GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI

PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI

NELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

FONDATO NEL 1863

PROSEGUITO DAL PROFESSORE

ALFREDO CAPELLI

Volume XLV — (14° della 2ª Serie)
1907.

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA ED INDUSTRIALE
DI BENEDETTO PELLERANO
LUIGI CARLO PELLERANO, Successore
1907.

19. Ritorniamo al sistema:

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \psi(x,\, y) = 0 & \text{(nei punti di C)} \\[2ex] v = 0\ ,\ \dfrac{dv}{dn} = 0 & \text{(nei punti di } c\text{).} \end{cases}$$

Sviluppiamo la $\psi(x,\, y)$ come nel § 16 e consideriamo la serie:

$$u_1 = \sum_{1}^{\infty}{}_r \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{p_{rs}(x,\, y)}{u_{rr}} = \sum_{1}^{\infty}{}_r \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{p_{rs}(x,\, y)}{h_r + j_s},$$

essa rappresenta l'integrale regolare delle equazioni (30).

Infatti, per le (24)'' e (24)''' si può scrivere:

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = \sum_{1}^{\infty}{}_r \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{p_{rs}(x,\, y)}{k_r + j_s} = \sum_{1}^{\infty}{}_r \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{p_{rs}}{k_r + j_s} k_r$$

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \sum_{1}^{\infty}{}_r \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{p_{rs}}{k_r + j_s} j_s.$$

Quindi:

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} - \psi(x,\, y) = \sum_{1}^{\infty}{}_r \sum_{1}^{\infty}{}_s p_{rs} - \psi(y,\, y),$$

il secondo membro della quale è zero in forza della (24)'.

Inoltre essendo nei punti di c

$$p_{rs} = 0\ ,\ \frac{dp_{rs}}{dn} = 0$$

si trae:

$$u_1 = 0\ ,\ \frac{du_1}{dn} = 0 \text{ (nei punti di } c\text{).}$$

Si conclude pertanto che u_1 è l'integrale regolare delle equazioni (30).

NUOVO ELENCO DELLE OPERE DI GIUSEPPE BATTAGLINI CON CENNI RIASSUNTIVI[1]

DEL

Prof. FEDERICO AMODEO

In ciò che segue il Giornale di Matematiche sarà indicato con G. B.; i Rendiconti, le Memorie e gli Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli rispettivamente con R. A. N., con M. A. N., con A. A. N.; gli Atti della R. Accademia dei Lincei di Roma, con A. A. L. R.; i transunti di esse con T. A. L. R.; le sue Memorie con M. A. L. R.; gli Atti dell'Istituto d'incoraggiamento di Napoli con A. I. I. N.

1. *Sugli assi principali* (R. A. N. 1850, pp. 75-83; G. B. v. IX, pp. 38-45, 1871).

Cerca l'inviluppo di tutti i piani rispetto ai quali una massa M ha egual momento di inerzia n^2, trova una sup. di secondo grado che ha per centro il centro di gravità della massa, e gli assi diretti secondo gli assi principali relativi a tal punto. Al variare di n le superficie sono omofocali. Cerca poi gli assi principali rispetto ad un punto della massa.

Indi cerca il luogo dei punti rispetto ai quali la massa M ha un costante momento di inerzia, e trova una sfera col centro nel centro di gravità della massa, indi cerca il luogo degli assi rispetto ai quali la massa M ha costante momento d'inerzia. Mette in relazione l'inviluppo coi due luoghi e con altre questioni e perviene alla superficie delle onde come luogo degli assi principali dei punti comuni all'inviluppo ed al primo luogo. Termina con la considerazione di casi particolari.

---

[1] Il presente Elenco, più completo di tutti i precedenti, è stato estratto, unitamente ai cenni riassuntivi, col consenso dell'Autore, dalla memoria: *Giuseppe Battaglini e le sue opere*, pubblicata nel vol. XXXVI degli Atti dell'Accademia Pontaniana.

N. della Direzione.

2. *Inscrivere in una superficie di 2° grado un poligono in modo, che i lati passino per punti dati* (Ann. di Tortolini, t. II, 1851, pp. 20-38).

Si considera e risolve il problema sulla sfera e per un quadrilatero e poi se ne estende la risoluzione geometrica alle superficie di 2° grado. Considera poi tre casi particolari: quello in cui i punti dati siano in un piano; quello in cui, in una curva piana tracciata sulla superficie di 2° grado, si voglia inscrivere un poligono che abbia per lati archi di curve piane della superficie che passino per punti dati della superficie e i loro piani passino per punti dati dello spazio; ed in fine, il caso particolare della sfera già trattato da G. Scorza (cfr. Opuscoli matem. della Scuola del Sig. N. Fergolà, III, Napoli, 1811).

3. *Soluzione di un problema di Geometria a tre coordinate. Descrivere una sfera in modo che intersechi quattro altre sfere ad angoli dati* (Ann. di Tortolini, t. II, 1851, pp. 373-380).

È un problema più generale di quello della sfera tangente a quattro sfere, trattato da Flauti, Bruno e Tucci.

4. *Sul problema d'inscrivere in una curva di secondo grado un poligono in modo che i lati passino per punti dati.* (Ann. di Tortolini, tomo II, 1851, pagine 380-382).

È una risoluzione diretta del problema di Giordano mediante l'introduzione di funzioni trigonometriche, che dà luogo al metodo detto ora di falsa posizione tripla: poi estende la costruzione trovata alle coniche.

5. *Di alcune proprietà delle superficie di secondo grado che passano per una stessa curva, o sono inviluppate da una stessa superficie sviluppabile.* (R. A. N. 1853, pp. 127-129).

È semplicemente un sunto di una memoria che doveva essere esaminata dai socii De Luca, Tucci, Trudi e Padula. Il sunto non è abbastanza chiaro.

6. *Sulla conica di minima aia circoscritta ad un quadrigono.* (Ann. di Tort. t. V, pp. 193-200, 1854).

Il Battaglini intende per area di una iperbole quella dell'ellisse che ha i suoi medesimi assi. Ciò posto, egli dimostra che le coniche del fascio di minima area sono tre, e le determina mediante i centri.

In fine esamina anche quali sono, nei diversi casi considerati, le coniche iperboliche o ellittiche di area massima.

7. *Salla dipendenza scambievole delle figure* (in due parti). (M. A. N. v. II, 1857, presentata nel 1856, pp. 175-185, 186-196).

Segue i concetti di Poncelet, Chasles, Möbius, Steiner, con pure considerazioni geometriche. Definisce incompletamente le forme omografiche di 1ª specie (divisioni *omografiche* e fasci *omografici*), poichè crede che basti la corrispondenza biunivoca (senza la condizione della corrispondenza dei gruppi armonici). Però non fu il solo eminente geometra a commettere errore su questa definizione.

Passa alle omografie sovrapposte e dimostra che debbono avere due punti uniti, e che tre coppie individuano l'omografia. Definisce con le forme di 1ª specie le linee di 2° ordine e gl'inviluppi di 2ª classe. Mostra come esse siano individuate da 5 elementi; il caso degenere dell'inviluppo e del luogo in due forme di 1ª specie; la costruzione lineare; le proprietà del triangolo inscritto e delle sue tangenti.

Rileva la proprietà del quadrangolo inscritto, di avere per Δ diagonale un triangolo polare; e il teorema correlativo.

Parla delle coniche polari reciproche rispetto ad una conica.

Poi esamina il caso del parallelogramma inscritto. Passa alla ricerca degli assi e dei diametri coniugati di dato angolo. Dimostra il teorema dell'esagono inscritto.

Cerca le coppie di punti di due punteggiate proiettive sovrapposte che hanno una data distanza (e le correlative) ed altre questioni simili. Accenna alle punteg. simili ed ai fasci inversamente eguali.

Contemporaneamente usciva in Francia un libro di de Jonquières col quale pure si cercava di sottrarre la teoria dell' omogr. dal rapporto anarmonico.

8. *Sulla partizione dei numeri.* (M. A. N. v. II, 1857, pp. 353-363).

Dimostra il teorema di Sylvester sul numero dei modi in cui un numero dato si possa decomporre in somma di multipli di numeri pure dati. (Quarterly Journal 1855, dato senza dimostrazione) con mezzi più elementari di quelli usati da Brioschi.

9. *Sopra alcune proprietà delle superficie di secondo grado. Memoria letta nella sess. accad. dei 4 febbraio 1857.* (A. I. I. N. 1861).

Si propone di vedere, per agevolare la Geom. descrittiva, quando la curva del 4° ordine comune a due sup. di 2° grado si spezza in due coniche, e la sup. sviluppabile dei piani tangenti comuni si scompone in due sup. di 2° grado. Con essa si riferisce alla nota pubblicata nel 1853 nei Rend. dell'Accad. delle Sc. Egli considera l'omografia di punti ottenuta come prodotto delle due polarità individuate dalle quadriche, e considera che il tetraedro coniugato comune ad esse ha per vertice i punti uniti (doppi) dell'omogr. In questa omogr. considera i punti consecutivi di un punto p, e nota che se p sta in una faccia del tetr. i suoi consecutivi stanno in essa, e se sta in un lato del tetraedro gli altri vi staranno pure.

Considera che se le due sup. si segano in due coniche, l'omogr. prodotto ha infiniti punti uniti nella retta d'inter. dei piani delle due coniche e infiniti piani uniti nella retta polare reciproca di questa. E se le due quadr. sono circoscritte l'una all'altra, cioè si toccano lungo una conica, ogni punto del piano della conica è punto unito ed ogni retta reciproca del piano è retta unita.

Indi dà la regola per riconoscere la natura della curva d'int. Di tre punti si trovino i consecutivi in numero di 4. Se per uno di essi i consectivi non stanno in un piano la curva è di 4° ordine irreducibile. Se per ognuno i consecutivi stanno in un piano la curva si riduce a 2 coniche. Se per ognuno i consecutivi stanno per diritto le sup. sono circoscritte l'una all'altra.

Poi passa a determinare i piani delle due coniche, quando la curva si spezza, o il piano di contatto delle superficie.

Rifà da capo tutto il ragionamento per parlare della sup. sviluppabile tangente comune alle due quadriche, considerando la omografia di piani prodotto delle due polarità. Egli al solito rifà sempre per esteso il caso duale.

10. *Sulla omografia delle figure.* (Il Giambattista Vico, v. I, pp. 121-131, v. II, pp. 272-289, 1857).

Parla dei sistemi omografici. Definisce l'omografia dello spazio. Considera le sup. rigate generate da punteggiate proiettive, e dimostra che sono di 2° ordine e di 2ª classe. Dimostra che l'omografia fra due forme di 2ª sp. in essa contenute è individuata da 4 coppie di elem. omologhi opportunamente dati. Mostra come si determinino, gli elem. uniti (che egli chiama doppi) nel caso che i sostegni coincidano. Che l'omografia fra due spazii è individuata da cinque coppie di elementi omologhi e mostra come si possano determinare gli elementi uniti (doppi). Svolge altre secondarie applicazioni.

11. *Sopra una questione di Geometria.* (R. A. N. 1861, pp. 48-50).

Definisce le forme omografiche di 2ª specie e le applica alla determinazione degli assi in posizione e grandezza di una superficie di 2° grado di cui si conoscono tre diametri coniugati.

12. *Sopra alcune proprietà delle linee di 2° grado.* (R. A. N. maggio 1862, pp. 24-32).

Scopo della nota è di dimostrare 4 teoremi di F a u r e e 2 di S t e i n e r pubblicati negli Ann. di Mat. di Terquem, tomi 18 e 20, riguardanti la somma e il prodotto dei quadr. dei semiassi di coniche coniugate, o inscritte o circoscr. ad un triangolo.

All' uopo cerca l' equaz. in coord. trilineari che ha per radici i quadrati dei semiassi di una conica.

13. *Sulle superficie di 2° grado.* (R. A. N. giugno 1862, pp. 79-88).

Estende la ricerca precedente alle quadriche e coll' aiuto dell' equaz. in coord. quadroplanari, che ha per radici i quadrati dei semiassi delle quadriche, trova e dimostra dei teoremi analoghi ai precedenti riguardanti proprietà della somma, o della somma dei prodotti a due a due, o della somma degli inversi dei quadrati dei semiassi della quadrica coniugata ad un tetraedro, o che tocchi gli spigoli di un tetraedro.

14. *Nota sui determinanti.* (R. A. N. luglio 1862, pp. 101-112; G. B. v. IX, pp. 136-144, 1871).

Cerca la somma dei determinanti minori di un certo ordine di un det. dato, e la trova espressa mediante un det. dello stesso ordine. Estende la questione anche a cercare la somma dei prodotti di ciascun determinante minore di ord. $k-h$ per la potenza di ρ indicata dalla somma degli ordini delle linee orizz. e vert. che entrano nella formazione del determ., ρ essendo una radice $(h+1)^a$ dell'unità.

15. *Sopra alcune questioni di Geometria.* (R. A. N. settembre 1862, pagine 168-178).

Cerca alcune proprietà riguardanti le locali dei centri delle coniche di un fascio o di una schiera, e trova fra le dette coniche quali hanno massimo o minimo il prodotto dei quadrati dei semiassi.

Ritrova via facendo diversi teoremi di S t e i n e r.

16. *Nota di Geometria.* (R. A. N. ott. 1862, pp. 189-196).

Cerca le locali dei centri delle coniche coniugate o circoscritte od iscritte ad un triangolo (di cui alcune erano state già indicate da S t e i n e r) che hanno costanti la somma dei quadr. dei semiassi o il prodotto o il rapporto.

17. *Sulle forme geometriche.* (R. A. N. 1862, pp. 220-230).

Sono relazioni metriche fra gli elementi di una terna, di una quaterna, sui modi diversi di rappresentare il rapporto armonico, sul triplo rapporto, sull' involuzione.

17*bis*. *Teoria elementare delle forme geometriche.* (G. B. v. I, pp. 1-6, 41-46, 97-109, 161-169, 227-239, 1863).

Riproduce la nota 17 dei R. A. N., *Sulle forme geometriche*, in forma più elementare e più distesa, e dopo aver dato un gran numero di relazioni metriche sull' involuzione, definisce i gruppi e i sistemi equianarmonici fra loro (cioè proiettivi). Nelle relazioni metriche dà al solito la preferenza ai fasci di raggi e di piani, accennando al modo di ricavare da esse quelle per la punteggiata.

In seguito osserva che questi sistemi sono in corrispondenza biunivoca, e dimostra (?) che se due sistemi sono in dipendenza di 1° ordine essi sono equianarmonici. Lo sbaglio sta in ciò che, essendo i sistemi in corrispondenza biunivoca, egli ammette che essa sia anche lineare. Tratta poi della proiettività fra forme sovrapposte, dei loro elementi doppi e dei casi particolari; delle coppie di proiettività sovrapposte e delle coppie comuni; poi degli elem. consecutivi di una proiettività e delle proiettività cicliche di diverso ordine, e degli elementi armonici rispetto ai loro cicli.

18. *Sopra una questione di* Massimi *e* minimi. (R. A. N. 1863, pp. 56-63).

Egli cerca fra le superficie quadriche di un fascio quelle che hanno massimi o minimi il *prodotto dei quadrati dei semiassi.*

Usa le coordinate tetraedrali (quadroplanari) e assume per tetraedro fond. il tetraedro coniugato comune a tutte le sup. del fascio. Trova che il problema è del 5° grado. Trova la locale dei centri di tutte le sup. (una curva di 3° ordine circ. al tetraedro fond.). E determina i centri delle cinque sup. di 2° grado che soddisfano alla richiesta questione.

19. *Sulla dipendenza equianarmonica.* (R. A. N. 1863, pp. 88-97).

È una continuazione delle relazioni metriche proiettive.

Qui trascrive diverse relazioni metriche fra due quaterne proiettive (che egli chiama *equianarmoniche*).

