GIORNALE
DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

PUBBLICATO PER CURA DEL PROFESSORE

G. BATTAGLINI

Volume XXX. - 1892.

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
Via Gennaro Serra, 20.
1892.

ponendo quindi

$$\frac{r\,2\omega}{\varepsilon} = \omega_\varepsilon \quad ; \quad \frac{\rho\,2\omega}{n} = \omega_n ,$$

avremo:

$$\left[\frac{n}{\varepsilon}\right] = \prod_\rho \prod_r \left(\frac{p^2(\omega_\varepsilon)\cdot p^2(\omega_n) - 1}{p^2(\omega_\varepsilon) - p^2(\omega_n)}\right)^2$$

$$\left[\frac{\varepsilon}{n}\right] = \prod_r \prod_\rho \left\{\frac{p^2(\omega_n)\, p^2(\omega_\varepsilon) - 1}{p^2(\omega_n) - p^2(\omega_\varepsilon)}\right\}$$

e quindi evidentemente

$$\left[\frac{n}{\varepsilon}\right] = \left[\frac{\varepsilon}{n}\right]$$

eguaglianza che esprime il teorema di reciprocità desiderato.

LE OMOGRAFIE CICLICHE NEGLI SPAZI AD n DIMENSIONI

NOTA

DI

FEDERIGO ENRIQUES.

1. Come invarianti assoluti di una proiettività π in un F_n assumiamo i rapporti anarmonici delle proiettività subordinate sulle rette unite: questi sono i rapporti $\frac{r_i}{r_h}$ delle radici dell'equazione caratteristica della proiettività: $D(r) = 0$ (*). Come invarianti assoluti di una correlazione Ω in un F_n assumiamo i rapporti anarmonici delle proiettività subordinate di Ω sulle rette unite della proiettività Ω^2; questi sono i rapporti $\frac{\sqrt{r_i}}{\sqrt{r_h}}$ (**), essendo $\frac{r_i}{r_h}$ gli invarianti delle Ω^2 che sappiamo essere a coppie reciproci tranne per le radici ± 1 (***).

Diremo *ciclica d'ordine* m un'omografia tale che nella sua potenza m^a gli elementi corrispondenti si appartengono: se dunque l'omografia è una proiettività π, la π^m è l'identità; se l'omografia è una correlazione Ω, la Ω^m è l'identità o un sistema nullo secondochè m è pari o dispari. Trattiamo separatamente i tre casi i quali ci condurranno ad un medesimo risultato.

(*) Predella (Ann. di Mat. t. 17).

(**) Segre (Tor. Mem. t. 37) introduce come invarianti i quadrati di quelli qui introdotti; ma l'avere assunto gli invarianti d'una correlazione sotto questa forma, ci permetterà di enunciare i risultati seguenti in modo uniforme per tutte le omografie (proiettività e correlazioni).

(***) Kronecher. Monatsberichte. Berlin (1874).

a). Se la proiettività π è ciclica d'ordine m, essa non può essere degenere perchè ogni sua potenza sarebbe degenere, e non può avere punti uniti multipli poichè esisterebbe una retta corrispondente a un punto unito multiplo, unita, su cui si avrebbe una proiettività subordinata ciclica con un punto unito doppio il che è assurdo come si vede facilmente: dunque una proiettività ciclica d'ordine m in F_n ha per equazioni sotto la forma canonica

$$y_1 \equiv r_1 x_1 \dots y_{h_1} \equiv r_1 x_1 , \; \dots , \; y_{n+1-h_\sigma} \equiv r_\sigma x_{n+1-h_\sigma} \dots y_{n+1} \equiv r_\sigma x_{n+1} ,$$

ed affinchè π^m sia l'identità,

$$r_1^{\,m} = r_2^{\,m} = \dots = r_\sigma^{\,m} ,$$

cioè $\frac{r_i}{r_h}$ è una radice m^a dell'unità (*).

b). Se la correlazione Ω è ciclica d'ordine pari $m = 2\nu$, la proiettività Ω^2 è ciclica d'ordine ν e quindi gli invarianti assoluti di Ω son radici m^e dell'unità.

c). Se la correlazione Ω è ciclica d'ordine dispari m, la Ω^m è un sistema nullo, percui escludendo il caso in cui esso sia degenere (e quindi Ω degenere), bisogna supporre che lo spazio F_n sia di dimensioni dispari n (**); allora la Ω^2 è ciclica d'ordine m, poichè il quadrato del sistema nullo Ω^m è l'identità: gli invarianti assoluti di Ω sono dunque radici ^{me} dell'unità; poichè sulle rette unite di Ω^2 la Ω definisce proiettività subordinate le cui potenze m^e (subordinate di Ω^m) sono l'identità.

