GIORNALE

DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

PUBBLICATO PER CURA DEL PROFESSORE

G. BATTAGLINI

Volume XXXI. - 1893.

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
Via Gennaro Serra, 20.
1893.

gravi cure di stato, e le esigenze di pratiche occupazioni colla coltivazione della geometria e della meccanica. L'entusiasmo per la scienza pura, di cui diede prove splendidissime a Parigi, non fu passeggiero capriccio, a meno che si ritenga degno di tal nome quel nobile sentimento che spinge per quarant' anni a produrre lavori fra loro concatenati sulle parti più astratte della scienza. Sembra che al brillante segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze abbia troppo doluto della vittoria che il nostro riportò sul suo connazionale nel concorso di ammissione alla scuola politecnica, abbia voluto in conseguenza togliere ad essa qualunque valore, facendola apparire come una di quelle casuali ingiustizie di cui gli esami di tutti i paesi offrono esempii frequenti. Ora a noi per converso sembra si rechi offesa allo Chasles coll'insistere sopra una circostanza insignificante, coll'adoperare a suo vantaggio il vieto espediente dei panegiristi da dozzina i quali, per far apparire più maestosa la figura della persona che lodano, rendono più meschini e volgari i lineamenti di quelli con cui la confrontano; chè colui che meritò il nome di « Archimede del nostro secolo » appare grande anche confrontato con i più illustri matematici di tutti i tempi!

Noi quindi, che abbiamo sempre professati dei sentimenti di calda ammirazione per l'autore dell'*Aperçu historique*, crediamo di non sconfessarli col tentativo ora fatto di mostrare come il ritratto che il Bertrand fece del Giorgini non sia in alcun modo somigliante all'originale; tentativo che, se non altro, avrà il potere di attrarre l'attenzione dei dotti su un uomo che, fra gli Italiani che coltivarono nella prima metà del secolo presente le scienze esatte, ha diritto ad un posto di gran lunga più elevato di quello che di ordinario si è disposti ad accordargli.

Genova, 23 Marzo 1893.

SUGLI
SPAZI PLURITANGENTI DELLE VARIETÀ CUBICHE GENERALI
APPARTENENTI ALLO SPAZIO DI 4 DIMENSIONI

NOTA

DI

FEDERIGO ENRIQUES.

In questa nota sono risolute alcune questioni di geometria numerativa che si riferiscono alle varietà cubiche generali di F_4, quelle cioè relative ai loro spazi pluritangenti. Ho adoperato la polarità analogamente al metodo di Salmon per determinare le relazioni fra le singolarità d'una superficie. Alcuni procedimenti possono anche prender posto fra quelli del Kalkul der Abz. Geom. di Schubert (Cfr. anche Math. Ann. t. 26)

1. Sia Γ una varietà cubica generale appartenente ad uno spazio (lineare) a 4 dimensioni F_4. Gli spazi (F_3) polari dei punti di una retta r inviluppano un cono quadrico di specie 2 avente per asse una retta r': la retta r' è il luogo dei poli delle quadriche appartenenti al sistema polare ∞^4 definito dalla varietà Γ e contenenti la r, le quali quadriche formano un fascio.

Vi sono però delle rette r a cui daremo il nome di rette *speciali*, tali che gli spazi polari dei loro punti formano un fascio; queste rette r sono incontrate dalla quadrica polare di un qualunque punto in due punti aventi lo stesso spazio polare, ossia esse sono luogo di coppie di poli degli spazi d'un fascio rispetto alla varietà cubica Γ, queste coppie formano una involuzione sopra ogni retta speciale; inoltre le rette speciali contengono ∞^2 quadriche, componenti una rete appartenenti al sistema polare della Γ. Un punto di F_4 dà uno spazio polare che ha altri 15 poli; vi sono perciò 15 rette speciali per un punto dello spazio.

Se un punto P è polo d'uno spazio π che ha un altro polo sulla retta p per

P infinitamente vicino a P, la retta p è speciale e P è un punto doppio della involuzione considerata sulla retta speciale p. Vi è un sistema lineare ∞^3 di quadriche appartenenti al sistema polare di Γ e tangenti in P alla retta p, quindi vi è una quadrica del detto sistema che ha altre 3 rette tangenti arbitrariamente assegnate in P, ossia che ha un punto doppio in P: il luogo d'un tal punto P è dunque la varietà hessiana di Γ, del 5° ordine.

Concludiamo:

Vi sono ∞^3 rette speciali formanti un sistema d'ordine 15 definite dalla proprietà di appartenere ad una rete di quadriche polari rispetto ad una varietà cubica di F_4, esse sono luogo di coppie di poli degli spazi d'un fascio, e sono bitangenti alla hessiana della varietà cubica nei punti doppi della involuzione formata da tali coppie.