Se ne serve per stabilire altre forme della relazione di proiettività fra due forme di 1ª sp. (e si noti che continua l'errore della definizione), considerando i casi particolari di quaterne di raggi fra loro perp. Chiama *elementi principali* in due fasci di raggi proiettivi quei raggi perpendicolari a cui corrispondono raggi perpendicolari.

20. *Sulle dipendenze di 1° ordine.* (R. A. N. 1863, pp. 122-129).

Considera le forme pr. di 1ª sp. sovrapposte, e con notazioni complicate di funzioni trigonometriche (perchè egli dà come sempre la preferenza ai fasci), stabilisce la equazione della proiettività in 4 aspetti diversi, poi suppone che la coppia AB di riferimento sia di elem. normali e assegna le forme che assume l'equazione suddetta.

Cerca in seguito le diverse forme dell'equaz. degli elem. doppi, e perviene a dimostrare l'esistenza dell'invariante assoluto della proiettività.

Discute l'esistenza degli elementi doppi e l'esistenza degli elem. omologhi ortogonali.

Considera i casi particolari della proiettività, e in ispecie l' involuzione.

21. *Sulle serie di curve di indice qualunque.* (R. A. N. 1863, pp. 149-153; G. B. v. I, pp. 170-174, 1863) (trad. in tedesco, Archiv. für Mathematik v. Grunert., t. 41, 1863, p. 26).

Si riferisce alla nota di de Jonquières pubblicata nel G. B. 1863, p. 128, nella quale l'A. rettificava alcuni suoi teoremi.

Jonquières aveva pubblicati i suoi *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journ. de Mathém. v. 6, 1861, p. 113), che erano subito stati adottati dal Cremona nella *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Mem. di Bologna, 1861, p. 305). A questi lo Chasles aveva mossi degli appunti, che mettevano in dubbio alcuni risultati e Jonquières, senza molto riflettere, si affrettò a pubblicare nel G. B. che i suoi risultati invece di assegnare numeri esatti davano un limite superiore. Da ciò prese le mosse il B. per dare alcuni teoremi d' indole più generale di quelli di Jonquières allo scopo egli diceva di dar ragione di quel cambiamento. (Si vegga Segre *Intorno alla storia del principio di corrispondenza*, Bibl. Math. di Eneström 1892).

Ed il Battaglini raggiunge questi risultati sulle serie ∞^1 di curve C_n di indice N:

Se una curva C_n *del grado* n *è soggetta ad* $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ *condizioni, e si dinota con* N *il prodotto dei gradi delle equazioni tra i coeff. dell'equaz. di* C_n, *che esprimono algebricamente quelle condizioni, l'equaz. di* C_n, *che dovrà contenere un parametro arbitrario, se si rende razionale rispetto a questo parametro, e lo contiene al grado* N, *salirà al grado* Nn *fra le coordinate.*

Invece se nell'equaz. di C_n *si introduce un altro parametro* ξ'/η' *legato all'antico* ξ/η *da una relazione di grado* k *in* ξ, η *e* k' *in* ξ', η' *la nuova equaz. sarà di grado* Nk' *in* ξ', η' *e di grado* Nnk *nelle coordinate.*

Definisce le serie *irriducibili*, le serie *razionali*, le serie *composte.*

Date due serie ∞^1 S' S'' *di curve* $C_{n'}C_{n''}$ *di gradi* n' *ed* n'' *e di indici* N' *ed* N'', *fra loro proiettive, il luogo* Γ *dei punti d'incontro delle curve corrispondenti è* N'N''(n' + n'').

E se le due serie sono razionali, Γ *è del grado* N'n''+N''n'; *e si decomporrà in curve parziali* Γ_i *dei gradi* $N_i'n''+N_i''n'$, *se le serie* S', S'' *sono composte di serie parziali semplici* S_i', S_i'' *d'indici* N_i', N_i''. Seguono i suggerimenti delle cautele da prendere per trovare il grado effettivo di Γ.

22. *Sulle involuzioni dei diversi ordini.* (A. A. N. s. I, v. I, n. 12, pagine 1-14, 1863. Sunto in R. pp. 158-161).

Esamina le proiettività cicliche di ordine *n* nelle forme di 1ª specie deducendone le proprietà da quelle degli elem. consecutivi di una stessa omografia.

Dimostra che le proiett. cicl. di ordine $m > 2$ hanno elem. uniti immag. E, F: che i gruppi del tipo $E\omega_1\omega_{i-1}\,\omega_{i+1}$ sono fra loro proiett. ed hanno il birapporto $=$ ad una radice m^{ma} immag. dell' unità positiva o neg. secondo che m è pari o disp.

« Definisce un elemento a come *armonico di ordine* α di un altro b rispetto ad un ciclo $(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m)$ dell'involuzione, quando è nulla la somma dei prodotti ad α ad α dei rapporti $\frac{\operatorname{sen} a\omega_i}{\operatorname{sen} \omega_i b}$, e dimostra che gli armonici di ordine $n < m$ di un elemento a rispetto a un ciclo variabile costituiscono i cicli di un'altra inv. di ord. n aventi gli stessi elem. doppi della primitiva; che se $\alpha + \beta = m$, ed a è armonico di b d'ord. α, b sarà arm. di a d'ord. β rispetto al med. ciclo; che gli elem. doppi sono armonici dei diversi ordini rispetto ad ogni ciclo; che se $(\Omega_1\Omega_2 \ldots \Omega_m)$ è il ciclo degli elem. arm. di ordine n di un elem. ω rispetto al ciclo $(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m)$ di una inv. di ord. m, gli arm. dei diversi ordini di ω rispetto a $(\Omega_1\Omega_2 \ldots \Omega_m)$ saranno anche arm. dei div. ordini di ω rispetto a $(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m)$; che gli arm. di uno stesso ord. di due elem. arbitrarii rispetto ad un ciclo variabile dell'inv. formano due sistemi equianarmonici aventi gli stessi elem. doppi dell' inv. Da ultimo prova essere costante il rapp. anarm. di 4 elem. anarmonici dello stesso ordine di un elem. variabile rispetto a 4 cicli fissi, quando quei quattro elem. abbiano lo stesso indice; questo rapp. anarmonico chiama « caratteristica » dell' inv. e dice due inv. in dipendenza equianarmonica quando i loro cicli si corrispondono in guisa da presentare eguali caratteristiche » (cfr. D' O v i d i o, *h*, p. 566).

23. *Sulla dipendenza duplo-armonica.* (R. A. N. 1863, pp. 240-249; G. B. v. I, pp. 321-338, 1863).

Considera un sistema piano riferito correlativamente (*dipend. equianarmonica*) ad un altro sistema piano in due modi differenti; fra il primo ed il secondo piano si stabilisce una corrisp. biunivoca fra elementi omonimi (che egli chiama *dipendenza duplo-armonica*) ed è la trasformazione quadratica.

Ne assegna le proprietà fondamentali riguardo ai punti comuni alle coniche di ogni piano che corrisp. alle rette dell'altro, assegna alcune relazioni metriche e fa osservare che nel caso particolare che due dei punti fondamentali coincidano con i punti ciclici del piano si ritrova la *dipendenza circolare* (Kreisverwandtschaft) di M ö b i u s.

Considera poi il caso che i piani siano sovrapposti, fa osservare l'esistenza dei 4 punti doppi, e la loro costruzione, e i casi particolari che possono avverarsi.

24. *Intorno ai sistemi di 2° ordine e di 2ª classe.* (G. B. v. I, pp. 287 290, 1863).

Date due polarità sovrap. con coniche fond. reali egli dà una regola semplicissima per riconoscere se le due coniche hanno 4 p. distinti o coincidenti in due coppie.

Analoga questione fa per la correlativa nel piano e per i coni fondam. di due polarità stellari, e per le sup. quadriche fond. di due polarità dello spazio.

25. *Sul parallelogramma delle forze.* (G. B. v. I, pp. 365-367, 1863).

È una dimostrazione in cui entrano espressioni complesse.

26. *Intorno alle condizioni di equilibrio di un sistema di forma invariabile.* (G. B. v. I, pp. 367-368, 1863).

Dal principio delle velocità virtuali deduce le sei note condizioni di equilibrio del sistema.

27. *Questioni 1, 2, 3 e 4.* (G. B. v. I, p. 63, 1863, soluzione di X, v. II, pp. 20-32, 158-160, 1864). *Questioni 14 e 15.* (G. B. v. I, p. 256, 1863, soluzioni di X, v. II, pp. 30-32, 158-160, 1864).

27^bis. *Soluzioni delle questioni* 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25. (G. B. v. I, pp. 224, 311, 318 e 369-378, 1863).

28. *Soluzioni delle questioni 26 e 27 proposte da J. J. Sylvester.* (G. B. v. II, p. 29; pp. 86-91, 1864).

28^bis. *Questioni 28 e 29 di Cremona e Desargues risolute da Battaglini* (G. B. v. II, p. 30, pp. 52-57, 1864).

28^ter. *Soluzioni delle questioni 30 e 31 proposte da Cremona.* (G. B. v. II, p. 62, pp. 186-190, 1864). *Soluzione della questione 36 prop. da Dorna.* (G. B. v. II, p. 160, pp. 255-256, 1864).

29. *Sulle divisioni omografiche immaginarie.* (R. A. N. 1864, pp. 37-47; G. B. v. II, 142-151, 1864).

Rappresenta i punti immag. di una retta nel piano di G a u s s.

Assume come definizione che per tre p. del piano $(AB)+(BC)+(CA)=0$.

Dimostra che 4 p. arm. stanno su una circonferenza.

Considera due punteggiate proiettive su rette differenti e dimostra che, se O, O′ sono i loro p. limiti, i punti che corrispondono ad esse nei rispettivi piani $\pi\,\pi'$ sono legati da *affinità circolare* di M ö b i u s (*Kreisverwandtschaft*). Ad ogni retta di π corrisponde un cerchio di π' che passa per O′ e viceversa, e ad ogni cerchio un cerchio, e il rapp. anarm. di 4 p. è eguale a quello dei corrispondenti.

Considera il caso in cui le rette siano sovrapposte; se E, F sono i punti uniti la fig. OEO'F è un pgr. Due potenze della omogr. hanno gli stessi p. uniti. Gli elementi successivi p_i dell' omogr. girano intorno ed E o F positivamente, e negativamente intorno all'altro raggiungendolo per $i = \infty$.

Le curve descritte sono delle spirali di cui assegna le equazioni, e dimostra che esse tagliano i circoli passanti per E e per F sotto un medesimo angolo.

Dimostra che se p_{-0} è coniugato di p_0 rispetto a $p_i p_{-i}$ essi lo sono pure rispetto ad E ed a F.

Assegna le distanze Op_i, $O'p_{-i}$ con fraz. continue finite e quelle di OE, O'F con fraz. continue infinite.

Considera le omog. cicliche di ordine m, e le corrispondenti *affinità circolari di ord.* m; per esse il parallelogrammo OEO'F è un rombo, i punti p_i appartengono ad una circonferenza, che ha il centro su EF e divide EF nel rapporto $Ep_0 : p_0F$, e taglia sotto lo stesso angolo i cerchi che passano per E, F.

Le rette $p_{i-1} p_i$ inviluppano una conica bitangente al cerchio dei punti p_i.

I birapporti $(Ep_0 p_1 p_2) = \alpha$, $(Fp_0 p_1 p_2) = \beta$ danno $\alpha^m = \pm 1$, $\beta^m = \pm 1$.

Ogni figura di π si ripete nel piano ciclicamente m volte.

Considera un *ciclo* dell' omografia ciclica (usa la parola *ciclo*), definisce i *punti arm. di ord.* α rispetto ad esso, e ne enuncia diverse proprietà.

30. *Intorno ad una memoria del sig. D. Turazza.* (G. B. v. II, pp. 295-297, 1864).

Riassume una memoria del T u r a z z a per applicarla alla risoluzione della questione 37 proposta da D o r n a.

31. *Sulle forme binarie di 1° e 2° grado.* (R. A. N. 1864, pp. 76-85; G. B. v. II, pp. 160-179, 1864).

Considera in una forma di 1ª specie: l' *invariante* rappresentante il birapporto di 4 elementi; il *discriminante* di un forma quadr. U=0 di due elementi, l'*emanante*, detto altrimenti *polare*, rappresentante una coppia divisa armonicamente dall'altra coppia U; l'*invariante di 2° grado* di due coppie U, U', rappresentante che esse sono coniugate arm.; il *Jacobiano* delle stesse forme quadratiche (rappr. le coppie coniug. arm. ad entrambe).

Dimostra che tutte le forme quadr. di una stessa inv. hanno il medesimo *Jacobiano.*

Determina la coppia comune a due inv. e l'equaz. della proiettività e degli elementi doppi.

Una nota aggiunta a questa memoria è l'op. 38.

32. *Sulle forme binarie di 3° grado.* (R. A. N. 1864, pp. 109-118; G. B. II, pp. 193-202, 1864).

Ha per oggetto la rappresentazione geometrica delle forme binarie di 3° grado.

Indica con U=0 la forma di 3° grado. Trova il *discriminante* Δ (condizione perchè due elem. coincidano); poi l' altra condizione perchè tutti coincidano.

Definisce l' elem. arm. di 1° ord., e quello arm. di 2° ord. rispetto alla terna e ne trova le equaz. Essi sono gli *emananti* di 1° e 2° ordine della U rispetto ad (x_1, y_1).

Definisce i 3 coniugati arm. rispetto agli elem. della terna. Questa definizione è di B a t t a g l i n i: Due qualunque di essi sono coniugati arm. rispetto alla coppia degli elementi arm. di 2° ord. del rimanente rispetto alla terna $(\alpha\beta\gamma)$. Trova che i tre elem. della cubica possono essere coniugati arm. rispetto alla cubica.

Trova l' *Hessiano* H, e trova l' *evettante* V del discrimiante di U, ovvero il *Jacobiano* di U ed H (*covarianti associati* di U rispetto allo stesso U secondo H e r m i t e) e li definisce. Dimostra alcuni teoremi su questi, e che gli elem. di H sono quelli che presi per elem. fondamentali riducono U e V alla forma canonica (somma di due cubi).

Trova l'identità

$$\Delta U^2 + 4H^3 - V^2 = 0.$$

Dimostra il teorema di C r e m o n a riguardante il gruppo equianarmonico $(\alpha\beta\gamma\omega)$: *Se l'elem.* ω *ha rispetto alla terna* $\alpha\beta\gamma$ *gli elementi arm. di 2° tra loro coincidenti,* $(\alpha\beta\gamma\omega)$ *sarà equianarmonico.*

Trova infine le espressioni di Δ, V ed H in funzione delle coord. dei punti di U.

33. *Sulle forme binarie cubiche.* (R. A. N. 1864, pp. 163-174; G. B. v. II, 243-253, 1864).

Le due forme sono U ed U', H ed H' i loro Essiani, V e V' i loro evettanti, Δ e Δ' i loro discriminanti.

Trova l'invariante $I_{1\cdot1}$ di 2° grado che esprime che U è formata da elem. coniugati arm. di U', e altri due invar. analoghi per le coppie di cubiche (U, V') o (V, U') e (V, V'). $I_{1\cdot3} = I_{3\cdot1}$ è di 4° grado e $I_{3\cdot3}$ di 6° grado. Trova $I_{2\cdot2}$ di 4° grado che rappresenta la condizione affinchè gli Hessiani formino un gruppo arm.

Con la considerazione degli elem. arm. di 2° ord. di x, y rispetto U, V, U', V', trova 4 covarianti di 1° gr., 4 covar. di 2° gr., un 5° cov. di 2° gr. risulta come jacobiano di H ed H'; ed accenna ad altri invar. e cov. che da questi si potrebbero ottenere.