Otteniamo dunque il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un' omografia in un F_n sia ciclica d'ordine m *è che i suoi invarianti assoluti sieno radici* m^e *distinte dell'unità.*

Questo teorema permette di stabilire le sottoclassi di omografie cicliche appartenenti ad una data classe: così p. e. si trova che ad una classe di proiettività con σ spazi fondamentali semplici, appartengono (se $m \geq \sigma$) $\binom{m-1}{\sigma-1}$ sottoclassi di proiettività cicliche corrispondenti ai diversi gruppi di $\sigma - 1$ radici di-

(*) Questo teorema è stato dimostrato da Frobenius (Crelle LXXXIV) appoggiandosi alle forme canoniche delle sost. lineari date da Weierstrass, ed interpretate geometricamente da Segre in una nota alla sua memoria.

(**) Il sistema nullo in uno spazio di dimensioni pari è sempre degenere: Cf. Segre (nota nella sua memoria delle correlazioni pag. 411).

verse da 1 dell'equazione binomia $x^m = 1$; tra queste vi sono $\binom{\varphi(m)}{\sigma-1}$ sottoclassi di proiettività che definiscono su ciascuna retta unita proiettività subordinate cicliche di ordine non minore di m ($= m$) corrispondenti alle radici primitive di $x^m = 1$; mentre vi sono invece, se m non è primo, sottoclassi di omografie cicliche di ordine $< m$, o di ordine m ma che definiscono su alcune rette unite proiettività subordinate cicliche d'ordine $< m$. Un calcolo analogo può farsi per le sottoclassi di correlazioni cicliche appartenenti a una data classe.

2. Se applicando successivamente un'omografia ai punti di F_n 1, 1', indipendenti dagli elementi fondamentali (se l'omografia è una proiettività sono indipendenti dai suoi elementi fondamentali quei punti che non appartengono a spazi lineari determinati da alcune delle sue forme fondamentali: se l'omografia è una correlazione diciamo indipendenti dai suoi elementi fondamentali i punti indipendenti dalle forme fondamentali del suo quadrato) se ne deducono gli elementi 2, 3 ..., 2', 3' ..., trasformando proiettivamente (il che è possibile) l'omografia in se stessa, facendo corrispondere i punti 1, 1', si trasformeranno proiettivamente l'una nell'altra le due serie di elementi 1, 2, 3 ..., 1', 2', 3' ...; dunque:

I cicli d'un' omografia ciclica in F_n dati da punti indipendenti dagli elementi fondamentali sono proiettivi.

E si ha pure:

Una proiettività è ciclica d'ordine m *se applicata* m *volte ad un elemento indipendente dei fondamentali, riconduce allo stesso elemento.*

Una correlazione è ciclica d'ordine pari 2m *se applicata* 2m *volte ad un suo elemento indipendente dai fondamentali riconduce allo stesso elemento.*

3. Ci proponiamo ora la questione:

In quanti modi i cicli d'un' omografia ciclica in F_n sono trasformabili omograficamente in sè stessi?

Si abbia un' omografia ciclica d'ordine m, Γ, di cui i cicli $(0, 1, 2, 3 \dots m)$, sieno trasformati in sè stessi da una omografia π: se π non è una proiettività identica, considerando un numero sufficiente di cicli $0, 1, 2, \dots m$, di Γ, troveremo sempre $n+2$ di questi cicli nei quali π cambia l'elemento 1 in uno stesso elemento s; se ne conclude che π è la potenza s^a di Γ. Ora se Γ è una proiettività, oppure se essendo una correlazione m è pari, l'elemento m coincide coll'elemento 1 e l'elemento $mk + h$ ($h < m$) dedotto da 0 coll'omografia Γ^{mk+h}, coincide coll'elemento h, percui ogni omografia Γ^s trasforma in sè stessi i cicli di Γ, spezzandoli in cicli d'ordine t dove t è il minimo numero che moltiplicato per s dia un multiplo di m. Se invece Γ è una correlazione ciclica d'ordine m dispari è facile vedere che la omografia Γ^s non trasforma mai in sè stessi i cicli di Γ.

Ne deduciamo:

Escluso il caso delle correlazioni cicliche d'ordine dispari; tutte e sole le

Omografie che trasformano in sè stessi i cicli di un'omografia ciclica Γ *d'ordine* sk *in* F_n, *appartengono al gruppo ciclico.*

$$\Gamma\ \Gamma^2\ \ldots\ \Gamma^m.$$

I cicli d'una correlazione ciclica di ordine dispari in F_n, *non son trasformati in sè stessi da nessuna omografia.*

Corollario 1.° *In una omografia ciclica d'ordine pari* 2m *in* F_n *gli elementi opposti* 1 m + 1 , 2 m + 2 , ... *d'un ciclo* 1 , 2 , 3 ... 2m , *si corrispondono involutoriamente.*

Corollario 2.° *Un ciclo d'ordine* m > n + 2 *d'una omografia ciclica (che non sia una correlazione se* m *è dispari) in* F_n, *dà coi suoi elementi tanti cicli di omografie cicliche d'ordine* m, *quanti sono i numeri* < m *e primi con esso.*

Invero se $h < m$ è primo con $m (m > n + 2)$, la potenza h^{ma} della data omografia trasforma in sè stessi i cicli di essa ma non può decomporli in cicli d'ordine inferiore poichè sarebbe h un divisore di m o d'un multiplo di m.