2. Vi sono ∞^2 rette appartenenti alla Γ, 6 di esse passano per un suo punto arbitrario (*). Fra queste ve n'è ∞^1 speciali luogo delle coppie di punti di contatto degli spazi bitangenti d'un fascio; ciascuna di esse è caratterizzata dall'esistenza d'un piano tangente in tutti i suoi punti alla varietà e intersecante la Γ secondo un'altra retta che diremo sua *coniugata*. Le rette speciali di Γ generano una superficie gobba rigata S luogo delle coppie di punti di contatto degli spazi bitangenti.

Data una retta r non speciale appartenente alla Γ, per un punto di essa passano 5 rette di Γ fuori di r; ciascuna di queste rette insieme ad r dà luogo ad un trilatero appartenente alla Γ con un altro vertice sulla retta r, e questi 5 punti contengono ciascuno altre 4 rette di Γ che danno luogo a 20 trilateri con altri 20 vertici sulla r, in tal modo si ottiene sulla r una corrispondenza di Chasles [20, 20]. Un punto di coincidenza 0 nasce quando una delle 5 rette per 0 fuori di r dà luogo ad un trilatero avente per 3° lato una retta speciale di Γ, giacchè in questo caso (e non in altri casi) per uno dei 5 vertici dei detti trilateri fuori di 0 su r, due delle 5 rette di Γ (fuori di r) coincidono in una retta speciale: ne segue che vi sono 40 rette speciali di Γ che si appoggiano alla r.

Perciò considerando un qualunque trilatero appartenente alla Γ si deduce:

La superficie gobba s luogo delle coppie di punti di contatto degli spazi bitangenti alla varietà cubica Γ, è una superficie rigata che ha per generatrici le rette speciali di Γ, ed è dell'ordine 120.

3. La corrispondenza di Chasles [20, 20] costruita sopra una retta r di Γ viene a mancare se questa retta è speciale, e quindi non si può con questo metodo determinare quante rette speciali di Γ si appoggiano ad una sua retta speciale. A tal fine faremo uso delle considerazioni seguenti.

(*) Segre « Sulle varietà cubiche degli spazi a 4 dimensioni ecc. » (Acc. Torino 1888).

Se r è una retta non speciale di Γ, gli spazi tangenti nei suoi punti formano un sistema del 2° ordine, e poichè la linea c, d'ordine h, luogo dei poli di questi spazi (fuori di r) è segata dalla quadrica polare d'un punto qualunque di F_4 in $2h$ punti, si ha $\frac{2h}{15} = 2$ ossia $h = 15$.

È poi facile vedere che la r e la c appartenenti alla quartica base del fascio di quadriche polari contenenti la r, hanno 5 punti comuni (usando della rappresentazione piana della quartica); le rimanenti intersezioni della c colla Γ sono i punti di contatto dei 40 spazi ulteriormente tangenti in un punto della r (*).

I 5 punti comuni alla r e alla c sono i punti di r il cui spazio tangente ha un altro polo infinitamente vicino al punto di contatto e perciò appartengono alla hessiana di Γ (cfr. § 1). Dunque:

La varietà d'ordine 45 luogo dei poli degli spazi tangenti alla varietà cubica Γ (fuori di Γ), sega la Γ secondo la superficie S d'ordine 120 luogo dei punti di contatto degli spazi bitangenti, e la superficie parabolica d'ordine 15 luogo dei punti biplanari per le sezioni spaziali tangenti.

Sia ora la r una retta speciale: allora il luogo dei poli degli spazi bitangenti nei punti di r (fuori di r) è una linea c del 7° ordine che insieme alla r è base per la rete di quadriche polari dei punti del piano π tangente secondo r alla Γ.

Le coniche polari dei punti del piano π rispetto alla cubica sezione di esso hanno un punto doppio nel punto comune alla retta r e alla sua coniugata (§ 2), e non hanno altri punti comuni, quindi solo il detto punto della r è comune alla retta r e alla linea c (**). In questo punto la c tocca la Γ (vi è il piano tangente comune π), ed il contatto non può essere tripunto, almeno in generale, poichè si dedurrebbe facilmente che il punto stesso sarebbe triplo per la sezione spaziale tangente; quindi la c incontra la Γ in 19 punti fuori di r, i quali sono i punti di contatto di 19 spazi ulteriormente tangenti in 2 punti di r, e si conclude:

Vi sono 38 rette speciali della Γ che si appoggiano ad una sua retta speciale r: *queste rette compongono insieme alla* r *19 trilateri i cui vertici sono i punti di contatto di 19 spazi tritangenti alla Γ.*

4. I punti di contatto degli spazi tritangenti alla Γ costituiscono la linea doppia ω della superficie S luogo delle rette speciali. Avanti di determinare l'ordine della detta linea occorre premettere alcune considerazioni sull'intersezione della superficie parabolica di Γ colla S.

(*) Si potrebbe facilmente escludere il contatto della c colla Γ nei 5 punti di r, in guisa da verificare nuovamente questo numero.

(**) Il punto stesso appartiene alla hessiana di Γ poichè la sua quadrica polare contiene il piano π e quindi ha un punto doppio.