Trova come Jacobiani dei sistemi risultanti UHV con U'H'V' altri quattro covar. di 3° gr. e 4 covar. di 4° gr. Considera poi l'involuzione di 3° ord. individuata da U e U' e dimostra che *ogni tern. coniugata arm. di due terne del-*

l'inv. è coniug. arm. a tutte le altre, e che l'inv. cubica si può dire costituita da tutte le terne coniugate arm. a due forme cubiche, e con ciò dà il modo di costruire tutte le terne di una involuzione cubica.

Trova gli elem. doppi dell'invol. e con diversi altri problemi risolve anche quello di trovare la terna comune a due inv. cubiche.

Considera poi l'*involuzione doppiamente infinita* (inv. *doppia*, mentre chiama *semplice* la precedente) individuata da tre terne U_1, U_2, U_3; dimostra che essa è individuata da tre terne, e che è costituita da tutte le terne coniugate arm. di una data terna; e di questa assegna l'equaz. e dimostra che ogni suo elemento rappresenta un elemento *triplo* dell'inv. doppia. Costruisce indi l'invol. quando sono noti i suoi elementi tripli, ed i suoi elementi *doppi*.

Di due invol. doppie sovrapposte trova l'invol. cubica semplice comune. E di tre invol. doppie sovrapposte trova la terna comune a tutte.

34. *Sulle forme binarie di 4° grado.* (R. A. N. 1864, pp. 201-213; G. B. II, pp. 340-351, 1864).

Chiama U la forma binaria di 4° grado, e cerca l'invariante quadratico I che esprime che il gruppo è *equiarmonico*, e l'invariante cubico J che esprime essere esso *armonico*, ed il discriminante Δ, e la condiz. perchè il gruppo sia costituito da due elem. doppi, e quelle che fanno avere ad esso $I=0$, $J=0$ o un elem. triplo o gli elem. coincidenti. Rammenta che J sotto la forma di determ. si dice *cataletticante*.

Definisce gli elem. arm. di 1°, 2° e 3° ordine di un elem. per rispetto alla quaterna, che sono rappresentati dal 1°, 2°, 3° *emanante* di U. E definisce la *quaterna coniugata arm. rispetto alla* U, e dimostra che per essere il gruppo coniug. arm. a sè stesso deve essere $I=0$; poi passa a trovare le equazioni dei due covarianti fondamentali di U, cioè H e V.

35. *Sulle forme binarie biquadratiche.* (R. A. N. 1864, pp. 234-241; G. B. III, pp. 24-31, 1865).

Cerca i *covarianti associati* di U rispetto ad U che sono tre; i covar. assoc. di H rispetto ad H, che sono pure tre; i covar. assoc. di H rispetto ad U e di U rispetto ad H, che sono 4 e 4.

Poi cerca gli elem. arm. di 1° di 2° di 3° ord. degli elem. di U rispetto ad U, ed accenna ai tanti altri covarianti che si potrebbero trovare e a proprietà particolari di essi.

Considera poi due forme biquadratiche. Trova l'invariante $I_{1\cdot 1}$ di 2° grado che esprime la condiz. affinchè gli elem. di una siano coniugati arm. rispetto all'altra, e gli analoghi per le coppie di forme (U, H') o (H, U'), ed (H, H').

Con la considerazione degli elem. arm. di 3° ordine di un elemento (x, y) rispetto alle forme U, H, U', H' trova 4 covarianti di 2° gr.; con quelli di

2° ord. trova 4 covarianti di 4° gr., e con quelli di 1° ord. ne trova 4 di 6° grado.

36. *Sulle forme biquadratiche in involuzione.* (R. A. N. 1864, pp. 263-276; G. B. III, pp. 51-59, 1865).

Con questa nota intende di studiare la invol. semplicemente o doppiamente o triplamente infinita che è individuata da 2, 3 o 4 forme biquadratiche.

Invol. ∞^1. Dimostra che ogni quaterna coniugata armonica rispetto a due quat. dell'involuzione ∞^1 è coniugata arm. rispetto a tutte le altre, e che l'inv. ∞^1 è formata di tutte le quaterne coniug. arm. rispetto a tre form. biq.; che in essa vi sono due quaterne che formano gruppi equianarmonici, tre che hanno gruppi armonici, e sei con un punto doppio. E che una sola quaterna dell'inv. è coniugata arm. rispetto ad una arbitraria quaterna.

Invol. ∞^2. È costituita da tutte le quaterne coniug. arm. rispetto a due forme biquadratiche. In essa vi sono 6 quaterne dotate di un elem. triplo.

Invol. ∞^3. Tutte le quaterne dell'inv. tripla sono coniug. arm. rispetto ad una stessa quat. di elem. Ed ogni elem. di questa quaterna è elem. *quadruplo* della data involuzione.

Indi discute della possibilità dell'esistenza di quaterne comuni a due o più involuzioni ∞^1, ∞^2 e ∞^3.

37. *Sulle forme binarie miste di 3° e 4° grado.* (R. A. N. 1864, pp. 282-292; G. B. III, 218-227, 1865).

Si propone di studiare le proprietà fondamentali delle corrispondenze fra due, tre o quattro forme di 1ª specie sovrapposte rappresentate attualmente coi simboli (1, 2), (1, 1, 1), (1, 3), (2, 2), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1) e che vengono rappresentate da equaz. di 3° o di 4° grado.

Comincia dalla corrispondenza (1, 2); indica con U la forma binaria di 3° grado a due sistemi di variabili (x_1y_1) (x_2y_2) che la rappresenta, e fatto osservare che le coppie che corrispondono ai diversi punti della prima forma costituiscono un'involuz. di 2° ord., trova l'equaz. degli elementi doppi che indica con W, e l'equaz. delle *coincidenze* della corrisp. e risolve un'altra semplice questione su di essa.

Poi considera la corrispondenza (1, 1, 1) fra tre forme di 1ª specie sovrapposte che chiama *equianarmonica doppia*, e che è rappr. da un'equaz. trilineare U di 3° grado omogenea. Ad ogni elemento della prima forma corrispondono infinite coppie delle altre due forme che costituiscono una proiettività; al variare del primo elemento le infinite coppie di punti uniti delle proiettività costituiscono un'involuzione; di cui egli trova gli elementi doppi. Trova l'equaz. degli elementi *tripli* della corrispondenza: indi esamina il caso in cui la corrisp. diventa involutoria, e una proprietà di otto terne della corrispondenza generica.

Considera la corrispond. (1, 3) individuata da un' equaz. U di 4° grado fra due sistemi di variabili, e analizza le proprietà dell'*Hessiano* e dell'*evettante* dell' invol. cubica semplice formata da tutte le terne della 2ª forma, e trova l'equaz. dei suoi elementi doppi. Indi assegna l'equaz. delle *coincidenze*, e studia dei casi particolari e delle proprietà inerenti a 4 terne della 2ª forma corrispondenti a 4 elementi arbitrari della prima che lo conducono alla costruz. della corrisp.

Passa alla corrisp. (2, 2) individuata da un' equaz. di 4° grado fra due sistemi di variabili ed esistente fra due forme di 1ª specie sovrapposte. Trova prima la condizione che deve avverarsi perchè le coppie di ciascuna forma siano in involuzione; indi ritorna al caso generale e trova i 4 elementi doppi di ciascuna forma, poi trova l' equaz. delle 4 coincidenze. Esamina un caso particolare ancora; indi passa a trovare la costruzione della corrisp. generale.

Passa alla corrisp. (1, 1, 2) individuata da un'equaz. di 4° grado fra tre sist. di variabili e trova la equaz. delle 4 coincidenze e degli elem. doppi della 3ª forma.

Studia infine la corrisp. (1, 1, 1, 1) individuata da un'equaz. di 4° grado, e la chiama *equianarmonica tripla*. Trova l'equaz. delle 4 coincidenze, ed esamina le proprietà di 16 quaterne di elem. corrispondenti.

38. *Sulle forme binarie di 2° grado.* (G. B. v. III, pp. 22-23, 1865).

Esprime i diversi birapporti fondamentali della quaterna costituita da due forme di 2° grado, in modo semplice mediante i discriminanti delle date forme e dell'inv. quadrato dello stesso sistema.

È una nota aggiunta all'op. 31.

39. *Nota alla p. 5 della Memoria del Prof. L. Palmieri: Nuovo elettrometro bifiliare.* (A. A. N. v. II, 1865, n. 6).

Riguarda una relazione tra gli archi impulsivi β ed i definitivi α espressa da B a t t a g l i n i colla seguente equazione

$$\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$$

e da lui stesso dimostrata.

40. *Sulle forme geometriche di 2ª specie. Nota prima.* (R. A. N., 1865, pagine 44-57; G. B. v. III, pp. 298-310).

Si propone di trovare le relazioni metriche fra i raggi ed i piani di una stella mediante le relazioni fra i punti e gli archi di una sfera concentrica di

raggio 1. Da esse, supponendo il centro all'infinito, trova le analoghe relazioni fra gli elem. di un sistema piano.

Relazioni fra tre raggi e i tre singoli piani individuati.

Tutte le altre sono complicatissime e non è possibile di riassumerle in poche parole.

Finisce col definire i punti *ciclici*.

41. *Sulle forme geometriche di 2ª specie. Nota seconda.* (A. A. N. s. I, v. II, n. 18, p. 1-28, 1865; Sunto nel R. 1865, p. 144-147; G. B. v. IV, p. 96-122, 1866).

Segue alla nota prima e studia le stelle omografiche e le stelle correlative che egli chiama opportunamente *eterografiche*.

Dimostra che in due stelle omogr. esistono due terne ortogonali omologhe.

Parla di *archi ciclici* e di *sistemi omociclici*, di *punti focali* e di *sistemi omofocali* e dei *sistemi simili* e dei *sistemi eguali*.

Tutto è dedotto con relazioni metriche ed analitiche.

Considera poi la proiettività fra forme sovrapposte, ed i casi speciali della *omologia*, dell'*involuzione* e dell'*involuzione ortogonale*.

42. *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di 2ª specie.* (A. A. N. s. I, v. II, n. 19, pp. 1-20, 1865; Sunto nel R., 1865, pp. 226-228; G. B. v. IV, pp. 174-186 sotto il titolo *Sulle forme geometriche di 2ª specie*).

Considera gli elementi consecutivi dell'omografia di forme sovrapposte e le omografie cicliche (*involuzioni* di ordine m).

Dice che i sistemi equianarmonici consecutivi hanno gli stessi punti doppi. Che gli elementi consecutivi tendono in un senso (positivo) (o negativo) ad uno (o ad un altro) elem. doppio, e dimostra altre proprietà.

Definisce le *involuzioni parziali* di ordine $2m$, e di ordine m, e le *involuzioni totali di ord.* 2m *o* m, e ne dimostra diverse proprietà.

D' O v i d i o dichiara questa Mem. importante ed originale e che soltanto nel 1868 C l e b s c h e G o r d a n (Math. An. v. I) presero in esame le curve descritte dagli elem. consecutivi dell' omogr. e più tardi ci tornarono sopra K l e i n e L i e (1871, Math. An. v. 4); ma nessuno ha citato mai il primo che le ha studiate.

43. *Sulle forme binarie dei primi quattro gradi appartenenti ad una ternaria quadratica. Nota prima.* (R. A. N. 1865, pp. 351-357; G. B. v. V, p. 39, 1867).

(Vedi il riassunto del n. 45).

44. *Sopra una curva di 3ª classe e di 4° ordine.* (R. A. N. 1865, pp. 390-407; G. B. v. IV, pp. 214-222, 1866).

Le sue ricerche intorno alla forma ternaria sulla conica lo hanno condotto a questo studio; egli congiunge ogni punto della conica con i suoi punti armonici di 1° e 2° ordine rispetto ad una terna di punti data e trova che esse inviluppano una curva di 3ª classe e 4° ordine. Poi trova che questa stessa curva si può anche generare come inviluppo in un modo diverso. Dopo avere viste diverse proprietà osserva che questa curva ha come caso particolare la *ipocicloide tricuspide* annunziata da Steiner nel vol. 53 di Crelle e studiata geometricamente da Cremona nel vol. 64 dello stesso giornale.

45 e 46. *Sulle forme binarie dei primi quattro gradi appartenenti ad una forma ternaria quadrica. Nota seconda.* (R. A. N. 1866, pp. 35 41). *Nota terza.* (R. A. N. 1866, p. 141-149). (G. B. v. V, pp. 39 56, 1867).

Le tre note 43, 45, 46, costituiscono un importante contributo allo studio delle forme binarie sulle varietà ∞^1 di 2° ordine. Oggi la teoria delle forme binarie sulle curve di ordine qualunque ha fatto progressi rilevanti; allora era un abbozzo di un tentativo felicemente riuscito. Seguendo il suo metodo preferito egli considera il cono di 2° ordine come luogo e come inviluppo e lo sega con la sfera concentrica di raggio 1, perciò tratta della conica sferica, poi si riduce come particolare caso alla conica piana.

Nella prima nota tratta delle forme binarie di 1° e 2° grado.

Considera di due coppie di punti della conica il *doppio rapporto* o *rapporto anarmonico*, indi considera il caso in cui le coppie di punti ab, cd sono armoniche e nota che in tal caso le tang. in a e b si segano su cd, in p, quelle in c e d su ab in q, e che questi punti con $r = ab \cdot cd$ formano un Δ autoconiugato rispetto alla conica (egli dice *una terna coniugata*). Nota che le coppie di punti della conica che sono armoniche con ab sono allineate con q e che la retta pq determina sulla conica la coppia comune alle due invol. che hanno per punti doppi ab e cd.

Indi interpreta l'*emanante misto* di una forma bin. U di 2° grado (rappresentante le coppie arm. con essa); l'*invariante di 1° grado* di due forme bin. U e V di 2° grado (rappres. che esse sono arm.) il *Jacobiano* di U di due forme bin. U_1 e U_2 di 2° grado (rappr. i p. doppi dell'invol. U_1U_2); il *Jacobiano* dei jacobiani U e V di due coppie U_1 e U_2, V_1 e V_2 (la coppia comune alle due invol.).

Passa a considerare due puntegg. proiett. sulla conica (sistemi in dipendenza equianarmonica) ne trova l'asse di collineazione, ed osserva che l'inviluppo delle rette che congiungono i punti corrispondenti è una conica bitangente alla data; e ne fa un' applicazione ad un probl. più generale di quello di Giordano. Considera in seguito anche gli elem. consecutivi di una proiettività, i loro punti limiti, i coniugati arm. di ω_0 rispetto a ω_i ed ω_{-i}; poi considera le *proiettività cicliche* (che egli chiama *involuzioni di ordine* m) e di questa ne esamina le più minute proprietà.

Nella nota 2ª considera le forme cubiche sulle coniche. Comincia col considerare una sola terna di punti abc e mostra come si costruisce di un p. qualunque ω i p. armonici di 2° ordine $\omega_2\omega_2$ rispetto ad essa, ed il punto armonico ω_1 di 1° ordine. Per arrivare a ciò ha dovuto costruire la terna $a'b'c'$ rappresentata dall'*evettante del discriminante* di abc, indi costruisce l'*Hessiano* della terna, il 2° evettante del quadrato del suo discriminante, ed il covariante cubico.

Poi considera 2 terne della cubica $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, e indica che ogni altra terna dell'involuzione ∞^1 I da esse individuata individua un triangolo circonscritto alla conica inscritta nei triangoli delle prime due terne.

Considera l'invol. associata I' di I, ed i punti doppi di entrambe.

Dopo passa a considerare 3 terne della conica e la inv. ∞^2 da esse individuata e indica a quale condiz. geom. deve soddisfare una terna qualunque di esse.

Poi considera le terne comuni a due inv. ∞^2 di terne; le terne dei loro punti tripli è la terna comune a 3 inv. ∞^2 di terne di punti.

