa, che nel triangolo $a_i a' a''$ non giaccia nessuno dei punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ ed $a'a''$ non incontri alcuna delle linee $s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}$. Col percorso di questo cammino la linea L è passata in una nuova linea, che con L' ha in comune gli i primi pezzi $s'_1, s'_2, \ldots, s'_i$. Questa considerazione mostra che mediante una consecuzione di cammini

$$B_2 \;,\; B_3 \;,\; \ldots \;,\; B_w \;,$$

noi possiamo passare dalla linea L ad ogni altra linea L' arbitraria.

Ora, i cammini B_i si possono rappresentare inoltre come combinazioni di un numero finito di cammini da introdursi opportunamente. Per definire questi ultimi in modo più semplice, completiamo la linea L, come nel paragrafo 3, in modo che divenga una linea L chiusa e indichiamo di nuovo con G e G' i campi del piano E limitati dalla linea L.

Un cammino, lungo il quale il punto a_i vada dapprima al pezzo $a_k a_{k+1}$ di L per l'interno di G', e quindi pel di fuori di G ritorni alla posizione di partenza, noi lo indichiamo con $B_{i,k}$. Allora ogni cammino B_i si può rappresentare come combi-

(*) Nella figura 4 s'_i è punteggiata.

nazione dei cammini

$$B_{i,i+1}\;,\;B_{i,i+2}\;,\;\dots\;,\;B_{i,w}.$$

Ogni arbitrario cammino completamente chiuso noi possiamo di tal maniera comporlo mediante una combinazione dei $\frac{(w-1)(w-2)}{2}$ cammini

$$B_{2,3}\;,\;B_{2,4}\;,\;\dots\;,\;B_{2,w}\;,$$

$$B_{3,4}\;,\;\dots\;,\;B_{3,w}\;,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$B_{w-1,w}\;,$$

e precisamente mediante una combinazione della forma

$$B_{2,\alpha}^{\varepsilon_\alpha}\;B_{2,\beta}^{\varepsilon_\beta}\dots B_{2,\lambda}^{\varepsilon_\lambda}\;B_{3,\alpha'}^{\varepsilon_{\alpha'}}\;B_{3,\beta'}^{\varepsilon_{\beta'}}\dots B_{3,\lambda'}^{\varepsilon_{\lambda'}}\dots,$$

dove gli esponenti posseggono uno dei valori $+1$, -1.

Con B^{-1} quì è inteso il medesimo cammino B, ma percorso in direzione opposta.

Osserviamo, per incidenza, che tra i cammini $B_{i,k}$ ha luogo la relazione

$$B_{2,w}\;B_{3,w}\;\dots\;B_{w-1,w}=1.$$

§ 5.

Le sostituzioni generatrici del gruppo B.

Poniamo ora a base una linea L (*) fissa. Allora noi possiamo indicare ogni singola superficie F mediante il sistema di sostituzioni

$$(S_1\;,\;S_2\;,\;\dots\;,\;S_w)$$

(*) Cfr. per il seguito la fig. 5ª.

ad essa appartenente. Sia la linea L passata nella linea L' dopo il percorso del

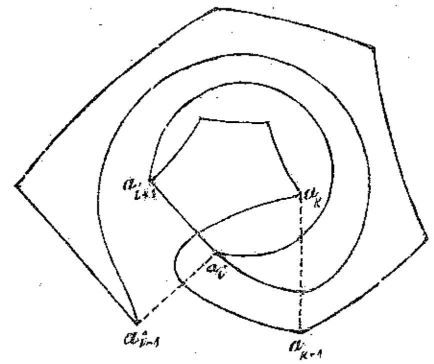

fig. 5.ª

cammino $B_{i,k}$. (Nella figura 5 i pezzi della linea L sono tratteggiati, qualora non coincidano con pezzi di L'; i pezzi di L' sono continui). Finalmente sia F′ la superficie, in cui è passata la

$$F=(S_1\;,\;S_2\;,\;\dots\;,\;S_w)$$

dopo il percorso del cammino $B_{i,k}$. Allora, se r indica uno degli indici

$$i+1\;,\;i+2\;,\;\dots\;,\;k,$$

al cammino l_r corrisponde, come appare dalla figura, rispetto alla superficie F′, la sostituzione

$$S'_r=S_i\,S_r\,S_i^{-1}\;;$$

al cammino l_i corrisponde, rispetto alla superficie F′, la sostituzione

$$S'_i=(S_i\,S_{i+1}\dots S_k)\,S_i\,(S_i\,S_{i+1}\dots S_k)^{-1},$$

mentre a tutti i rimanenti cammini l corrisponde rispetto ad F′ le medesime sostituzioni che rispetto ad F. Noi troviamo quindi:

« *La permutazione* $\mathfrak{S}_{i,k}$ *delle superficie Riemanniane corrispondente al cammino* $B_{i,k}$ *consiste in ciò, che in luogo della superficie*

$$F=(S_1\;,\;\dots\;,\;S_i\;,\;S_{i+1}\;,\;\dots\;,\;S_k\;,\;\dots\;,\;S_w)$$

subentra la superficie

$$F' = (S_1, \ldots, S'_i, S'_{i+1}, \ldots, S'_k, \ldots, S_w),$$

dove, per brevità si è posto

$$\begin{cases} S'_r = S_i\, S_r\, S_i^{-1}, & (r = i+1, i+2, \ldots, k) \\ S'_i = (S_i \ldots S_k)\, S_i\, (S_i \ldots S_k)^{-1}. \text{ »} \end{cases}$$

In base ai risultati dei precedenti paragrafi segue inoltre:

« *Il gruppo* B *di monodromia consta di tutte le combinazioni delle* $\frac{(w-1)(w-2)}{2}$ *sostituzioni*

$$\mathfrak{S}_{2,3}, \mathfrak{S}_{2,4}, \ldots, \mathfrak{S}_{2,w}, \mathfrak{S}_{3,4}, \ldots, \mathfrak{S}_{3,w}, \ldots, \mathfrak{S}_{w-1,w}. \text{ »}$$

In virtù della relazione

$$\mathfrak{S}_{2,w}\, \mathfrak{S}_{3,w} \ldots \mathfrak{S}_{w-1,w} = 1$$

noi possiamo lasciar in disparte la $\mathfrak{S}_{w-1,w}$ tra queste sostituzioni « generatrici » del gruppo B. Non ricercheremo quì, se, oltre questa, altre sostituzioni $\mathfrak{S}_{i,k}$ siano esprimibili mediante le rimanenti, se, quindi, possiamo diminuire ulteriormente il numero delle sostituzioni generatrici.

§ 6.

Le sostituzioni generatrici del gruppo A.

Se indichiamo con W_i un determinato cammino qualunque, dopo il cui percorso i punti a_i, a_{i+1} hanno scambiati i loro posti, ed i rimanenti punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ al contrario hanno raggiunte le loro posizioni iniziali, coi cammini

$$(1) \qquad W_1, W_2, \ldots, W_{w-1}$$

noi possiamo sempre comporre un cammino, dopo il cui percorso i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ abbiano subita una permutazione arbitrariamente prescritta. Perciò ogni cammino chiuso potrà comporsi mediante una combinazione dei cammini (1) e dei cammini $B_{i,k}$ sopra introdotti.

Scegliamo ora i cammini (1) nel seguente modo: facciamo muovere il punto a_i nell'interno di G' fino ad a_{i+1} e contemporaneamente a_{i+1} al di fuori di G' fino ad a_i, mentre i rimanenti punti $a_1 a_2, \ldots, a_w$ restano fissi.

Il cammino così definito noi lo chiameremo « cammino W_i ». La modificazione subìta dalla linea L dopo il percorso di questo cammino, lo indica la figura 6, in cui i pezzi di L che provano un'alterazione sono tratteggiati, i pezzi