Segre « Studio delle quadriche ecc. » (Acc. Torino M. 1883-84).

Le generatrici della S (rette speciali) sono bitangenti alla superficie parabolica (cfr. § 1); i punti di contatto sono i punti di Γ le cui sezioni spaziali tangenti hanno 2 punti doppi infinitamente vicini; il luògo di questi punti è una linea d'ordine 120: infatti la linea sezione di S con uno spazio F_3 ha 120 punti comuni colla linea d'ordine 120 luogo degli ulteriori punti di contatto degli spazi tangenti nei suoi punti (fuori di essa).

La stessa linea in F_3 ha altre 4.120 intersezioni colla hessiana di Γ, e perciò si conclude (cfr. § 3 nota):

L'intersezione della superficie parabolica di Γ colla superficie S è una linea composta di 2 altre, l'una d'ordine 120 e l'altra d'ordine 4.120: la 1ª linea α è il luogo dei punti di contatto delle rette speciali di Γ (bitangenti alla superficie parabolica) colla superficie parabolica, cioè il luogo dei punti le cui sezioni spaziali tangenti a Γ hanno 2 punti doppi infinitamente vicini; la 2ª linea β è il luogo delle intersezioni delle rette speciali di Γ colle rette coniugate, cioè il luogo dei punti biplanari per le sezioni spaziali tangenti che hanno un altro punto doppio.

Ciò posto osserviamo che la linea α non appartiene alla superficie luogo M dei poli degli spazi bitangenti nei punti di S fuori di S, mentre la linea β le appartiene. Ora il detto luogo M è d'ordine 7.120 (*) e la sua intersezione totale colla S (con Γ) è una linea d'ordine 21.120. Un punto della linea β è l'intersezione di una retta speciale r di Γ colla coniugata, quindi il piano tangente in esso alla S passa per la r (**) e perciò non può essere in generale tangente anche alla superficie M, poichè la r sarebbe pure tangente alla M ed il detto punto apparterrebbe contemporaneamente alle linee β ed α: così si vede che la linea β si stacca una sola volta dall'intersezione della superficie M colla varietà Γ.

Di qui si deduce:

La linea doppia β della superficie S, luogo dei punti di contatto degli spazi tritangenti alla Γ, e dei vertici dei trilateri di rette speciali ad essa appartenenti, è d'ordine 17.120.

5. La superficie S possiede dei punti tripli appartenenti a 3 rette speciali e punti di contatto di spazi quadritangenti a Γ, quindi tripli anche per la sua linea doppia ω. Avanti di determinare il numero di questi punti premettiamo le osservazioni seguenti.

Si abbia un piano π qualunque in F_4; uno spazio per esso sega la linea ω in 17.120 punti a ciascuno dei quali corrispondono i due punti della linea ω vertici con esso d'un trilatero di rette speciali, sicchè nel fascio di spazi considerato si

(*) Per la determinazione di quest'ordine cfr. il § 3.

(**) Del Pezzo « Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio a più dimensioni » (Acc. Napoli 1886).

ha una corrispondenza di Chasles [34.120, 34.120]. Ora al piano π si appoggiano 120 rette speciali di Γ, e gli spazi per esse sono coincidenze della corrispondenza suddetta: poichè ad una retta speciale se ne appoggiano 38, in un tale spazio coincidono 38 spazi corrispondenti, e quindi rimangono fuori di queste altre 120.30 coincidenze della corrispondenza di Chasles considerata, le quali corrispondono ad altrettanti spazi tritangenti a Γ con 2 punti di contatto infinitamente vicini. Questi 30.120 punti sono comuni alla linea ω ed alla α (§ 4) ed in essi evidentemente le 2 linee si toccano, quindi la ω ha colla superficie parabolica altre 25.120 intersezioni sulla linea β, che corrispondono ad altrettanti spazi tritangenti le cui sezioni hanno un punto doppio biplanare.

Ora la linea luogo dei poli degli spazi tritangenti nei punti di ω (fuori di ω) è d'ordine 13.17.40 ed incontra la ω nei 25.120 punti comuni alla linea β (§ 4) nei quali evidentemente non tocca Γ se la varietà Γ è generale (*); quindi la detta linea ha colla ω (con Γ) altre $13.17.40 - 25.120 = 40.146$ intersezioni che sono i punti tripli della S e della ω.

Si conclude:

La superficie S ha 4.1460 punti tripli che sono tripli anche per la sua linea doppia β: essi sono i vertici di 1460 tetraedri i cui spigoli appartengono alla Γ, cioè i punti di contatto di 1460 spazi quadritangenti.

Vi sono 30.120 spazi tritangenti alla Γ con 2 punti di contatto infinitamente vicini, e 25.120 spazi tritangenti le cui sezioni hanno un punto biplanare in uno dei punti di contatto.

(*) Altrimenti si avrebbe uno spazio quadritangente con due punti di contatto infinitamente vicini.