Nella nota 3ª considera le forme biquadratiche. Comincia dal considerare una quaterna di punti della conica, e ne costruisce di un p. qualunque i punti armonici di 3°, di 2° e di 1° ord., il suo Hessiano, lo Jacobiano della forma e del suo Hessiano. Poi passa a considerare i *covarianti associati* alla forma, e le inv. ∞^1, ∞^2, ∞^3 individuate da 2, 3, 4 quaterne.

47. *Intorno ai sistemi di rette di 1° ordine.* (R. A. N., 1866, pp. 194-208). *Intorno ai sistemi di rette di 1° grado.* (G. B. v. VI, pp. 24-36, 1868).

Dimostra le proprietà enunciate da Plücker nei *Proceedings of the Royal Society*, febbraio 1865, riguardanti i sistemi di rette le cui coord. verificano 1, 2 o 3 equaz. di 1° grado, vale a dire i *complessi* di 1° ord., le *congruenze*, le *rigate*.

Comincia dai complessi di 1° ord. che chiama di 1° ordine e di 3ª specie e nota che genera la corrispondenza studiata da Möbius (*sistema nullo*). Osserva che è individuato da 5 rette, e ne studia le proprietà sue.

Poi passa all'intersez. di due complessi, che egli chiama *sistema di rette di 1° grado e di 2ª specie* e lo studia in relazione a tutti i complessi da essi individuati.

Poi studia l'intersez. di 3 complessi che chiama *sistema di rette di 1° gr. e 1ª specie* e mostra che deve essere una rigata di 2° ord.

48. *Osservazioni intorno ad una formola relativa all' elettrometro bifiliare.* (R. A. N. 1866, pp. 265-267).

La validità della formola data dal Battaglini sulla nota a pag. 5 della Mem. di Palmieri (cfr. op. 39) era stata attaccata da P. Volpicelli nei tomi XVII e XVIII degli Atti dell'Acc. Pontif. dei Nuovi Lincei. Il B.

ritorna sulla dimostrazione di quella formola, la conferma, e fa vedere come essa possa servire a valutare la perdita di elettricità in un dato tempo.

49. *Intorno ai sistemi di rette di 2° grado.* (A. A. N. s. I, v. III, n. 8, pp. 1-45, 1866-68; Sunto in R. 1866, pp. 305-307; G. B. v. VI, pp. 239-258, 1868, v. VII, pp. 55-75, 1869).

Vuol stabilire le proprietà dei sistemi di rette le cui coordinate verificano un'equaz. di 2° grado.

Afferma che l'equaz. di un tal sistema si può ridurre con una scelta conveniente del tetraedro fond. a contenere i soli 6 termini a quadrato. Le rette che passano per un punto formano una sup. di 2° ordine, quelle che stanno in un piano formano un inviluppo di 2ª classe. Cerca il luogo dei punti da cui proiettando due p. fissi si hanno rette reciproche rispetto alla sup. conica di 2° ord. del punto e trova una sup. di 2° ord. che passa per i due punti fissi. Proprietà correlativa.

Cerca il luogo dei punti le cui sup. coniche toccano una retta data, e trova una sup. di 4° ordine e di 4ª classe, che coincide con l'inviluppo dei piani di cui gl'inviluppi di 2ª classe si appoggiano alla data retta e questa superf. è anche inviluppo di tutte le sup. coniche di 2° ordine corrispondenti ai punti di una retta, e luogo di tutti gl'inviluppi di 2ª classe corrispondenti ai piani di una retta.

Cerca l'inviluppo dei piani polari di una retta rispetto alle sup. di 2° ord. corrispondenti ai p. della retta e trova che coincide col luogo dei poli della stessa retta rispetto agli inviluppi di 2ª classe dei suoi piani ed è una retta pure.

Indi cerca il luogo delle generatrici di contatto dei piani tangenti condotti dalla retta alle proprie sup. di 2° ordine e trova che coincide col luogo delle coppie di tang. condotte, agli inviluppi corrispondenti alla retta, dai p. d'inter. di essi con la retta ed è una sup. di 4° ordine e di 4ª classe, caso particolare delle sup. di 4° ordine e 4ª classe costituite da tutte le rette del sistema che si appoggiano a due rette fisse (qui le rette sono corrispondenti).

Considera infine i punti pei quali le sup. di 2° ordine corrispondenti si spezzano in due piani ed i piani per i quali gl'inviluppi corrispondenti si riducono a 2 punti e trova che il luogo dei primi e l'inviluppo dei secondi coincidono ed è una sup. di 4° ordine e di 4ª classe dotata di 16 p. singolari e 16 piani singolari, trasformazione omografica della sup. delle *onde*, detta da C a y l e y *tetraedroide*.

Non farei cosa utile se io volessi sostituire qualche cosa di diverso alle belle pagine scritte dal d'O v i d i o (p. 27-28 della sua *Commemorazione*, h) per far valere il merito che il B a t t a g l i n i ha avuto, prima nella prontezza con cui si impossessò dei concetti dal P l ü c k e r enunciati la prima volta nel 1865 sui complessi, la sveltezza con cui perfezionò l'uso delle coordinate di rette

ed i calcoli e le formole a cui dànno luogo, e la maestria con cui si valse per le ricerche sui complessi della teoria delle forme algebriche, applicandovi pel primo la notazione « ombrale », o « simbolica ». È bensì vero quello che notò il K l e i n (prefazione della *Neue Geometrie des Raumes* di P l ü c k e r, 1868; e nella dissertazione inaugurale, Bonn, 1868, *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form*) che il B a t t a g l i n i pose a base dello studio dei complessi di 2° grado un'equazione che non rappresenta il complesso più generale, bensì quello che ora porta il suo nome, ma non si può disconoscere, dice con bella forma il d'O v i d i o, che i suoi ragionamenti in buona parte valgono anche pel complesso generale, e che gran parte delle sue formole vi si adattano con lieve modificazione.

50. *Intorno ai momenti geometrici di 1° grado. Nota prima.* (R. A. N., 1866, pp. 341-352).

Si propone di stabilire i principii della teoria meccanica dei Momenti indipendentemente dalla considerazione delle forze.

Prima si limita ai sistemi appartenenti ad una forma di 1ª specie, e prendendo le mosse dal fascio di piani o di raggi, definisce il *momento* di un elemento del sistema di dato coefficiente rispetto ad un determinato piano o raggio; indi def. il *coefficiente risultante* del sistema e trova il *momento* di tutto il sistema rispetto a quello stesso piano o raggio. Il momento del coeffic. risultante è eguale alla somma dei momenti dei coeff. componenti. Indi mostra come si ottiene la *composizione* di più coefficienti. Dalla formola suddetta ricava quelle che riguardano i sistemi di punti di una punteggiata.

Analogo studio fa per i sistemi appartenenti a forme di 2ª specie. Prima stabilisce i suoi risultati per la stella di raggi e di piani, che egli studia al solito sulla sfera concentrica di raggio uno, e poi ricava le formole pel sistema piano.

51. *Sull'equilibrio di quattro forze nello spazio e soluzione della questione 45 (teorema di Cayley).* (G. B. v. IX, pp. 93-95, 1866).

Le direzioni di 4 forze in equilibrio sono generatrici di uno stesso iperboloide (teor. di M ö b i u s). C a y l e y indicò le relazioni che esistono fra le quattro forze nei *Comptes Rendus* de l'Ac. des Sc. (13 Nov. 1865).

B a t t a g l i n i le dimostra e dimostra infine la questione proposta dal C a y l e y: Indicando con M ed N due rette dello spazio e con MN il prodotto della loro minima distanza pel seno del loro angolo, l'equaz.

$$\sqrt{BC\cdot AD}+\sqrt{CA\cdot BD}+\sqrt{AB\cdot CD}=0$$

indica che le quattro rette A, B, C, D o sono generatrici di uno stesso iperboloide o che una è tangente a quello determinato dalle altre tre.

52. *Sulle forme binarie di grado qualunque.* (A. A. N., s. I, v. III, n. 10, pp. 1-34, 1866-68; Sunto in R. 1866, pp. 396-397; G. B. v. IX, pp. 1-8, 76-86, 1871).

Si propone di trovare la rappresentazione geometrica di alcuni fra gli invar. e covar. delle forme binarie di grado qualunque.

Definisce gli elem. armon. di ordine r di ω_i rispetto al gruppo G_n e ne stabilisce le proprietà fondamentali, anche relative ai gruppi con punti multipli.

Definisce *emanante puro* m^{mo} di U la forma rappresentata dal gruppo $G_{n-m.k}$ degli elem. arm. di ord. $n-m$ di un elemento ω_k.

Definisce l'*emanante misto di* U rispetto a due elem. $\omega_i\omega_j$ e dimostra che ogni *emanante di* U è un suo covariante.

Definisce il gruppo coniugato arm. di U, e la relazione che occorre perchè due gruppi di n elem. siano coniugati arm. fra loro.

E dimostra che *gli elem. di un gruppo di grado dispari costituiscono sempre un gruppo coniugato arm. con esso, e che quelli di grado pari lo costituiscono solo quando l'inv. quadratico* IU *della forma è nullo.*

Chiama IU *armonizzante di* U.

Definisce gli *armonizzanti degli emananti*, i *covarianti associati* e altri *concomitanti.*

Passa a trattare delle invol. ∞^{r-1} di grado n, chiama *forma sizigetica* col sistema $U_1 \ldots U_r$ ogni forma rappresentante un gruppo dell'invol. individuata da quella forma.

Dimostra che se gli r gruppi U hanno un elemento comune esso è comune a tutti i gruppi dell'invol., e che l'*inv. è costituita da tutte le forme di grado* n *che sono coniugate arm. con* $n - r + 1$ *forme arbitrarie.*

Che tra i *gruppi dell'invol.* $(r-1)^{pla}$ *di grado* n *che contengono* $r - m$ *elementi arbitrarii* ve ne sono in generale $m(n-r+1)$ dotati di elem. m^{pli}.

Che in una invol. $(n-1)^{pla}$ di grado n ogni elem. del gruppo coniug. armon. rispetto a tutti i gruppi dell' inv. rappresenta un elem. n^{plo} dell' involuzione.

Definisce il *catalettieante* ed il *plesso catalettieante* di U di ordine $s-r$, e stabilisce le proprietà geometriche cui dà luogo.

Chiama *canonizzante* il *catalettieante* del *primo emanante.*

Parla del *canonizzante bordato* e del *catalettieante bordato.*

Il canonizzante di una forma bin. disp. di grado $2n-1$ *è rappresentato dagli* n *elem.* n^{pli} *dell'inv.* $(n-1)^{pla}$ *di grado* n, *costituita dai gruppi degli elem. arm. di ord.* n *di un elemento arbitrario rispetto alla forma proposta.*

Per le forme di grado $2n$, dimostra che esse si possono ridurre alla forma canonica di somma di n potenza $2n^{me}$ di binomii lineari di variabili quando si annulla il *catalettieante*, e in tal caso il canonizzante ha la stessa rappresentazione precedente.

Definisce il *Lamdoide* di U.

53 e 54. *Sulle forme ternarie quadratiche. Memoria 1ª.* (A. A. N. s. I, v. III, n. 17, pp. 1-26, 1866-68; Sunto in R. 1867, pp. 103-105). *Memoria 2ª.* (A. A. N., s. I, v. III, n. 26, pp. 1-32, id.; Sunto in R. 1867, pp. 365-366; G. B. v. VIII, pp. 38-59, 129-156, 1870).

Si propone di trovare la rappres. delle forme ternarie quadratiche: egli usa il nome di *quadrica* per conica o cono.

Egli parla di sistema ternario senza specificare piano o stella.

Considera nel sistema ternario *una quadrica* come luogo e come inviluppo e le forme U, *u* che la rappresentano chiama *forme quadratiche congiunte.* Considera i casi in cui la quadrica si spezza: poi gli *elementi reciproci* rispetto alla quadrica (egli dice *coniugati armonici rispetto alla forma*); poi gli elementi comuni ad una forma quadratica e ad una forma lineare; poi l' *assoluto* del sistema ternario.

Definisce l'*intervallo* fra due elementi omogenei ed eterogenei, e la coppia *ortogonale*, ed in particolare definisce la *quadrica circolare.*

In ultimo parla della rappresentazione geometrica del sistema ternario sia nella stella che nel piano.

Considera le quadriche ternarie di un fascio, le degeneri i loro elementi doppi. La quadrica dei *nove* elementi.

Interpreta gl' invarianti del sistema delle due quadriche, i covarianti e contravarianti di 2° grado e di grado superiore; poi cerca gli elementi comuni alle due quadriche.

Infine applica alle sup. coniche e alle linee di 2° grado, prendendo ad esaminare il sistema di una sup. conica e dell'assoluto.

55. *Questioni di geometria.* (G. B. v. V, p. 192, 1867).

Determinare gli assi di una sup. di 2° ord. conoscendone tre diam. coniug. Segue la soluzione.

56. *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky.* (R. A. N. 1867, pagine 157-173; G. B. v. V, pp. 217-231, 1867). (Tradotta nelle Nouvelles Annales de Math. $VIII_2$, 1868).

Nell' anno 1866 si era pubblicata da Hoüel la trad. franc. di un opuscolo, che era stato da Lobatschewsky già pubblicato a Berlino nel 1840 [1], *Études géométriques sur la Théorie des Parallèles par N. Lobatschewsky*

[1] Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840.
Il medesimo autore, il cui nome ora si scrive Lobatschefskij, pubblicava pure:
Nouveaux principes de Géométrie avec une théorie complète des Parallèles, Mém. de l'Acc. Imp. de Kasan, 1836, 37, 38.
Géométrie imaginaire, Journal für Mathem. v. Crelle, Band XVII, 1837.
Pangéométrie, ou Precis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des Parallèles, Kasan 1855.

(Bordeaux, Mém. 4); ciò richiamò l'attenzione di B. sulla *Geometria immaginaria*.

Egli cerca con questa nota di stabilire direttamente il principio che serve di base alla nuova teorica delle parallele, e di pervenire, in modo diverso da Lobatschewsky, alle formole che esprimono le relazioni tra gli elementi di un triangolo nel sistema della *Geometria immaginaria*.

57. *Pangeometria, o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele per N. Lobatschewsky, professore emerito dell'Università di Kasan e membro onorario dell'Università di Mosca.* (Versione dal francese; G. B. v. V, pp. 273-336, 1867).

(Con questa traduzione ebbe il merito di render popolare lo studio di questa nuova geometria in Italia).

58. *Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell'assioma XI di Euclide* (giammai da potersi decidere a priori) *per Giovanni Bolyai* (versione dal latino). (G. B. v. VI, pp. 97-115, 1868).

È la traduzione fedele della importante *Appendix* tratta dall'opera di Wolfang Bolyai, *Tentamen juventutem studiosam* etc. Maros Vàsàrheli, 1832.

Le numerose figure intercalate hanno, per colpa dell'incisore, ed in contraddizione del testo, le lettere maiuscole invece delle minuscole.

59. *Sulle forme ternarie di grado qualunque.* (A. A. N. s. I, v. IV, n. 3, pp. 1-38, 1869; Sunto in R. 1868, pp. 108-117; G. B. v. IX, pp. 152-169, 193-205, 1871).

Egli cerca di mettere in luce la rappresentazione geometrica di alcuni tra gli invarianti, covarianti e contravarianti delle forme ternarie di grado qualunque. Si serve per la sua rappresentazione di due forme di 2ª specie correlative sovrapposte riferite al medesimo triangolo fondamentale, indifferentemente sistemi piani o stelle.

Definisce la *forma ternaria pura* di grado ν, e la rappresenta con la notazione *ombrale* ponendo per la forma rispettivamente nei due sistemi le notazioni

$$U = (Ax + By + Cz)^{\nu}{}_{\nu} = (A,\ B,\ C)^{\nu}\,(x,\ y,\ z)^{\nu}$$

$$v = (ax + by + cz)^{\nu}{}_{\nu} = (a,\ b,\ c)^{\nu}\,(x,\ y,\ z)^{\nu}.$$

Infine definisce la *forma ternaria mista* in modo analogo, sia rispetto ad una sola serie di variabili, che rispetto ad entrambe.