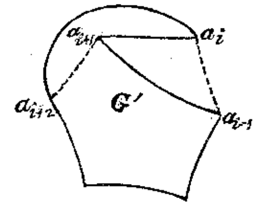

fig. 6.ª

che riprendono il loro posto, egualmente ai rimanenti pezzi, sono segnati in continuo. Ora si rileva dalla figura, che la permutazione $\mathfrak{S}_i$ delle superficie Riemanniane, la quale corrisponde al cammino W_i si riduce a ciò, che in luogo della superficie

$$(S_1, S_2, \ldots, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_w)$$

subentra la superficie

$$(S_1, S_2, \ldots, S_i\, S_{i+1}\, S_i^{-1}, S_i, \ldots, S_w).$$

Queste permutazioni $\mathfrak{S}_i$, in unione alle permutazioni $\mathfrak{S}_{i,k}$, generano quindi il gruppo A di monodromia. Ora però, si possono esprimere, come subito si riconosce, le sostituzioni $\mathfrak{S}_{i,k}$ mediante le sostituzioni $\mathfrak{S}_i$. È cioè

$$\mathfrak{S}_{i,k} = \mathfrak{S}_i\, \mathfrak{S}_{i+1} \ldots \mathfrak{S}_{k-2}\, \mathfrak{S}_{k-1} \cdot \mathfrak{S}_{k-1}\, \mathfrak{S}_{k-2} \ldots \mathfrak{S}_{i+1}\, \mathfrak{S}_i.$$

Noi arriviamo perciò al seguente semplice risultato:

« *Il gruppo* A *di monodromia consta di tutte le combinazioni delle* $w-1$ *sostituzioni*

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{w-1}$$

dove $\mathfrak{S}_i$ *indica quella permutazione delle superficie Riemanniane che in luogo* *della superficie*

$$F = (S_1\ ,\ S_2\ ,\ \dots\ ,\ S_i\ ,\ S_{i+1}\ ,\ \dots\ ,\ S_w)$$

fa subentrare la superficie

$$F' = (S_1\ ,\ S_2\ ,\ \dots\ ,\ S_i\, S_{i+1}\, S_i^{-1}\ ,\ S_i\ ,\ \dots\ ,\ S_w).\ »$$

Se coordiniamo alle sostituzioni

$$\mathfrak{S}_1\ ,\ \mathfrak{S}_2\ ,\ \dots\ ,\ \mathfrak{S}_{w-1}\ ,$$

generatrici del gruppo A, le trasposizioni

$$(a_1\, a_2)\ ,\ (a_2\, a_3)\ ,\ \dots\ ,\ (a_{w-1}\, a_w)\ ,$$

le quali dal canto loro ponno riguardarsi come sostituzioni generatrici del gruppo $\mathfrak{A}$ di tutte le permutazioni degli elementi $a_1, a_2, \dots, a_w$, noi abbiamo in questo modo stabilita una relazione isomorfa tra i due gruppi. In questa relazione ai sottogruppi di $\mathfrak{A}$ corrispondono i sopracitati (§ 1) sottogruppi di A. In particolare il sottogruppo B di monodromia consta chiaramente di quelle sostituzioni di A, le quali, per l'isomorfismo in discorso, corrispondono alla sostituzione identica di $\mathfrak{A}$.

§ 7.

Intransitività dei gruppi A e B.

Si scorge facilmente, che i gruppi A e B di monodromia sono intransitivi. Infatti, per nessuna superficie Riemanniana si può alterare, col percorso di un cammino qualunque, il modo di connessione dei fogli nei singoli punti di diramazione, e per conseguenza si scambiano fra loro, per es., nel gruppo B solamente delle superficie

$$(1)\qquad F = (S_1\ ,\ S_2\ ,\ \dots\ ,\ S_w)$$

per le quali le singole sostituzioni S_i contengono un numero fisso di cicli e nei cicli un numero fisso di elementi.

Ciò risulta anche immediatamente dalla forma delle sostituzioni generatrici $\mathfrak{S}_{i,k}$ (§ 5). Dalla considerazione delle sostituzioni $\mathfrak{S}_{i,k}$ noi deduciamo subito ancora altre condizioni, perchè una superficie (1) possa essere trasformata in un'altra superficie

$$(2)\qquad F' = (S'_1\ ,\ S'_2\ ,\ \dots\ ,\ S'_w)$$

mediante una sostituzione del gruppo B. Cioè, il gruppo di monodromia delle superficie (1), vale a dire quel gruppo che consta di tutte le combinazioni delle sostituzioni $S_1, S_2, \dots, S_w$, deve manifestamente coincidere col gruppo di monodromia delle superficie F' (ovvero esser trasformabile in quest'ultimo). Oltre a ciò, nell'interno di questo gruppo di monodromia, comune alle superficie F ed F', le due sostituzioni S_i ed S'_i devono entrare allo stesso modo, indicando i ognuno degli indici $1, 2, \dots, w$. Non ho potuto decidere, in generale, la questione se queste condizioni siano anche sufficienti.