Proiettività cicliche in F_n.

4. Un'involuzione è una proiettività ciclica di 2° ordine, percui (*):

In una involuzione vi sono due forme fondamentali semplici (**)

I punti coniugati sono separati armonicamente dalle forme fondamentali. Poichè vi è un solo invariante assoluto = − 1.

Tutte le proiettività in F_n *che hanno date forme fondamentali semplici formano un fascio a cui appartiene l'identità e un'involuzione: esse costituiscono pure un gruppo* (***).

Tutte le classi di involuzioni in un F_n *sono:*

se n è *pari*

$$[0 \quad n-1]\ [1 \quad n-2] \ldots \left[\frac{n}{2}-1 \quad \frac{n}{2}\right];$$

se n è *dispari*

$$[0 \quad n-1]\ [1 \quad n-2] \ldots \left[\frac{n-1}{2} \quad \frac{n-1}{2}\right].$$

(*) Cfr.

(**) Queste omografie sotto il nome di collineazioni sono state studiate dal signor Veronesi (Ann. di Mat. t. XI).

(***) V. la mia nota (Acc. Lincei 1890).

5. *In una proiettività reale ciclica in* F_n *non vi possono essere più di due forme fondamentali reali.*

Se invero ve ne fossero tre, tra di esse se ne avrebbero almeno due tali che sulle rette reali appoggiantesi ad esse, vi sarebbe una proiettività subordinata ciclica, non involutoria, con due punti uniti reali, il che è assurdo.

6. Se si ha una proiettività ciclica d'ordine m in F_n, che abbia gli spazi fondamentali (che debbono esser semplici)

$$F_{h_1}\ \ldots\ F_{h_\sigma - 1} \qquad (h_1 + \ldots + h_\sigma = n + 1),$$

i suoi cicli apparterranno ad un F_m, allora, ed allora soltanto, quando ogni punto di F_n appartenga ad una F_m unita nella quale vi sia una proiettività subordinata della data: ora proiettando da un punto qualunque di F_n le forme

$$F_{n-h_1} \equiv [F_{h_2-1} \ldots F_{h_\sigma - 1}],\ \ldots,\ F_{n-k_\sigma} \equiv [F_{h_1-1} \ldots F_{h_\sigma - 1}],$$

le $F_{n-h_1+1}, \ldots, F_{n-h_\sigma+1}$ proiettanti, hanno comune una forma $F_{\sigma-1}$ che si appoggia in un sol punto a ciascuna delle forme fondamentali $F_{h_1-1} \ldots F_{h_\sigma-1}$, ed è perciò la forma di dimensioni minime (anche per la proiettività), a cui appartenga un punto di F_n indipendente dalle forme fondamentali.

Ne deduciamo:

I cicli d'una proiettività ciclica in F_n, *che ha* σ *spazi fondamentali, appartengono ad* $F_{\sigma-1}$.

Più in generale i ragionamenti svolti provano che:

Data una proiettività π *con* σ *forme fondamentali semplici in* F_n, *le serie finite o infinite di punti* 0 , 1 , 2 , 3 ... *che si ottengono applicando ai punti* 0 *di* F_n *le proiettività* $\pi, \pi^2, \pi^3, \ldots$, *appartengono ad* $F_{\sigma-1}$ (*).

Pertanto lo studio delle proiettività cicliche in F_n, che hanno σ forme fondamentali, è ridotto a quello delle proiettività cicliche con σ punti uniti distinti in una $F_{\sigma-1}$.

In particolare lo studio delle proiettività cicliche (generali) d'ordine $m<n+1$ in F_n si riduce a quello delle proiettività cicliche d'ordine m appartenenti ad una F_{m-1}.

Correlazioni cicliche d'ordine pari in F_n.

7. Le correlazoni cicliche del 2° ordine, o involutorie, sono, come è noto, i sistemi polari reciproci rispetto ad una quadrica.

(*) Cfr. la mia nota c.

Sussiste il teorema:

È condizione necessaria e sufficiente affinchè una correlazione in F_n sia un sistema polare, che esista un $(n+1)$ gono *in cui i vertici corrispondano agli* F_{n-1} *opposti* (*).

La condizione enunciata è necessaria poichè gli infiniti $(n+1)$ goni autoconiugati rispetto alla quadrica fondamentale di un sistema polare vi soddisfano.

Dimostriamo che la detta condizione è altresì sufficiente.

Sieno $A_1 - A_{n+1}$ i vertici della $(n+1)$ gono corrispondenti per ipotesi alle facce opposte $\alpha_1 - \alpha_{n+1}$ nella correlazione: evidentemente i vertici A_i e le facce opposte α_i si corrispondono in doppio modo.