Poi definisce le sostituzioni lineari tra variabili *cogredienti* o *contragredienti*, i *concomitanti* (*covarianti, contravarianti, invarianti*), i *plessi concomitanti*, i *combinanti;* e ciò che intende per *potenza* di una terna di elementi omonimi, o di una coppia di elementi duali.

Passa poi a definire l'*elemento multiplo di ordine* m della forma ternaria U, e il gruppo degli m elementi duali ad esso *congiunti* (p. es. un punto multiplo della curva e il gruppo delle sue tangenti). In particolare si ferma a considerare la *forma congiunta* di U (cioè l'inviluppo delle tangenti se U è una curva) e dimostra che è di grado $m(n-1)$, il *Discriminante* della forma e dimostra con metodo suo semplice che esso è del grado $3(n-1)^2$; il contravariante risultante di due forme U′, U″; e l'invariante risultante di tre forme U′, U″, U‴.

Dopo ciò egli comincia a parlare dei *sistemi armonici* dei diversi ordini rispetto alla forma U, (cioè delle curve polari di ordini differenti di un dato punto rispetto alla curva U), e con gran speditezza trova i diversi teoremi che li riguardano anche per rispetto agli elementi multipli di U, e perviene alle formole di Plücker e alla definizione del *genere*. Con ciò ha parlato degli *emananti puri*.

Definisce in seguito gli *emananti misti* di U e mostra la loro rappresentazione geometrica. I gruppi di n punti rappresentati dal più semplice emanante misto li chiama *coniugati armonici* rispetto ad U, e ciò lo conduce a parlare di forme ternarie u, U *coniugate armoniche tra loro*, e di tutte le forme u coniugate armoniche ad U; e dell'*invariante armonizzante* del sistema U, u, del *contravariante armonizzante* di due forme U′, U″, distinte o coincidenti, e dell'*invariante armonizzante* di tre forme U′, U″, U‴.

Dopo passa a parlare degli *armonizzanti degli emananti* puri e misti, e dei concomitanti associati dei covarianti di U rispetto ad U.

Infine considera le varietà lineari di forme ternarie di grado n individuate da r forme U, che egli chiama *serie lineare* $(r-1)^{pla}$ o *involuzione* $(r-1)^{pla}$ di grado n, e chiama *forma sizigetica* ogni forma della varietà, e di queste considera specialmente gli elementi *multipli* e le forme *coniugate armoniche* alla involuzione.

60. *Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque.* (A. A. N. s. I, v. IV, n. 7, pp. 1-27, 1869; Sunto in R. 1868, pp. 174-175; G. B. v. X, pp. 55-75, 1872).

Egli si propone di estendere ai complessi di grado qualunque le ricerche relative ai complessi di 2° grado, giovandosi dei risultati ottenuti dalla rappresentazione geometrica delle forme binarie ternarie.

Comincia col prepararsi le formole analitiche per la trattazione del tema, assumendo per coordinate della retta i determinanti delle matrici dei coefficienti delle equazioni delle coppie di piani o di punti che la individuano, ciò gli permette una grande generalità e simmetria delle formole, e mostra che egli perfezionava in tal modo il metodo creato da Plücker.

Ma a questo si aggiunga l'aiuto che egli ottiene dalla notazione *ombrale*, che egli pel primo adotta in queste ricerche, prima colla potenza simbolica di una forma lineare, poi col prodotto simbolico di forme lineari distinte. Stabilite le equazioni del complesso, e quelle dei coni corrispondenti ai punti e degli inviluppi corrispondenti ai piani, egli cerca subito le equazioni dei coni come inviluppi, quelle delle curve inviluppo come luoghi di punti, e le equazioni delle rette comuni a due complessi che passano per un punto o stanno in piano, e l'equazione della rigata comune a 3 complessi.

In seguito cerca l'equazione di coni armonici di diverso ordine rispetto ai coni del complesso, e delle curve armoniche di diverso ordine per rispetto alle curve del complesso.

Considera due complessi e cerca l'equazione dei coni inviluppi che segano i coni corrispondenti al suo vertice in gruppi di rette armoniche fra loro, e quella della curva duale.

Considera tre complessi e cerca la superficie luogo dei punti di cui i coni di tre complessi sono fra loro armonici, e la superficie inviluppo duale: indi osserva che nel caso dei complessi di 2° grado, se tutti e tre i complessi coincidono, la superficie luogo suddetta diviene la superficie singolare del complesso (*tetraedroide*).

Infine considera le serie dei coni del complesso che corrispondono ai varii punti di una retta, e la serie delle curve duali, e trova che l'inviluppo dei primi e il luogo delle seconde coincidono in una medesima superficie (di cui trova che l'ordine è eguale alla classe) rispetto alla quale la retta è multipla secondo $x(x-1)$, se x è il grado del complesso.

Così pure trova che l'inviluppo delle sup. coniche armoniche di un determinato ordine ι di una retta rispetto alle sup. coniche corrispondenti ai diversi punti della retta, e il luogo delle linee duali coincidono in una medesima superficie di cui l'ordine è pure eguale alla classe, $2\iota(\iota-1)$, e la retta data è $\iota(\iota-1)^{pla}$. Altre considerazioni su queste superficie terminano la memoria.

61. *Sulla composizione delle forze.* (R. A. N. 1869, pp. 22-32; G. B. v. X, pp. 133-140, 1872).

Si propone di ricercare la formola della composizione delle forze nella geometria della retta.

Premette alcune relazioni metriche riguardanti gli spigoli di un tetraedro; indi ammettendo come postulati che la risultante di due forze concorrenti ed eguali prende la direzione della bisettrice del loro angolo, e che per trovare la risultante di più forze si possono distribuire queste in gruppi, e poi comporre le forze di ciascun gruppo e comporre le risultanti parziali dei diversi gruppi, e facendo uso di un simbolismo semplice e spedito e di un principio meccanico di dualità dimostra che:

1° In un sistema di forze concorrenti in un punto il momento della risultante, rispetto ad un piano, è eguale alla somma dei momenti delle componenti.

2° In un sistema di forze poste in un piano il momento della risultante, rispetto ad un punto, è eguale alla somma dei momenti delle componenti.

3° In un sistema qualunque di forze che ammettono una risultante, il momento di questa risultante, rispetto ad un asse, è eguale alla somma dei momenti delle componenti.

Termina coll' osservare che la composizione delle forze si può effettuare con duplice procedimento, secondo che le forze si considerano produttrici di traslazione di punti o di rotazioni di piani, e che ciò rispecchia il principio meccanico di dualità.

62. *Sulla teorica dei momenti.* (R. A. N. 1869, pp. 87-92; G. B. v. X, pp. 175-180, 1872).

Considera un sistema di forze comunque dirette nello spazio; stabilisce le formole pel momento di esso rispetto ad una retta; ed in pochi tratti ritrova il teorema di Möbius (*Lehrbuch der Statik*, I, p. 164): Se un sistema di forze è in equilibrio e si prende arbitrariamente un altro sistema di forze, la somma dei prodotti di ciascuna forza del primo sistema pel momento del secondo sistema, rispetto alla retta secondo la quale essa agisce, è eguale a zero.

Quindi cerca gli assi di momento nullo che passano per un punto o che stanno in un piano, quelli di momenti eguali o di momento massimo.

Dopo di che studia il complesso di 1° grado a cui dà luogo la disposizione nello spazio di tutti gli assi di momento nullo.

Cita nel corso del suo lavoro gli analoghi lavori di Möbius, di Chasles (Comptes Rendus, Giugno 1843), di Poinsot (*Éléments de Statique*).

63. *Sulle serie di sistemi di forze.* (R. A. N., pp. 130-141, 1869; G. B. v. X, pp. 180-187, 1872).

Questa nota fa seguito a quella sulla *composizione delle forze, e sulla teorica dei momenti.*

Suppone che un sistema di forze varii colla condizione che ogni forza del sistema passi per un punto fisso e stia in un piano fisso, e che tutti descrivano fasci proiettivi e dice che questi sistemi costituiscono una *serie semplice di 1° grado.*

Conchiude che se nessuno dei sistemi S′, S″ ammette una risultante, accadrà lo stesso per ogni altro sistema S. Se invece un solo dei sistemi S′, S″ ammette una risultante tutti gli altri l'ammetteranno parimente; e se due sistemi S′ ed S″ sono in equilibrio, tutti gli altri saranno pure in equilibrio.

Poi suppone che il sistema di forze varii in modo che ogni forza concorra sempre in un punto fisso, e tutte descrivano stelle omografiche e queste egli dice costituiscono una *serie doppia di 1° grado.*

Conchiude che, se nessuno dei tre sistemi S′, S″, S‴ ammette una risultante, non l'ammetterà ogni altro sistema. Se uno dei tre S′, S″, S‴ ammette una risultante ogni altro sistema l'ammetterà; e che se i tre sistemi S′, S″, S‴ sono in equilibrio ogni sistema sarà pure in equilibrio.

64. *Sulle Dinami in involuzione.* (A. A. N. s. I, v. IV, n. 14, pp. 1-15, a. 1869; Sunto in R. 1869, pp. 166-168).

Ricordate le coordinate di una diname definite da Plücker (*On fundamental Wiews regarding Mechanics*, Phil. Trans. v. 156 P. I) e la possibilità di poterla sostituire con un sistema equivalente di sei forze agenti lungo gli spigoli di un tetraedro (cfr. *Nota sulla composizione delle forze.* 61), egli si propone di studiare le proprietà delle dinami di cui le coordinate soddisfano una o più equazioni omogenee di 1° grado.

Definisce che cosa intende per *dinami armoniche* fra loro, e considera i sistemi lineari di dinami di ordine di infinità $\iota - 1 < 5$. Questi egli chiama sistemi di dinami *in involuzione* $(\iota - 1)^{pla}$.

Termina col cercare fra le dinami di ogni sistema lineare se vi sono dinami che stanno *in equilibrio*.

65. *Sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido.* (R. A. N. 1870, pp. 89-100; G. B. v. X, pp. 207-216, 1872).

Le note 61, 62 e 63 trattavano della *Statica* dei sistemi rigidi, ora egli passa a trattare la *Cinematica* di questi sistemi colle note 65, 66, 67, per trattare della Dinamica colla nota 68.

Sempre applicando le coordinate di retta egli mostra come le rotazioni infinitesime intorno ai sei spigoli di un tetraedro si compongono in una sola intorno ad un asse al finito o all'infinito, e come una rotazione infinitesima si possa decomporre in 6 rotazioni infinitesime intorno agli spigoli del tetraedro fondamentale; indi definisce il *momento virtuale* di una forza rispetto ad una rot. inf. intorno ad un asse. Passa poi a comporre un sistema di rotazioni infinitesime e discute i casi che si presentano per la risultante. Insiste sulla dualità fra la composizione delle rotazioni e quella delle forze agenti lungo gli stessi assi.

Dopo ciò mostra come le proprietà dei momenti di un sistema di forze si traduce immediatamente in proprietà delle *velocità virtuali* del corrispondente sistema di rotazioni; e dalla considerazione del complesso di 1° grado delle rette di velocità virtuali nulle, deduce una serie di proprietà sulle *velocità virtuali risultanti* del sistema, sugli *assi coniugati di rotazione*, sull'*asse di rotazione strisciante*, e sul complesso quadratico degli assi coniugati ortogonali.

Dopo passa a cercare le *variazioni* delle coordinate di un punto qualunque del sistema corrispondente ad un *movimento infinitesimo qualunque* (cioè alla composizione di due rotazioni infinitesime intorno a due assi diversi).

66. *Sul movimento geometrico finito di un sistema rigido.* (R. A. N. 1870, pp. 142-150; G. B. v. X, pp. 295-302, 1872).

Seguita l'argomento della Mem. 65. Osserva che due posizioni di un sistema rigido costituiscono due figure omografiche, definisce il sistema *medio* delle due posizioni, ed enunciato un teorema di Chasles sul sistema medio (*Propriétés rélatives au déplacement fini*, Comptes Rendus, a. 1860-61) perviene a trovare le coordinate dell'*asse centrale* del movimento infinitesimo da imprimere al sistema medio. Poi esamina il movimento intorno a due assi coniugati e perviene ad un altro noto teorema di Chasles (l. c.) sul tetraedro avente per spigoli opposti due segmenti dei due assi coniugati.

Cerca infine le relazioni tra le coordinate di due punti omologhi delle posizioni del sistema rigido, e perviene alle formole più generali che dànno le variazioni finite delle coordinate di un punto di un sistema rigido nel passaggio del sistema da una posizione ad un'altra.

67. *Sulla teorica dei momenti d'inerzia.* (R. A. N. 1871, pp. 52-62; G. B. v. X, pp. 62-70, 1873).

Definisce il *momento d'inerzia di una massa* μ *per rispetto ad un punto* ed il *centro d'inerzia* della massa μ, e dimostra: che il *minimo* momento d'inerzia si ha pel centro d'inerzia; che tutti i punti per i quali il momento d'inerzia è costante appartengono ad una sup. sferica col centro nel centro d'inerzia.

Definisce poi il *momento d'inerzia di una massa per rispetto ad un piano* e dimostra che tra più piani paralleli quello che dà il *minimo* momento d'inerzia passa pel centro d'inerzia della massa; e che l'inviluppo dei piani di dato momento d'inerzia è una sup. di 2° grado, e che tutte le superficie analoghe sono *omofocali*.

Inoltre trova i *piani principali* corrispondenti ad un punto qualunque dello spazio.

Poi definisce il *momento d'inerzia di una massa* μ *per rispetto ad una retta*; e dimostra: che tra più rette parallele quella che dà il minimo momento di inerzia passa pel centro d'inerzia della massa; che tutte le rette per le quali il momento d'inerzia è costante costituiscono un complesso di 2° grado; e che tutti i complessi analoghi hanno la stessa congruenza comune e sono *omociclici-omofocali*. Indi cerca gli assi principali d'inerzia corrispondenti ad un punto, e dimostra che sono le intersezioni dei *piani principali* dello stesso punto.

Termina col cercare la condizione che deve verificarsi affinchè una retta sia asse principale rispetto ad un suo punto.

68. *Sul movimento di un sistema di forma invariabile.* (R. A. N. 1871, pagine 104-113; G. B. XI, pp. 359-367, 1873).

Egli considera il movimento del sistema rigido dovuto all'azione simultanea di più forze r_i agenti secondo direzioni assegnate; e comincia dal trovare la velocità di un punto del sistema, e la sua forza motrice attuale, e quindi la sua acceleratrice. Dopo di che assegna le equazioni del movimento del sistema rigido, e perviene a stabilire in ogni istante l'*asse di rotazione strisciante* del sistema (*asse centrale*) e le corrispondenti velocità di rotazione e di traslazione del sistema.

Poi suppone un tetraedro fondamentale mobile col sistema ed un tetraedro fondamentale fisso iniziale, e mostra come si trovi la posizione dell'asse centrale riferito al tetraedro mobile e poi da questa la sua posizione rispetto al tetraedro iniziale.

Riprende in seguito le equazioni fondamentali del movimento del sistema rigido e trova le formole che esprimono il principio del movimento del centro d'inerzia del sistema, ed il principio delle forze vive.

Considera infine il caso che il sistema si muova per sola velocità iniziale.

69. *Quistione proposta.* (G. B. v. IX, p. 179, 1871).

Riguarda le omografie dello spazio.

70. *Nota intorno alla conica rispetto alla quale due coniche date sono polari reciproche.* (A. A. L. R. t. XXV, pp. 193-202, 1871-72, 7 aprile 72).