Tuttavia non offre difficoltà alcuna il rispondere a tale questione, se nella totalità delle superficie ad n fogli coi punti di diramazione $a_1, a_2, \dots, a_w$ noi scegliamo quelle, per le quali questi punti di diramazione sono *semplici* (*).

Dietro un teorema del sig. Lüroth (**), con opportuna scelta dei tagli di diramazione, cioè con opportuna scelta della linea L, si può ottenere che, per una arbitraria di quelle superficie, il relativo sistema di sostituzioni diventi il seguente:

$$S_1 = (1,2)\ ,\ S_2 = (1,2)\ ,\ S_3 = (1,3)\ ,\ S_4 = (1,3)\ ,\dots,\ S_{2n-3} = (1,n)\ ,$$

$$S_{2n-n} = (1,n)\ ,\ S_r = (1,n)\ ,\ (r = 2n-1\ ,\dots,\ w).$$

Quindi, per un cammino chiuso, opportunamente scelto, si può condurre ciascuna delle superficie considerate ad una determinata fra esse, cioè alla superficie

$$\Big((1\,,2)\ ,\ (1\,,2)\ ,\ (1\,,3)\ ,\ (1\,,3)\ ,\ \dots\ ,\ (1\,,n)\Big)\ ,$$

e, precisamente, segue dalle considerazioni di Clebsch (**), che questo passaggio è già possibile anche servendosi di cammini « completamente » chiusi. In base a ciò noi possiamo enunciare il teorema:

(*) Il gruppo di monodromia è in questo caso il gruppo simmetrico.
(**) l. c.

« *Se si forma il gruppo A di monodromia considerando soltanto quelle superficie, che posseggono i punti* $a_1, a_2, \ldots, a_w$ *quali punti semplici di diramazione, il gruppo, che ne nasce, è transitivo. Lo stesso vale per il gruppo* B *di monodromia* ».

In altri termini: Il problema di determinare le superficie Riemanniane ad n fogli con w dati punti semplici di diramazione è *irriducibile*, tanto se si riguardano come date le combinazioni simmetriche dei valori $a_1, a_2, \ldots a_w$, quanto questi valori stessi. Invero, nei primo caso il gruppo A, e nel secondo il gruppo B ci danno il gruppo di Galois del problema, avendo cura di supporre aggiunte tutte le costanti.

(continua)

ANNUNZIO BIBLIOGRAFICO

SOPRA QUALCHE APPLICAZIONE DEI NUMERI COMPLESSI

AD m DIMENSIONI

NOTA

DI

V. MOLLAME.

---

1. Sia

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots \ldots + a_m e_m ,$$

un numero complesso ad m unità principali $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_m$, ovvero ad m *dimensioni*. Se si pone

$$e_\mu e_\nu = \varepsilon'_{\mu,\nu} e_1 + \varepsilon''_{\mu,\nu} e_2 + \ldots + \varepsilon^{(m)}_{\mu,\nu} e_m , \qquad (1)$$

allora il prodotto del numero complesso α per un altro numero complesso $\beta(=b_1 e_1 + b_2 e_2 +$ ecc.) sarà pure un numero complesso formato con le m unità $e_1, e_2, \ldots e_m$.

I numeri reali ε si suppongano determinati in guisa che l'operazione della moltiplicazione sia commutativa ed associativa. In tal caso lo sviluppo della potenza k^{esima} di α, (k intero e positivo) si potrà effettuare come quello della potenza k^{esima} di un polinomio con termini reali, considerando in α le unità e_1, e_2, ecc. quali enti numerici sottoposti alle leggi ordinarie della moltiplicazione, salvo poi a trasformarne i prodotti binarii mediante la relazione (1).

Sia dunque

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_m e_m)^k = B_1^{(k)} e_1 + B_2^{(k)} e_2 + \ldots + B_m^{(k)} e_m , \qquad (2)$$

dove i coefficienti B sono funzioni note delle quantità a ed ε.