Quindi se supponiamo dimostrato il teorema per gli spazi ad $n-1$ dimensioni, può dimostrarsi per quelli ad n.

Infatti le rette per A_i corrispondono in doppio modo agli F_{n-2} in α_i, essendo per ipotesi doppia la corrispondenza dei punti e degli F_{n-2} in α_i dove si ha lo n – gono $A_1 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_{n+1}$ di cui i punti corrispondono alle facce opposte; quindi preso un punto qualunque H in F_n conduciamo le rette $A_2H, A_3H, \ldots A_{n+1}H$, alle quali corrispondono in doppio modo in $\alpha_n \ldots \alpha_{n+1}$ gli F_{n-2} $\beta_n^{(H)} \ldots \beta_{n+1}^{(H)}$; questi F_{n-2} appartengono necessariamente allo F_{n-1} h corrispondente ad H in F_n, percui h ed H si corrispondono in doppio modo, cioè la correlazione è involutoria c. d. d.

Il teorema è vero per $n=1$, dunque è vero in generale.

8. Diremo in *involuzione parziale* una correlazione di F_n quando vi sono due forme reciproche F_r Φ_r (di sostegno indipendenti, i cui elementi si corrispondono in doppio modo, prospettivamente (cioè si appartengono) (**): la F_r e la F_{n-r-1} sostegno di φ_r, le diremo *forme dell'involuzione parziale*.

Se si ha correlazione ciclica del 4° ordine Ω, la proiettività Ω^2 è una involuzione ed è facile vedere che le sue forme fondamentali F_r, Φ_r si corrispondono appunto in doppio modo e prospettivamente in Ω, cioè che ad ogni punto di F_r corrisponde in doppio modo un F_{n-1} di Φ_r passante per esso, giacchè in generale i punti uniti del quadrato Ω^2 d'una correlazione Ω in F_n, appartengono alla quadrica luogo di Ω.

Ciò risulta p. e. così: Sulla retta congiungente due punti uniti di Ω^2 vi è una proiettività subordinata di Ω il cui quadrato è una proiettività subordinata di Ω^2 cogli stessi punti uniti, dunque questi punti uniti appartengono agli F_{n-1} corrispondenti in Ω.

Dunque:

Una correlazione ciclica del 4° ordine è in involuzione parziale: i due punti (e i $2F_{n-1}$*) d'un suo ciclo sono separati armonicamente dalle forme dell'involuzione parziale.*

(*) Sannia. Geometria Proiettiva.

(**) Cfr. In proposito una monografia del sig. Porchiesi sulle forme di 2ª specie.

9. Se in un F_n si ha una correlazione Ω ciclica di ordine $2m$ con $m \geq n+1$, gli m punti e gli m F_{n-1} d'un suo ciclo formano due cicli di Ω^2 e per il teorema del n° 6 potremo supporre che gli m punti non appartengano ad un F_{n-1} e quindi gli m F_{n-1} non appartengano ad un punto: diremo allora che la Ω è *generale*.

Gli m punti e gli m F_{n-1} costituiscono un poligono ed un poliedro che diremo *coniugati*.

Per i risultati del n° 3 si ha:

Tutte e sole le correlazioni che trasformano l'uno nell'altro un poligono ed un poliedro coniugati in una correlazione ciclica d'ordine pari, sono le sue potenze dispari: mentre le potenze pari ed esse sole li trasformano ciascuno in sè stesso.

Invero tali correlazioni trasformano in se stessi i cicli della data.

Sieno A, B un poligono ed un poliedro coniugati nella correlazione Ω; il 1° di m vertici, il 2° di m facce: in A vi saranno $\binom{m}{n}$ facce, in B $\binom{m}{n}$ vertici, che danno due gruppi di elementi A′ B′: poichè A′B′ son trasformati l'uno nell'altro dalle correlazioni che trasformano A in B, e in sè stessi dalle proiettività che trasformano in sè stessi A e B, si ha che i gruppi di elementi di A′B′ indipendenti dagli elementi fondamentali di Ω si distribuiscono in coppie di poligoni e poliedri coniugati in Ω.

Gli $\binom{m}{n}$ F_{n-1} di A′, di cui $\binom{m-1}{n-1}$ passano per ciascun vertice di A, danno

$$\binom{\binom{m}{n}}{n} - m\binom{\binom{m-1}{n-1}}{n}$$ punti (*diagonali di* A) costituenti un gruppo A″: analogamente possiamo ottenere un gruppo di F_{n-1} B″, e proseguendo gruppi $A^{(\nu)} B^{(\nu)}$ di elementi il cui numero (per $m > n+1$) và crescendo oltre ogni limite, e che costituiscono quelli che diremo *sistemi coniugati* in Ω dati da A B.