Egli riprende questo problema già trattato da Cremona nella *Introduz. ad una teoria geometrica delle curve piane* e da Ruffini colle coordinate cartesiane (Mem. Acc. di Bologna) per mostrare il vantaggio che si ha a trattarlo con le coord. trilineari ed applicandovi la teoria degli invarianti. Con ciò riesce ad assegnare alcune proprietà delle quattro coniche che risolvono il problema, indi esamina il problema in alcuni, non in tutti i casi particolari.

71. *Nota intorno alla quadrica rispetto alla quale due quadriche date sono polari reciproche tra di loro.* (A. A. L. R. t. XXVI, pp. 5-16, 1872-73, 12 dicembre 72).

Una Mem. di F. Siacci del 9 giugno 1872 negli Atti dell'Acc. di Torino estendeva la trattazione analitica del problema dell'opera 70, ed una questione da questi proposta nel G. B. v. X, 1872 dava occasione ed E. D'Ovidio di pubblicare, nel G. B. v. X, pp. 313-319, un'analoga questione per le quadriche. Poco dopo il B. presentava all' Accad. dei Lincei questa Mem. nella quale tratta senz' altro il problema, accennato dal titolo, con lo stesso metodo usato per le coniche. Vale a dire che, dopo aver osservato che le due quadriche date U′ ed U″ e la quadrica cercata U debbono avere un tetraedro coniugato comune, lo assume come tetraedro fondamentale e trova immediatamente che vi sono 8 quadriche che risolvono il problema; indi ne nota le proprietà più essenziali. Poi considera dei casi speciali.

Riprende il problema partendo dalla forma generale dell' equazione della quadrica.

72. *Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche.* (A. A. L. R., t. XXVI, pp. 566-576, 1873; G. B. v. XII, pp. 193-200, 1874).

Egli osserva che nella geom. piana euclidea proiettiva la proprietà di due circoli da segarsi in angoli eguali si traduce nella proiettività dei gruppi formati dalle tang. in ogni punto d' intersezione e dalle rette (isotrope) che da quel punto proiettano i punti ciclici del piano. Egli si propone di vedere in che si traduce questa proprietà nella geom. non euclidea (iperbolica ed ellittica); ed osservato che in essa i circoli sono da considerarsi come coniche bitangenti alla conica all'infinito, egli generalizza la questione ed esamina, per due coniche qualunque, i rapporti anarmonici della coppia di tang. in ogni loro punto d'intersezione con le coppie di tangenti condotte da esso ad una terza conica.

Poi esamina il caso in cui le coniche proposte hanno uno stesso Δ coniugato comune, e quello in cui la terza conica è bitangente alle prime due.

73. *Nota sui circoli nella Geometria non euclidea.* (A. A. L. R. s. II, pagine 53-61, 1873-74; G. B. v. XII, pp. 213-219, 1874).

Egli riprende il problema dell'op. 72, e dice che egli ivi trattò il caso in cui i rapporti anarmonici sezionali hanno lo stesso valore per tutti e quattro i punti comuni alle due coniche. Qui si propone di trattare il caso in cui i rapp. anarm. sez. hanno un valore per due dei punti d' intersez. ed un altro per gli altri due, supposto che le due coniche abbiano doppio contatto con la terza.

Trattata la questione in generale ritorna al caso dei circoli della geometria non euclidea, e conchiude che, essendo dati 3 circoli, vi sono 4 circoli ciascuno dei quali taglia i primi tre ortogonalmente.

Poi generalizza questa questione col cercare le coniche che tagliano tre coniche date bitangenti ad una stessa conica sotto dati rapp. anarm. sezionali.

74. *Nota sul rapporto sezionale e tangenziale delle quadriche.* (T. A. L. R. s. II, t. I, pp. XXI-XXII, 1874; G. B. v. XII, pp. 266-276, 1874).

Estende alle sup. di 2° grado la ricerca precedente: cerca cioè il rapp. anarm. dei piani tangenti in punti comuni a due quadriche U′, U″ con i due piani che dalla loro retta comune si possono condurre ad una terza quadrica U. Considera in seguito il caso in cui U′, U″ ed U abbiano un tetraedro coniugato comune, poi quello in cui le tre quadriche appartengono ad una schiera.

75. *Sulla geometria proiettiva. Nota prima.* (A. A. N. s. I, v. VII, n. 6, pp. 1-10, 1875; Sunto in R. 1873, p. 110; G. B. v. XII, pp. 300-311, 1874).

Si propone di stabilire le prop. proiettive delle figure con metodo diverso da quello di v. Staudt, giovandosi del concetto delle reti geometriche esposte da M ö b i u s nel suo *Calcolo baricentrico*, e prescindendo da ogni ipotesi sull'infinito dello spazio in modo che i risultati si possano applicare alle tre Geometrie, l'*ellittica*, l'*iperbolica* e la *parabolica* di K l e i n.

Considera lo spazio come un insieme continuo ∞^3 di punti, contenente varietà ∞^1 e ∞^2 di punti (linee e superficie) e assume come postulati i modi duali di determinazione della *retta, del punto* e del *piano*. Inoltre concepisce lo spazio come limitato da una superficie di natura indefinita e distingue gli elementi *proprii* (quelli che non oltrepassano la detta superficie) dagli *improprii*. Agli elementi improprii attribuisce una esistenza *ideale* allo scopo di ottenere generalità ed uniformità.

Nota che dati *quattro* punti di un piano si può costruire con una certa legge (che egli espone in modo molto vago) una rete geometrica per la quale con un numero finito o infinito di operazione si può pervenire ad un punto determinato, e quindi ad una retta determinata. Dualmente con *quattro* piani di una stella costruisce un piano o una retta qualunque della stella; e per proiezione con *quattro* raggi di una stella costruisce la stella di raggi e di piani.

Per analogia con *cinque* punti o con 5 piani dello spazio costruisce con una legge, anche qui vagamente determinata, una varietà ∞^3 di punti o piani (egli dice pure una *rete geometrica*) con la quale mediante una serie finita od infinita di operazioni arriva ad un punto o piano proposto, e quindi anche ad una retta, ad un piano o ad un punto. Distingue gli elem. in *razionali* o *irrazionali*, secondo che il numero di operazioni richieste per costruirlo è *finito* o *infinito*.

Tutto ciò che egli qui accenna ora è rigorosamente eseguito con la costruzione degli spazii in base ai moderni postulati (Cf. A m o d e o, *Geometria proiettiva*, p. VI della Prefaz. e pp. 66 e seg. del testo, Napoli, 1905). Soltanto dopo egli parla di *dualità* e di *omografia* nello spazio, nel piano, nella stella. Le figure omografiche sono ottenute con le medesime operazioni sopra elementi fondamentali omonimi, le figure duali sono sinonime di *correlative* o *reciproche*. Manca a tutto ciò un sostrato di esattezza, il gruppo armonico. Poichè soltanto dopo egli parla di *elementi armonici* ma in senso più largo, poichè perviene direttamente alla *retta armonica* di un punto rispetto ad un Δ e alle diverse figure duali, ed al *piano armonico* di un punto rispetto ad un tetraedro e alle sue figure duali.

76. *Sulla Geometria proiettiva. Memoria seconda.* (A. A. N. s. I, v. VI, n. 12, pp. 1-21, 1875; Sunto in R. 1874, pp. 128-129; G. B. v. XIII, pagine 49-71, 1875).

Nell'ordine di idee della Memoria precedente espone i principii con i quali si può trattare la Geom. proiettiva analiticamente.

Ammette senz'altro che si possano « coordinare » i punti o i piani dello

spazio ai rapporti di 3 numeri ad un quarto in modo biunivoco, e tale che ai punti di un piano, o piani di un punto, corrispondano coordinate soddisfacenti ad un'equazione lineare. Ne deduce le equazioni della retta, e le relazioni fondamentali relative a posizioni di punti rette e piani ed assoda il principio di *dualità*.

Dopo passa a mostrare come si possa costruire il punto (o il piano) di date coordinate; fissa a tal uopo il tetraedro fondamentale e il punto (o il piano) unità, e per mezzo del postulato fondamentale (op. 75) o con costruzione di una rete geometrica costruisce i punti di coord. intere, quindi anche i punti di coord. razionali, a causa dei rapporti, poi i punti di coord. irrazionali, come limiti delle posizioni di quelli a coord. razionali.

Dalla costruzione dei punti deduce quella delle rette.

Introduce quindi il concetto di *diname* del punto e del piano.

La diname è il prodotto di un coeff. arbitrario assegnato al punto per la radice quadrata di una forma quadratica nelle coord. del p. espressa simbolicamente.

Definisce che cosa intende per *coord.* o *componenti* della diname, secondo i vertici (o le facce) del tetraedro fondam., per *risultante* di un sistema di dinami e per *punto centrale* del sistema, per *momento* di un punto rispetto ad un piano e viceversa, e per *momento scambievole* delle loro dinami. E definisce i sistemi *armonici* di dinami, di punti e di piani.

Analoghe definizioni introduce per la retta, per la quale aggiunge che un sistema *di dinami di rette* che ammette una risultante si dice *armonico con sè stesso*.

Definisce inoltre la *diname dello spazio* e conchiude che un sistema di dinami di rette *è equivalente* in generale ad una diname di spazio, e che due sistemi di dinami di rette sono equivalenti, se sono equivalenti ad una stessa diname di spazio.

Definisce anche il *sistema armonico* di sei dinami di spazio.

I sistemi dei punti, dei piani e delle rette, che hanno la forma quadratica nulla, costituiscono l'*assoluto o limite dello spazio*. E rispetto a questo parla di piano polare di un punto, di retta polare di una retta, di retta *interna* o *esterna* all'assoluto, che chiama altrimenti elemento *proprio* o *improprio* dell'assoluto, e fa notare che due rette polari possono essere elementi *entrambi proprii* o *entrambi improprii*, oppure *l'uno proprio e l'altro improprio*. È notevole che alla fine di questo § egli dice: « Se invece di partire da dinami di retta, si parte da dinami di spazio, si perverrà a risultati analoghi ai precedenti, sostituendo gli spazii $\mathbf{s}$ o $\mathbf{S}$ alla retta $\mathbf{r}$ o $\mathbf{R}$, e considerando invece dell'assoluto $\Phi(\mathbf{rr})$ o $\varphi(\mathbf{RR})$ delle rette $\mathbf{r}$ o $\mathbf{R}$ dello spazio, l'assoluto $\Phi(\mathbf{ss})$ e $\varphi(\mathbf{ss})$ dell'*iperspazio* che contiene gli spazii $\mathbf{s}$ o $\mathbf{S}$ ».

In ultimo assegna le formole di trasformazione delle coordinate dello spazio. Poi parla delle *trasformazioni lineari*, e dà le nozioni di *cogredienti* o *contragredienti*, di *concomitanti*, e dimostra l'invarianza del birapporto anarmonico.

Accenna infine alla possibilità di *trasformare in sé stesso* un sistema di punti, di rette o di piani quando l'equazione che lo rappresenta è in generale di 2° grado.

77. *Sulla geometria proiettiva. Memoria terza.* (A. A. N. s. I, v. VII, n. 5, pp. 1-21, 1878; Sunto in R. 1875, pp. 141-142; G. B. v. XIV, pp. 110-138, 1876).

Questa Memoria, che tratta della *forma quaternaria bilineare*, è divisa in 4 parti. Nella prima, riferendosi a quanto il Clebsch aveva detto *Ueber ein neues Grundgebilde der Geometrie*, Math. Ann. VI, tratta del *Connesso di 1° grado* di punti e piani nello spazio a 3 dim.

Esso dà luogo ad una trasformazione omografica dello spazio che l'autore esamina analiticamente, e di cui cerca gli elementi uniti (che egli chiama *doppi*) nei diversi casi che si possono presentare, e li costruisce.

Nella 2ª parte riferisce il connesso al tetraedro degli elementi uniti dell'omografia suddetta, e studia il complesso di 2° grado di rette, che vien determinato dai punti e dai piani corrispondenti dell'omografia.

Nella 3ª parte studia le figure omografiche consecutive nell'omografia suddetta e i punti *limiti* a cui essi si avvicinano indefinitamente nel senso dell' omografia diretta o della inversa. Ed in particolare studia le omografie che ora si dicono *cicliche*, e che egli distingue in *involuzioni parziali* di ordine k, *involuzioni parziali* di ordine $2k$, e *involuzioni totali* di ordine k.

Termina col cercare le *linee*, le *sviluppabili*, e le *superficie* alle quali appartengono rispettivamente i punti, i piani, le rette consecutive di una omografia non ciclica, ed osserva che esse si trasformano in loro stesse mediante la data omografia (cfr. Klein e Lie, *Ueber die Curven welche durch linearen Transformationen in sich übergehen.* Math. Ann. v. IV). Qui cita un suo lavoro sulla *Metrica proiettiva* che doveva seguire e che non pare sia stato pubblicato. Della superficie di 2° grado che costituisce l' assoluto egli considera la sup. che precede e quella che la segue nell'omografia data, e mediante queste definisce le *rette cicliche* e le *rette focali*, i *punti focali*, i *tetraedri principali*, i *coni ciclici*, i *piani ciclici*, nei diversi casi che le coppie di superficie corrispondenti possono presentare.

78. *Nota intorno ad una superficie di 8° ordine.* (A. A. L. R. s. II, v. II, pp. 244-249, 1874-75; G. B. v. XIII, pp. 155-160, 1875).

Scopo di questa Nota, egli dice, è d'indicare un modo di generazione della superficie F di Potenziale nullo, relativamente a 3 centri di forze attrattive o ripulsive, che agiscono proporzionalmente alle masse, ed in ragione inversa del

quadrato delle distanze. L'equazione di questa superficie è

$$\frac{k_1}{r_1}+\frac{k_2}{r_2}+\frac{k_3}{r_3}=0,$$

ove k_1, k_2, k_3 sono coeff. costanti ed r_1, r_2, r_3 le distanze di un punto dai centri di forza. Egli trova che questa superficie è *anallagmatica* (cioè inversa di sé stessa) rispetto alla sfera S di cui il centro e il raggio sono quelli del circolo circoscritto al triangolo $p_1p_2p_3$; che essa è di 8° ordine, che ha il circolo immaginario all'∞ per linea quadrupla, il punto p_0 per punto quadruplo, col cono tang. corrispondente ridotto ad una linea retta, e due altri punti quadrupli immaginarii.

79. *Nota sulla quintica binaria.* (A. A. L. R. s. II, v. II, 1874-75, pagine 582-591; G. B. v. XIV, pp. 54-65, 1876).

Si propone di ricercare il significato geometrico di alcuni degli invarianti e covarianti delle forme binarie di 5° grado.

Premette alcune considerazioni sulle forme binarie di grado qualunque e conchiude che una forma binaria di 5° grado si può rappresentare con

$$F=ax^5+by^5+cz^5 \qquad \text{ed} \qquad x+y+z=0.$$

Dalla considerazione dei *primi emananti* di F, conchiude che le coppie di elementi, per rispetto ai quali i gruppi di elementi arm. di 4° ord., rispetto al gruppo F, sono fra loro armonici, costituiscono un'involuzione; quindi due soli gruppi sono armonici con sè stessi due soli sono equianarmonici, 3 sono armonici, e 6 hanno due elementi coincidenti.

Dalla considerazione dei *secondi emananti* di F, conchiude: che le coppie di quell' involuzione che danno elem. armonici di 4° ordine fra loro armonici, danno pure elem. arm. di 3° ord. fra loro armonici; che ci sono 6 elem. tali che il loro gruppo di elem. arm. di 3° ord. formano un gruppo equianarmonico, e 9 altri che ne formano un gruppo armonico, che vi sono 8 gruppi di elem. arm. di 3° ord. con due elem. coincidenti, ed altre cose ancora.

Dalla considerazione dei *terzi emananti* di F conchiude: che vi sono 6 elementi per rispetto ai quali gli elem. armonici di 2° ord. rispetto ad F coincidono, e questi sono i 6 elem. doppi dell' involuz. di 4° grado, individuata da tutti i gruppi di elem. arm. di 4° ordine rispetto ad F dei diversi elem. del sostegno, ed altre cose ancora.