Per la dipendenza di due sistemi coniugati dal poligono e poliedro coniugati che li individuano, deduciamo:

Le potenze dispari di Ω e queste sole correlazioni trasformano l'uno nell'altro due sistemi coniugati, le potenze pari, e non altre proiettività, li trasformano in sè stessi.

Ne segue, come per A′, B′, la proprietà caratteristica seguente di due sistemi coniugati A A′ A″ A‴ . . . $A^{(\nu)}$ . . . , B B′ B″ . . . $B^{(\nu)}$ . . . ;

Gli elementi di $A^{(\nu)} B^{(\nu)}$ indipendenti dagli elementi fondamentali di Ω si distribuiscono in coppie di poligoni e poliedri coniugati.

Dunque:

Se un gruppo $A^{(\nu)}$ ($B^{(\nu)}$) ha un numero di elementi non multiplo di m, alcuni dei suoi elementi sono dipendenti dagli elementi fondamentali di Ω.

Nel piano una correlazione generale Ω ha un punto ed una retta che non si appartengono e si corrispondono in doppio modo in Ω, detti *polo* e *polare* (Porchiesi l. c.); si ottiene subito:

Se un quadrangolo A ed un quadrilatero B sono coniugati in una correlazione generale ciclica d'ordine 4, dei tre punti diagonali di A uno è il polo e due sono sulla polare di Ω; delle tre rette diagonali di B una è la polare e due passano per il polo di Ω..

Se B appartiene ad $A^{2\nu+1}$, A appartiene a $B^{2\nu+1}$ e i due sistemi coniugati coincidono: se essi coincidono B deve appartenere ad un gruppo $A^{2\nu+1}$.

Dunque:

Perchè due sistemi coniugati coincidano è necessario e sufficiente che ciascuno dei poligoni coniugati fondamentali appartenga ad un gruppo d'ordine $2\nu+1$ dedotto dall'altro.

Otterremo allora un sistema che potremo dire *autoconiugato d'ordine* ν.

10. Sia ora $m = n + 1$ Se la correlazione ciclica Ω d'ordine m in F_n è generale, non si hanno più sistemi coniugati in Ω, ma solo $(n+1)$ goni e $(n+1)$ edri coniugati A, B, che danno un $(n+1)$ edro ed un $(n+1)$ gono coniugati A' B'.

Se A coincide con B' e quindi A' con B, si ha un $(n+1)$ gono *autoconiugato in* Ω.

Dato un $(n+1)$ gono autoconiugato in Ω, (indipendente dagli elementi fondamentali), non può un vertice corrispondere alla faccia opposta, poichè la corrispondenza sarebbe doppia, cioè il vertice un punto unito di Ω^2 (e la faccia opposta un F_{n-1} unito di Ω^2).

Se ne deduce facilmente che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un $(n+1)$ gono, *ciclo generale di Ω^2, sia autoconiugato in Ω è che sia iscritto nella quadrica luogo e quindi circoscritto alla quadrica inviluppo (e viceversa).*

Vi sono ∞^{n-1} $(n+1)$ goni *autoconiugati.*

Agosto 1890.

LE OMOGRAFIE ARMONICHE NEGLI SPAZI LINEARI
AD n DIMENSIONI

NOTA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

1. È facile rappresentare le omografie tra due spazi ad n dimensioni $F_n F'_n$, nei punti di uno spazio $S'_{n(n+2)}$ lineare ad $n(n+2)$ dimensioni prendendo come coordinate di questi punti i coefficienti delle equazioni di queste omografie (*): allora le omografie degeneri tra $F_n F'_n$ son rappresentate dai punti d'uno spazio algebrico ad $n(n+2)-1$ dimensioni, d'ordine $n+1$ ($S^{n+1}{}_{n(n+2)-1}$).

Il rapporto anarmonico costante dei quattro punti d'una retta di F'_n trasformati di un punto di F_n in quattro omografie $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$ di un fascio, lo diremo *rapporto anarmonico* ($\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$) delle quattro omografie; esso è uguale al rapporto anarmonico dei quattro punti rappresentanti le $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$ sulla retta di $S'_{n(n+2)}$ che rappresenta il fascio.

Le omografie degeneri di caratteristica $n-h+1$ corrispondono a punti h-pli di $S^{n+1}_{n(n+2)-1}$.

Rispetto ad m omografie di un fascio possiamo considerare *il gruppo* r^0 *polare di una data del fascio, che contiene* m − r *omografie.*

Dicendo polari l'una dell'altra, due omografie, senza dire rispetto a che gruppo di omografie, intenderemo sempre rispetto alle omografie degeneri del loro fascio.

2. Dico *armoniche* due omografie $\pi_1 \pi_2$ l'una tra $F_n F'_n$, l'altra tra $F'_n F_n$, quando la π_1 sia la polare n^a di π_2^{-1} ossia questa appartiene al 1° gruppo polare di π_1.