Poi considera i *quarti emananti* di F, ed infine accenna brevemente alle particolarità che si presentano, se la quintica F ha un elemento doppio.

80. *Sull'affinità circolare non euclidea.* (R. A. N. 1876, pp. 219-223; G. B. v. XVI, pp. 256-262, 1878).

Egli si propone di cercare ciò che nella *Geometria non euclidea* corrisponde all'*affinità circolare* (Kreisverwandtschaft) di M ö b i u s della Geometria euclidea. E pone la questione in questo modo: Se vi sia una corrispondenza fra i punti di due piani tale che alle coniche che hanno doppio contatto con una conica fissa del piano corrispondano anche coniche che hanno doppio contatto con una conica fissa del secondo piano. Egli risponde che una tal corrispondenza è possibile e la ottiene mediante una costruzione dipendente da una corrispondenza proiettiva fra due spazii a tre dimensioni.

81. *Sul movimento per una linea data di 2° ordine.* (M. A. L. R. s. III, v. I, pp. 631-638, 1876-77; T. A. L. R. s. III, v. I, pp. 211-212, 1876-77; G. B. v. XVII, pp. 43-52, 1879).

Il 9 aprile nei *Comptes Rendus* B e r t r a n d aveva proposto la questione: « Conoscendo che i pianeti descrivono delle sezioni coniche, e non supponendo altro, trovare l'espressione delle componenti della forza che li sollecita, in funzione delle coordinate del suo punto di applicazione ». Nel fascicolo seguente si annunziava che D a r b o u x aveva risoluto la questione pel caso che la direzione della forza passasse per un punto qualunque del piano della conica.

B. nel 3 giugno dello stesso anno presentava all' Accademia dei Lincei questa Nota con la quale risolve in modo generale il problema del movimento per una linea di 2° ordine, mostrando che esso è di sua natura indeterminato e non esige necessariamente che la forza acceleratrice sia centrale.

Riferisce l'equaz. della conica a due rette coniugate ortogonali, e in funzione della polare dell'origine, ed osserva che, essendo le coordinate della conica funzioni di un parametro θ, per avere tutti i possibili movimenti sulla conica basta supporre quel parametro funzione del tempo (funzione periodica se il moto nella conica è periodico).

Con ciò trova subito che il mobile percorre liberamente la curva se è sollecitato da due forze l'una diretta secondo il raggio vettore, l'altra secondo la tangente, ed egli le determina completamente; o da una forza tangente sempre ad una conica che ha doppio contatto con la conica data ed è variabile con θ. Però queste forze sono funzioni di una funzione del parametro θ che determina la posizione del punto, e che si può determinare allorquando si pone una condizione intorno al valore e alla direzione della forza acceleratrice.

Suppone in seguito che la forza passi sempre pel punto origine e determina che il punto percorre liberamente la conica, se la forza sarà proporzionale alla distanza da O, e all'inverso del cubo della distanza del punto dalla polare di O rispetto alla conica.

Ritrova i casi noti qualora l'origine sia il centro della curva o il fuoco.

Poi risolve il problema inverso nella ipotesi fatta della forza centrale.

Infine considera anche il caso che il mobile sia sollecitato da più forze assegnate dalla formola generale e trova la forza capace di produrre il movimento risultante. Con ciò generalizza un caso esaminato da S y l v e s t e r (Educ. Times) in cui il mobile era sollecitato da tre forze, due dirette ai fuochi e la terza al centro della conica.

82. *Sui complessi di 2° grado.* (T. A. L. R. s. III, v. III, pp. 43-44, 1878-79; M. A. L. R. s. III, pp. 35-44, 1878-79; G. B. v. XVIII, pp. 1-14, 1880).

La questione trattata in questa Memoria fu suggerita all'A. dal prof. V. C e r r u t i, che lo richiedeva della distribuzione nello spazio di tutti i coni di 2° ordine che passano per 5 punti dati, e delle curve di 2ª classe tangenti a 5 piani dati. Egli dedusse questo fatto importante: che, mentre un' equaz. in coord. di retta individua un complesso, un sistema di rette individuate in modo che per ogni punto dello spazio sia definito un cono di ordine n luogo di tutte le rette del sistema che vi passano (o con la condizione duale) può non essere un complesso, ma invece i coni possono appartenere a diversi complessi. Per dimostrarlo egli ricorre ad una rappresentazione analitica, che contiene, oltre le coordinate della retta, anche quella del punto o del piano, e che quindi si può ritenere come equazione di un *connesso* di rette e di punti (o di piani o di rette), connesso di tipo diverso da quello ideato dal C l e b s c h. In un tal connesso ad ogni punto (o piano dello spazio) corrisponde un complesso di rette.

Egli dunque considera tutti i coni circoscritti ad un tetraedro e dimostra che costituiscono ∞^1 *complessi tetraedrali*, ognuno dei quali è caratterizzato dal birapporto della quaterna di punti che le facce del tetraedro determina sulle sue rette.

Dopo cerca tra i coni di un complesso quelli che passano per un quinto punto p_1, e trova che sono tutti quelli i cui vertici si trovano sul cono corrispondente al punto p_1; e che tutti i coni individuati da quei cinque punti non possono appartenere ad un solo complesso tetraedrale, ma possono intendersi distribuiti fra gl'infiniti complessi tetraedrali relativi al tetraedro formato da 4 dei suoi punti. La distribuzione dei coni in complessi tetraedrali può farsi in 5 modi diversi, combinando 4 a 4 i cinque punti per i quali i coni sono costretti a passare.

Infine, cercando l' equaz. di questi coni, perviene all' equaz. in coord. di punti e di rette, che rappresenta analiticamente un connesso di punti e rette, pel quale ad ogni punto corrisponde un complesso tetraedrale; i coni di questi complessi tetraedrali, che hanno per loro vertice i corrispondenti punti, sono appunto i coni che passano per i quattro vertici del tetraedro e pel quinto punto.

Trova in seguito che i coni assoggettati a passare per i vertici di un tetraedro e per due altri punti hanno i loro vertici su una superf. di 4° ordine, contenente i 15 lati dello esagono gobbo, le dieci rette diagonali di 1ª specie, e la cubica gobba dei sei punti.

Risolve in seguito la questione duale riguardante le coniche tangenti a cinque piani fissi.

Poi suppone che il tedraedro di quattro piani coincida col tetraedro di quattro punti del problema precedente, e dimostra che i complessi tetraedrali coincidono.

Infine mostra che i coni che passano per 5 p. fissi e toccano un piano fisso hanno i loro vertici sopra una curva del 6° ordine, e l'analoga questione duale per le coniche.

83. *Sui connessi ternari di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice.* (A. A. N. s. I, v. VIII, n. 6, pp. 1-10, 1879; Sunto in R. 1879, pp. 176-178; G. B. v. XIX, pp. 316-327, 1881).

Egli intende per *connessi in involuzione semplice* quelli caratterizzati dall'equazione

$$\Phi_a\varphi_A + \Phi_b\varphi_B = 0,$$

ove $\Phi_a = 0$, $\Phi_b = 0$ sono le equazioni di due coniche luogo, e $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = 0$ quelle di due coniche inviluppi; sicchè un elemento qualunque del connesso è dato da un punto qualunque di una conica del fascio (Φ_a, Φ_b) accoppiato a una tangente qualunque di una conica della schiera (φ_A, φ_B), fatta eccezione per i punti base del fascio e per le rette base della schiera, i cui elementi corrispondenti sono indeterminati.

Per tutti i punti di una conica Φ del fascio si ha per corrispondente una stessa conica φ della schiera, e viceversa; e le due coniche che si corrispondono stabiliscono fra i fasci una corrispondenza proiettiva.

Dimostra inoltre che in questa proiettività vi sono due coppie di coniche corrispondenti armoniche fra loro. Ma fra il fascio e la schiera si può stabilire un'altra proiettività, che ad ogni conica dell'uno Φ fa corrispondere la conica armonica φ dell'altra. Queste coppie di coniche formano un altro connesso che egli chiama delle *linee armoniche.* Esso ha col primo due coppie di coniche comuni. Mediante queste coppie di coniche egli forma un terzo connesso che dice *associato* al primo.

Passa poi a mostrare la possibilità dell'esistenza di un connesso che egli dice *in involuzione di grado* n; esso è definito da ciò che la proiettività fra il fascio e la schiera è tale che, prendendo di una conica Φ del fascio la conica φ armonica nella schiera, della φ la corrispondente Φ nel fascio, di Φ la conica φ armonica nella schiera, e così per n volte di seguito, la $(n+1)^{ma}$ Φ coincide con la prima e lo stesso avverrà per la φ.

Cerca in seguito nel primitivo connesso la *locale singolare* (i punti V per i quali la linea corrispondente si spezza) e trova che consta di tre coniche del

fascio, come del resto è ovvio; dualmente si presenta l'*inviluppo singolare* del connesso.

Cerca in sèguito le coniche del fascio e della schiera per le quali i punti base e le tangenti base costituiscono un gruppo *armonico* o *equianarmonico.*

Indi definisce e costruisce un altro connesso (4, 4) di 4° ord. e di 4ª classe, in cui ad ogni retta v corrispondono le due coniche φ della schiera che corrispondono alla conica Φ del fascio tangenti alla retta, e dualmente.

Ritorna al connesso primitivo, e considera una *coincidenza* di esso, (un punto fisso e le coppie di tang. da esso condotte alle coniche della schiera) e trova che il luogo dei punti di contatto di queste tangenti è di 6° ordine; indi trova altri luoghi ed inviluppi inerenti alla *coincidenza principale* del connesso, ed altri elementi.

84. *Sulle cubiche ternarie sizigetiche.* (Collect. Math. i. m. D. Chelini, 1879-1881; pp. 27-50, giugno 1879).

Egli definisce *sizigetiche* due cubiche di un piano quando ciascuna retta del piano le sega in due *terne armoniche fra loro*, o *apolari* (le terne x ed y sono tali che due dei punti y sono coniugati armonici rispetto alla coppia di centri arm. di 2° grado del 3° punto y rispetto alla terna x, e viceversa) e mostra che data una delle cubiche φ si può determinare un fascio di cubiche $(\varphi\psi)$, a cui appartiene la φ, tali che due qualunque di esse siano *sizigetiche.* Queste hanno tutti i medesimi 9 flessi. Studia indi le proprietà dei nove flessi, e delle quattro terne di rette sizigetiche.

Assume poi per triangolo fondamentale delle coord. la terna reale delle rette sizigetiche e dimostra rapidamente la reciprocità che ha luogo fra i 9 flessi e le loro *polari armoniche* rispetto ad una conica del fascio. Con ciò egli trova le equazioni di nove coniche coniugate al Δ fondamentale rispetto ad ognuna delle quali ogni flesso ha per polare una retta polare armonica, e quindi ognuna di esse stabilisce la dualità fra i flessi e le polari armoniche della cubica. Queste coniche sono indi distinte in tre terne coniugate.

Analogamente partendo dalle altre terne sizigetiche, accenna all'esistenza di 36 coniche analoghe distinte in 4 sistemi di 9 ciascuno; e quindi accenna alle questioni duali per le curve di 3ª classe.

Una 2ª parte della memoria tratta di una curva di 3° ordine e di una di 3ª classe tali che la conica polare di un punto qualunque rispetto alla prima, e la conica polare di una retta qualunque rispetto alla seconda siano fra loro armoniche (cioè alla prima si possano inscrivere triangoli autoconiugati alla seconda e dualmente).

Egli dimostra la possibilità di tale esistenza e le chiama *cubiche associate* e dimostra che l'Hessiana e la Cayleyana dell'una sono Cayleyana ed Hessiana dell'altra.

Passa poi a dimostrare l'esistenza di un fascio di cubiche le cui curve sono a due a due associate. Le curve della schiera sono la Cayleyana di quelle del fascio e viceversa, e tutte hanno le stesse terne sizigetiche di rette e di punti.

Egli perviene al modo di costruire di ogni curva la sua associata.

Nella 3ª parte si propone di trovare il luogo dei punti di cui le coniche polari rispetto a due cubiche f, f' di uno stesso fascio sizigetico siano, l'una come luogo, l'altra come inviluppo, armoniche, e trova che il luogo è un'altra cubica f_1 del fascio. Dualmente per la schiera.

Altre svariate considerazioni riguardanti terne e quaterne di coppie di cubiche associate di due fasci di curve, insieme a tutte le cose trattate precedentemente, fanno di questa memoria una delle più belle ed interessanti delle opere di Battaglini.

85. *Sull'equazione differenziale ellittica.* (T. A. L. R. s. III, v. IV, pagine 49 50, 1879-80; M. A. L. R. s. III, v. V, pp. 50-57, 1879-80; G. B. v. XIX, pp. 65-75, 1881).

Egli si propone di mostrare come un' equaz. fra tre variabili, quadratica rispetto a ciascuna di esse, possa rappresentare sotto certe condizioni un integrale particolare dell'equaz. differ. ellittica a tre variabili, o anche l'integrale generale dell'equaz. differ. ellittica a due variabili, se la terza variabile si ritenga come costante arbitraria. Egli cita il Cayley che aveva svolto lo stesso argomento diversamente nel suo Trattato sulle funzioni ellittiche.

Pone simbolicamente $\varphi(xyz) = a^2_x b^2_x c^2_x = a'^2_x b'^2_x c'^2_x$ e trova che la sua equazione differenziale diviene

$$\Sigma(xdx)\sqrt{(aa')^2 b^2_y b'^2_y c^2_z c'^2_z} = 0.$$

Si limita a considerare il caso in cui la φ sia simmetrica rispetto ad x, y, z, indi suppone che ogni espressione sottoposta al radicale si decomponga in due fattori biquadratici di una sola variabile della forma $f^4_y f^4_z$, e l'equaz. differ. prende la forma di equaz. differ. ellittica

$$\frac{(xdx)}{\sqrt{f^4_x}} + \frac{(ydy)}{\sqrt{f^4_y}} + \frac{(zdz)}{\sqrt{f^4_z}} = 0.$$

Dopo prova che, data quest' equaz. si può soddisfare alla condizione di scomposizione supposta e si può pervenire alla φ, che perciò è un integrale particolare di essa. Se poi una delle variabili z si ritiene costante la $\varphi(x, y, z) = 0$ è integrale completo dell'equaz. diff. ellittica

$$\frac{(xdx)}{\sqrt{f^4_x}} + \frac{(ydy)}{\sqrt{f^4_y}} = 0.$$

Passa poi all'interpretazione geometrica della $\varphi = 0$; essa stabilisce una dipendenza fra elem. di una forma di 1ª specie tale che datine due restano individuate due posizioni del terzo. Trova le condizioni perchè queste due posizioni coincidano; e interpreta la proprietà geometrica corrispondente alla supposta decomposizione in fattori detta precedentemente.

86. *Sui connessi ternarii di 1° ordine e di 2ª classe.* (A. A. N. s. I, v. IX, n. 4, pp. 1-16, 1882; Sunto in R. 1880, pp. 110-111; G. B. v. XX, pp. 230-248, 1882).

Egli si propone di studiare e discutere i connessi di punti e di rette rappresentati da una forma bilineare nelle coordinate dei punti di un piano, e delle rette di un altro piano, che poi suppone sovrapposto al primo.

Egli adotta la notazione simbolica per la forma bilineare come avevan fatto Clebsch e Gordan, ma in modo da avere pel connesso coniugato una equaz. più semplice, e discute gli elem. singolari.

Suppone poi i piani sovrapposti e prende a considerare la proiettività che nel piano si stabilisce pel dato connesso, ne discute gli elementi uniti e molti dei casi a cui essi danno luogo, e stabilisce l' equaz. canonica del connesso.