(*) Cfr. Stephanos: Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace, avec application à l'étude des rotations sphériques. M. Annalen, vol. XXII. Aschieri, Ist. Lomb. XII.

Se le due omografie sono

$$\pi_1 \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, v_k = 0 \qquad\qquad \pi_1 \equiv \Sigma\, a_{ik}\, y_i\, u_k = 0\,,$$

si ha

$$\pi_2^{-1} \equiv \Sigma\, a'_{ik}\, x_i\, v_k = 0$$

dove

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial\, | a'_{ik} |}{\partial a'_{ik}}\,,$$

sicchè la relazione di armonia fra $\pi_1\, \pi_2$ è

$$a_\alpha = \Sigma\, a_{ik}\, \alpha_{ik} = 0\,,$$

e quindi è reciproca e bilineare tra le omografie.

Dunque: *Due omografie tra* $F_n\, F'_n$. $F'_n\, F_n$ *sono armoniche se l'una è la* n^a *polare dell'inversa dell'altra, ossia l'inversa dell'una appartiene al* 1° *gruppo polare dell'altra. Le omografie armoniche ad una tra* $F_n\, F'_n$ *compongono un sistema lineare* $\infty^{n(n+2)-1}$ *(armonico associato) di omografie tra* $F'_n\, F_n$, *che è il sistema lineare polare dell'inversa di quella.*

Ad un fascio generale di omografie tra $F_n\, F'_n$, *appartengono* n *omografie le cui inverse sono armoniche ad una data omografia del fascio, ed insieme a quelle fanno corrispondere ad un punto qualunque di* F_n, $n+1$ *punti d'una retta componenti un gruppo armonico a quello delle* $n+1$ *intersezioni della retta colle facce del* 2° $(n+1)$ gono *base* (*).

L'armonia tra due omografie che qui consideriamo, è una estensione di quella considerata dal sig. Segre (Crelle C) per le binarie, e dai signori Pasch e Rosanes (risp. Math. Ann. XXIII e Crelle LXXX e XC). (Quando scrissi questa nota ignoravo che un'estensione era già stata data pel caso generale dal sig. Segre in una lettera al sig. Rosanes (Math. Ann. t. 24) la quale comprende il nostro teorema del n.° 3).

Un'altra dimostrazione di questo è data dal sig. Castelnuovo (« Su certi gruppi associati di punti » Rend. Palermo t. III) — Decembre 1892.

2. L'equazione di un'omografia π_1 tra $F_n\, F'_n$ riferita a $2\,(n+1)$ goni coniu-

---

(*) Cfr. la mia Nota su: Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi ad n dimensioni. (Acc. Lincei 90). Citando questa nota colgo l'occasione per avvertire che omisi là di rammentare la memoria del sig. Segre sulle omografie dello spazio (Acc. Lincei 1884) sebbene in essa vi sieno alcuni dei risultati dati nei §§ di quella nota.

gati come fondamentali per le coordinate è

(1) $$c_1\, x_1\, v_1 + c_2\, x_2\, v_2 + \ldots + c_{n+1}\, x_{n+1}\, v_{n+1} = 0\,;$$

se l'omografia tra $F'_n\, F_n$

(2) $$\pi_2 \equiv y_1\, \alpha_u^{(1)} \pm y_2\, \alpha_u^{(2)} + \ldots + y_{n+1}\, \alpha_u^{(n+1)} = 0$$

è armonica a π_1, per la collineazione prodotto

$$\pi_2\, \pi_1 \equiv f = \sum_{ik} c_i\, \alpha_k^{(i)}\, x_i\, u_k = 0$$

l'invariante lineare

$$i = \sum\nolimits_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial u_i} = 0$$

Questo invariante per le collineazioni piane è stato considerato dal Clebsch (Vol. III. Integrali Abeliani e Connessi. Cap. VI. Il Connesso di 1° ordine e di 1ª classe). Il significato del suo annullarsi quando la $f=0$ è una collineazione generale in F_n è (come si vede estendendo quello dato dal Clebsch per $n=2$) che la serie dei punti $0, 1, 2 \ldots n-1, n+1$, dedotta da un punto 0 di F_n applicando la $f=0$, il suo quadrato, ... la sua potenza $n-1$, e la sua potenza $n+1$, appartiene ad un F_{n-1} essendo $a_\alpha = 0$; quindi se diciamo in *posizione lineare* una collineazione in F_n che ha l'invariante $i=0$, si ha:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due omografie tra $F_n F'_n$, $F'_n F_n$ *sieno armoniche è che la collineazione prodotto, in* F_n *(o in* F'_n*), sia in posizione lineare.*

3. Riprendiamo le equazioni (1) (2) delle omografie armoniche $\pi_1\, \pi_2$: ai punti $v_r = 0$ di F'_n (vertici dello $(n+1)$ gono fondamentale in F'_n) corrispondono in π_1^{-1} i punti $x_r = 1$ (vertici dello $(n+1)$ gono fondamentale delle coordinate in F_n); se ai detti punti $v_r = 0$ (cioè $y_r = 1$) per $r = 1, 2, \ldots, n$, corrispondono in π_2 punti appartenenti alle facce $u_r = 1$ del poliedro fondamentale di F_n, avremo

$$\alpha_1^{(1)} = 0 \qquad \alpha_2^{(2)} = 0 \ldots\ldots \alpha_n^{(n)} = 0\,,$$

e perciò essendo $\pi_1\, \pi_2$ armoniche

$$\Sigma\, c_i\, \alpha_i^{(i)} = c_{n+1}\, \alpha_{n+1}^{(n+1)} = 0\,,$$

e poichè

$$c_{n+1} \gtrless 0 ,$$

$$\alpha_{n+1}^{(n+1)} = 0 ,$$

per cui anche il corrispondente in π_2 del vertice $v_{n+1} = 0$ (cioè $y_{n+1} = 1$) appartiene alla faccia $u_{n+1} = 1$ del poliedro fondamentale di F_n. Ne risulta:

Se in $F_n F'_n$ si hanno $2(n+1)$ goni coniugati in una omografia tali che ad r vertici del 2° corrispondano a una omografia armonica alla data, n punti appartenenti alle n facce del 1° opposte ai vertici che loro corrispondono nella inversa della 1ª omografia, allo $(n+1)$° vertice del 2° $(n+1)$ gono corrisponde nella 2ª omografia un punto della $(n+1)$ª faccia del 1°: viceversa se questa proprietà sussiste per due omografie, queste sono armoniche.

Dati n punti $1, 2, 3 \ldots n$ in F'_n, ed n punti $1_1, 2_1, 3_1, \ldots n_1$ di F_n, sieno $1', 2', 3' \ldots n'$ i corrispondenti di $1, 2, 3 \ldots n$ nell'inversa π_1^{-1} d'un omografia π_1 tra $F_n F'_n$; gli F_{n-1} $(1'2' \ldots n')(1_1 2' \ldots n')(1'2_1 3' \ldots n') \ldots (1'2' \ldots (n-r'n_1)$ sono le facce di un determinato $(n+1)$ gono di F_n avente n facce passanti per gli n punti $1_1, 2_1, 3_1 \ldots n_1$, opposte ai corrispondenti dei punti $1', 2', \ldots n)$ in π_1^{-1}: allora se $1_1, 2_1 \ldots n_1$ sono i corrispondenti di $1', 2' \ldots n'$ in una omografia π_2 tra $F'_n F_n$, armonica a π_1, si ottiene un $(n+1)$ gono di F'_n i cui coniugati rispetto alle due omografie armoniche sono iscritto l'uno nell'altro.

Dunque:

In due omografie armoniche esistono ∞^{n^2} coppie di $(n+1)$ goni coniugati di un medesimo rispetto ad un $(n+1)$ gono dell'altro spazio, iscritti e circoscritti fra loro: l'esistenza di tali coppie di $(n+1)$ goni è condizione necessaria e sufficiente per l'armonia delle due omografie.

Le proprietà dimostrate sono la estensione di quelle di Pasch e di Rosanes (l. c.) per le correlazioni nel piano e nello spazio a tre dimensioni, e danno per le proiettività binarie le proprietà fondamentali trovate dal Segre (l. c.): la definizione che ho data di armonia tra due omografie in generale, riferita alla rappresentazione delle omografie nello $S'_{n(n+2)}$, estende quella di Stephanos (*) per le proiettività binarie, che rappresenta le proiettività binarie armoniche in una coppia di punti del nostro spazio coniugati rispetto alla quadrica rappresentante le proiettività degeneri.

4. Riferendosi alla rappresentazione delle omografie nei punti dello $S'_{n(n+2)}$ si ottiene subito:

(*) Stephanos (l. c.).

Le omografie armoniche a se stesse sono le omografie degeneri. Le omografie più di una volta degeneri tra $F_n F'_n$ sono armoniche a tutte le omografie tra $F'_n F_n$.

5. Si ha evidentemente:

Un sistema lineare ∞^m di omografie tra $F_n F'_n$, ne individua uno armonico (associato) tra $F'_n F_n$ $\infty^{n(n+2)-m-1}$: la relazione fra due sistemi armonici è reciproca: i prodotti di tutte le omografie dell'uno per tutte quelle dell'altro sono le $\infty^{n(n+2)-1}$ collineazioni in posizione lineare in F_n (o in F'_n), che costituiscono il sistema armonico all'identità.

Se due sistemi lineari di omografie uno in F_n, l'altro in F'_n, sono proiettivi (trasformabili l'uno nell'altro mediante un'omografia non degenere tra $F_n F'_n$) i loro sistemi armonici sono pure proiettivi (e viceversa), e trasformabili l'uno nell'altro mediante la medesima omografia tra $F_n F'_n$.

Così la classificazione dei sistemi lineari $\infty^{n(n+2)-1}$ è ridotta a quella delle omografie; quella dei sistemi $\infty^{n(n+2)-2}$ a quella dei fasci, ecc.

In particolare deduciamo:

Tutte le omografie permutabili con un sistema lineare di omografie in F_n, sono permutabili col sistema armonico.

E poichè tutte le omografie sono permutabili coll'identità:

Tutte le omografie in F_n trasformano in se stesso il sistema $\infty^{n(n+2)-1}$ delle collineazioni in posizione lineare in F_n: ed è questo l'unico sistema lineare $\infty^{n(n+2)-1}$ di collineazioni in F_n, che goda di questa proprietà.

7. Un'altra estensione dell'armonia considerata dal Segre per le proiettività binarie, si ha definendo come *armoniche* una collineazione π tra $F_n F'_n$ e una correlazione Ω tra $F'_n F_n$ il cui prodotto $\Omega\pi$ è un sistema polare. In tal caso

$$\Omega \pi \Omega \pi = 1$$

$$\Omega \pi \Omega \pi = \pi^{-1}$$

$$\pi \Omega \pi \Omega = 1 ,$$

percui la relazione di armonia tra π, Ω, è reciproca.

Moltiplicando una collineazione π tra $F_n F'_n$ per un sistema polare in F'_n, si ha una correlazione Ω tra $F_n F'_n$ armonica a π^{-1}, quindi essendo i sistemi polari in F'_n $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$, e componenti un sistema lineare, si ha:

Tutte le correlazioni (o collineazioni) tra $F_n F'_n$ armoniche ad una collineazione (o correlazione) tra $F'_n F_n$, compongono un sistema lineare armonico *(coniugato) alla data omografia,* $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$, *che moltiplicato per la data omografia dà il sistema lineare dei sistemi polari in* F_n *(o in* F'_n*).*

In un F_n *il sistema lineare armonico coniugato all'identità è quello dei sistemi polari.*

Ne deduciamo:

Ad un fascio di collineazioni è coniugato armonico un sistema lineare in generale ∞^n *di correlazioni (in casi speciali un sistema più ampio): la relazione fra due tali sistemi armonici è che i prodotti delle collineazioni dell'uno per le correlazioni dell'altro compongono il sistema lineare* $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$ *dei sistemi polari in* F_n *(o in* F'_n*).*

In generale non vi sono correlazioni armoniche a tre collineazioni non appartenenti ad un fascio.

Si ha poi:

Se due sistemi lineari di omografie, l'uno in F_n, *l'altro in* F'_n *sono proiettivi, anche i sistemi coniugati armonici sono proiettivi e viceversa.*

Le omografie permutabili con un sistema son permutabili col coniugato.

Considerando il sistema armonico al fascio dell'identità e di una collineazione qualunque in F_n si ottiene:

Una collineazione qualunque in un F_n *può sempre decomporsi in* ∞^n *(o più) modi nel prodotto di due sistemi polari, e questi sistemi polari suoi fattori compongono un sistema lineare ad* n *(o più) dimensioni.*

8. Se la collineazione π e la correlazione Ω sono armoniche,

$$(\Omega\,\pi)^2 = (\pi^{-1}\,\Omega^{-1})^2 = 1\,,$$

dunque:

Le inverse di una collineazione e d' una correlazione armoniche son armoniche.

9. Sieno π, Ω una collineazione tra $F_n F'_n$, e una correlazione tra $F'_n F_n$, armoniche fra loro; i punti e gli F_{n-1} di F'_n corrispondenti in π, Ω^{-1} ad un punto di F_n si corrispondono in un sistema polare, e la condizione necessaria e sufficiente affinchè questa correlazione così ottenuta sia un sistema polare è che esistano per essa infiniti $(n+1)$ goni auto-coniugati.

Dunque

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una collineazione tra $F_n F'_n$ *e una correlazione tra* $F'_n F_n$ *sieno armoniche, è che in ciascuno dei due spazi esistano infiniti* (n + 1) *goni cui corrispondano nella collineazione (o correlazione)*

e nell'inversa della correlazione (o collineazione) i medesimi (n + 1) *goni o* (n + 1) *dri.*

10. Se π, Ω sono una involuzione ed un sistema polare in F_n, armonici,

$$\Omega\,\pi = \pi^{-1}\,\Omega^{-1} = \pi\,\Omega\,,$$

perciò:

Un'involuzione e un sistema polare armonici sono permutabili e viceversa.

Siccome poi

$$\pi\cdot\pi\,\Omega = \pi^2\,\Omega = \Omega \quad , \quad (\pi\,\Omega)^2 = \pi^2\,\Omega^2 = 1$$

si ha:

Il prodotto d'un'involuzione e di un suo sistema polare armonico, è un sistema polare armonico alla data involuzione.

Agosto 1890.