Poi nella proiettività considera gli elementi consecutivi di un determinato elemento, e trova la equaz. dei connessi a cui appartengono due qualunque degli elem. consecutivi corrispondenti fra loro. In particolare considera le proiettività cicliche (che egli chiama al solito *involuzioni parziali* e *totali* di ordine n).

Indi passa a parlare della *coincidenza* di due connessi, e della sua *coniugata*; poi del fascio di due connessi (che egli chiama *serie semplice*) e dei connessi speciali che vi appartengono.

Poi considera tre connessi e la rete a cui dànno luogo (egli la chiama *serie doppia*); poi 4 connessi e il sistema triplo dei connessi a cui dànno luogo (*serie tripla*).

87. *Sulle forme ternarie bilineari.* (M. A. L. R. s. III, v. IX, 1880-81, pp. 3-16; T. A. L. R. s. III, v. V, pp. 24-26, 1881-82; G. B. v. XXI, pagine 50-67, 1883).

La Memoria 86 lo conduce naturalmente a fare questo studio. In luogo di considerare l'equaz. di un connesso in coordinate di punti e di rette, egli considera l' equazione bilineare nelle coord. di punti di un piano e in quelle di punti di un altro piano, adottando sempre come al solito, la notazione simbolica. Quest'equaz. fa corrispondere ad un punto di un piano, una punteggiata e quindi una retta nell' altro piano, e viceversa, e quindi stabilisce fra i due piani una *correlazione*. Dall'equaz. stessa ne deduce un'altra che fa corrispondere ad una retta del primo piano un fascio di raggi e quindi un punto del secondo piano e questa nuova forma bilineare egli chiama *congiunta* alla prima

Poscia mette entrambe le forme bilineari sotto la *forma canonica*, e discute gli elementi singolari. Suppone in seguito che i piani coincidano e trova il luogo dei punti che appartengono alle rette corrispondenti, e l'inviluppo duale, e trova naturalmente un luogo di 2° ordine e un inviluppo di 2ª classe, che hanno fra loro un doppio contatto. Discute indi tutti i casi che possono avverarsi in riguardo alle posizioni dei *punti* di contatto e del *polo* di contatto, e le loro rette corrispondenti, pervenendo alla *correlazione omologica* ed alla *correlazione polare*.

Passa poi a considerare le *linee involutorie* della correlazione; poi le figure che vi si corrispondono consecutivamente, e fa osservare che queste a due a due sono correlative con la stessa terna di elementi involutorii, o omografiche colla stessa terna di elementi uniti. Poi trova l'equaz. della linea di 2° ordine cui appartengono i punti che si corrispondono alternativamente e successivamente e l'inviluppo di 2ª classe delle rette analoghe. Termina col considerare le correlazioni nelle quali questi punti e queste rette formano cicli (che egli chiama *correlazioni periodiche* di ordine λ), e coll'assegnare le forme invariantive fondamentali del sistema delle forme ternarie quadratiche rappresentanti i luoghi e gli inviluppi precedentemente citati.

88. *Sulle forme quaternarie bilineari.* (T. A. L. R. s. III, v. VI, pp. 40-42, 1881-82; M. A. L. R. s. III, v. XII, pp. 233-255, 1881-82; G. B. v. XXI, pp. 293-322, 1883).

Qui l'autore generalizza gli studii della Memoria 87 agli spazii a 3 dimensioni. Considera la forma bilineare nelle coordinate di punti di due spazii, essa fa corrispondere ad un punto del primo spazio un piano punteggiato dell'altro, e viceversa, e quindi stabilisce una *correlazione* fra i due spazii. Dalla forma bilineare ne deduce un'altra in coordinate di piani che dice *forma congiunta* della prima; e da entrambe ne deduce due altre in coordinate di rette che egli chiama *forme intermedie* tra le due prime, che stabiliscono una corrispondenza fra le rette dei due spazii, in modo che ad ogni retta del primo spazio corrispondano tutte le rette di un complesso lineare speciale di rette (cioè che si appoggiano ad una stessa retta). Tutte queste forme egli le riduce a *forma canonica* e discute gli elementi singolari.

Suppone in seguito che i due spazii siano sovrapposti, e trova che la retta comune ai due piani, corrispondenti a uno stesso punto nei due sensi, genera un complesso lineare, che il luogo dei punti ai quali appartengono i piani corrispondenti, e l'inviluppo duale formano due quadriche $(\theta\theta)$, $(\Theta\Theta)$ entrambe rigate o non, rispetto alle quali uno stesso tetraedro dipendente da un' equaz. di 4° grado è formato di elementi involutorii nella correlazione, e i vertici di esso sono vertici di un quadrilatero semplice gobbo formato di generatrici rettilinee comuni alle due quadriche. L'esame di casi speciali di questo tetraedro lo conduce alla *correlazione involutoria parziale*, ed alla *correlazione involutoria totale* (polarità) ed agli altri casi particolari della correlazione fra due spazii.

Le rette corrispondenti che si segano generano un complesso di 2° grado. Un altro complesso di 2° grado è costituito dalle rette su cui un punto qualunque e la traccia col piano corrispondente, con i due punti comuni con la quadrica luogo $(\theta\theta)$ formano una quaterna di dato rapporto anarmonico (o inverso ad esso). Questo complesso e il suo duale sono involutorii nella correlazione.

Passa poi a considerare le figure che nella correlazione si corrispondono consecutivamente, ed osserva che queste a due a due sono correlative con lo stesso tetraedro di elementi involutorii, e a due a due sono omografiche con lo stesso tetraedro di elementi uniti. Indi trova l' equaz. della quadrica cui appartengono i punti che alternativamente e successivamente si corrispondono, e l'equaz. dell' inviluppo dei piani analoghi; e l' equaz. del complesso tetraedrale cui appartengono le rette che successivamente si corrispondono. Termina col considerare le correlazioni in cui questi elementi successivi formano cicli (egli chiama in tal caso le correlazioni *parziali* o *totali* di ordine λ).

89. *Sopra una quistione di Geometria proiettiva.* (A. I. 1. N. 1882).

Si propone di far notare che una conica, come luogo di punti può degenerare non solo in una coppia di rette distinte, ma anche in due rette coincidenti con un unico punto singolare, e la degenerazione correlativa di una conica inviluppo di rette.

Egli fu indotto a questa elementare questione dal prof. A. S a n n i a, che lo richiedeva di esaminare il luogo dei centri di prospettiva di due punteggiate proiettive, che strisciano sui loro sostegni in modo che nel punto comune coincidano sempre due punti corrispondenti (il luogo è un'iperbole che ha per asintoti le date rette); e di esaminare il caso particolare in cui le due punteggiate sono simili (nel quale la conica si riduce alla retta all'∞ considerata doppia con un determinato punto singolare). L' A. tratta anche il problema correlativo.

90. *Intorno ad un' applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche alla integrazione dell'equazione differenziale ellittica.* (A. A. N. s. II, v. II n. 4, pp. 1-11, 1888; Sunto in R. 1885, pp. 200-201; Sunto in R. A. L. R. s. IV, v. I, pp. 653-657, 1884-85; G. B. v. XXIV, pp. 128-140, 1886).

Egli suppone che le coordinate di un punto V di un piano siano proporzionali a tre forme quadratiche a^2_t, b^2_t, c^2_t; ad ogni valore di t corrisponde un punto del piano appartenente ad una linea di 2° ordine F di cui egli determina l'equazione.

Fa l'ipotesi duale nel piano e trova l'equazione della linea di 2ª classe f inviluppata dalle rette v le cui coord. sono proporzionali a tre forme quadratiche A^2_T, B^2_T, C^2_T.

Dopo di ciò suppone che i parametri t e T siano in tale dipendenza fra loro che il punto V e la retta v, che ad essi corrispondono, si appartengano. In tal caso ad ogni valore di t corrispondono due valori di T, che determinano le due rette $v'v''$, che il punto V determinato da t ha comune con l'inviluppo di 2ª classe f; e viceversa. E spiega il risultato geometrico delle coincidenze della T o t.

Differenzia poi l' equaz. che indica la dipendenza fra t e T e trova una equaz. differ. ellittica e il suo integrale completo.

Fa in seguito delle ipotesi particolari sulle forme quadratiche; per es. che siano a due a due armoniche; o che si annullino i loro invarianti simultanei e trova le forme speciali dell'equaz. diff. e dei loro integrali.

91. *Sulle forme binarie bilineari.* (A. A. N. s. II, v. II, n. 6, pp. 1-14, 1888; Sunto in R. 1885, pp. 210 211; G. B. v. XXV, pp. 281-297, 1887).

In questa Memoria fa dapprima lo studio della proiettività in una forma di 1ª specie in base alla sua equazione bilineare nelle coord. omog. di due elem. della forma messa sotto forma simbolica. Egli riduce l'equaz. alla forma canonica e mette in luce i 3 invarianti della proiettività I, K, J, di cui l'annullarsi esprime che la proiettività è *involutoria*, o *singolare*, o *parabolica*. E trova la condizione perchè la proiettività sia *ciclica* (qui adotta la frase « sia ciclicamente proiettiva o periodica di ordine n »).

Poi considera il fascio di due proiettività, e nota che in esso ve ne è una involutoria, due singolari, due paraboliche, due cicliche di ordine n: poi trova il significato geometrico di alcuni invarianti simultanei delle due proiettività, e ne fa delle applicazioni.

Considera in seguito una rete di proiettività definita da tre proiettività, e poi un sistema ∞^3 di proiettività definito da 4 proiettività e su queste risolve le analoghe questioni di sapere le involuzioni, le proiettività singolari, le paraboliche, ecc.

Dopo ciò suppone che le coord. omog. di un elem. di una forma di 2ª specie siano proporzionali a 3 forme bilineari; ad ogni coppia di valori arbitrarii attribuiti ai parametri di queste forme bilineari, e quindi rappresentanti due elementi u', u'' di due forme di 1ª specie, corrisponderà un elemento V nella forma di 2ª specie (un punto per es. in un piano). E mostra che se il punto V descrive nel piano una retta v gli elementi $u'u''$ descrivono una proiettività, e questa proiettività sarà *involuzione* se la retta v descrive un determinato fascio di centro V, sarà *singolare* se la retta v inviluppa una determinata conica Σ, e sarà *parabolica* se la retta v inviluppa un'altra conica Θ, sarà *ciclica* se la retta v inviluppa una terza conica Θ_n, e queste Θ sono tutte bitangenti a Σ e il polo di contatto è V_0, e prosegue con altre belle considerazioni.

In seguito mette un'analoga corrispondenza fra le coord. dei punti dello spazio a 3 dimensioni e quattro forme bilineari, e nota subito che in tal caso alle coppie di punti di una punteggiata corrispondono non tutti i punti dello spazio, ma soltanto quelli di una sup. quadrica Ω. Alle coniche della quadrica corrispondono coppie di una proiettività nella forma di 1ª specie, e queste saranno in *involuzione* se i piani delle coniche passano per un unico punto V_0, sono *singolari* se i piani delle coniche inviluppano una quadrica Σ, sono paraboliche se inviluppano un'altra quadrica Θ, sono cicliche di ordine n se inviluppano un' altra quadrica determinata Θ_n, e le Θ hanno tutte una linea di contatto con Σ ed il polo del piano di contatto è V_0. E va innanzi con considerazioni sulle proiettività armoniche.

92. *Sui punti sestatici di una curva qualunque. Nota prima.* (R. A. L. R. s. IV, v. IV, 2° sem. pp. 238-246, 1888).

C a y l e y (*On the Sextatic Points of a plane Curve*, Phil. Trans. 1865, pagine 545-578) aveva risoluto il problema di determinare i punti di una linea di ordine qualunque nella quale essa ha un contatto *seipunto* con una conica, e la sua soluzione fu verificata da S p o t t i s w o o d e (Ibid. pp. 653-669). Qui l'A. si propone di risolvere la questione mediante la teoria dei *Reciprocanti* di S y l v e s t e r.

Indica con $f(X, Y) = 0$ l'equaz. della Curva di ordine r, in coord. cartesiane e con la solita forma $AX^2 + 2HXY + \ldots = 0$ quello della conica.

Stabilisce con le derivate le condiz. perchè la conica abbia in un punto p di C_r un contatto di 5° ord. ed eliminando i coeff. della conica trova per risultato

$$-y''(9y''^2 y^{v} - 45y''y'''y^{iv} + 40y'''^3) = 0 \quad \text{oppure} \quad -x''(9x''^2 x^{v} - 45x''x'''x^{iv} + 40x'''^3) = 0,$$

secondo che sia X o Y la variabile indipendente. Escludendo i flessi della C_r restano gli altri due fattori che indica con

$$\Gamma_x = 0 \quad , \quad \Gamma_y = 0 .$$

Osserva che i primi membri sono *Reciprocanti* (secondo S y l v e s t e r) quindi trova

$$\Gamma_x = -y'^{12}\,\Gamma_y \quad , \quad \Gamma_y = -x'^{12}\,\Gamma_x .$$

In seguito applica la notazione simbolica all'equaz. di C_f, e con essa si calcola le derivate $y'y''y'''y^{iv}y^{v}$, le sostituisce in Γ_x e trova con altri simboli per equaz. di grado $15r - 21$

$$9K^2K''' - 45KK'K'' + 40K'^3 = 0 .$$

L' intersezione di questa curva con la C_r dà i punti cercati. Si propone però di ridurre il grado di quest'equazione.

All'uopo ricorre al *principio di trasporto* (*uebertragungsprincip*) di C l e b s c h per calcolarsi i valori di KK'K''K'''. Qui adotta il nome di *transvezioni* per le *ueberschiebungen* di due forme. Esegue questi calcoli e trova i valori di K'K''K''', sempre con notazioni simboliche complicate, espresse in funzioni di K.

Doveva quindi sostituire i valori di KK'K''K''' nella equaz. suddetta, ma si arresta promettendo di farne oggetto di altra comunicazione, che non ha poi più fatta.

93. *Cenno necrologico di Angelo Genocchi.* (R. A. N. 1889, pp. 79-80).

Sedici righi in tutto senza slancio e senza alcuna sua speciale contribuzione.

94. *Elementi di calcolo infinitesimale.* (Napoli, tipogr. de Rubertis, 1889, in-8°, p. 260).

Egli scrisse quest'opera per uso esclusivo degli studenti aspiranti all'Ingegneria, quando in lui si era formata l'opinione che a questi si dovesse apprestare un piccolo corredo di cognizioni fondamentali di Calcolo e con orario limitato: mentre che agli studenti aspiranti al Dottorato e alle Scuole di Magistero si dovessero fare corsi distinti e più estesi.

95. *Geometria analitica cartesiana.* (G. B. v. XXIX, pp. 3-33, 93-132, 195-223, 298-356; 1891).

Una breve introduzione annunzia che egli divide l'opera in 3 parti; nella prima tratterà della Geometria cartesiana, parlando prima dei punti, rette, piani, circoli e sfere, poi delle *coniche*, poi dei *conicoidi* o sup. di 2° grado. In un'appendice avrebbe parlato della Geometria analitica proiettiva; nella terza parte avrebbe trattato della *Rappresentazione geometrica delle forme algebriche.*

Disgraziatamente egli non giunse che a pubblicare il primo capitolo della parte prima, e interruppe quando doveva cominciare le coniche.

96. *Intorno ad una serie di linee di 2° grado.* (R. A. N. 1892, pp. 24-32; G. B. v. XXX, pp. 287-299, 1892).

Qui si propone di esaminare una serie di coniche più generali delle coniche omofocali. Date due coniche concentriche e con gli assi sovrapposti, egli stabilisce l'equaz. di un'altra conica concentrica e con gli assi sovrapposti ai primi, di cui i coeff. dipendono dai coeff. della prima e da un parametro λ, in modo che se le prime sono omofocali, anche la terza è omofocale con esse.

Egli dimostra come si possano facilmente costruire gli assi di una conica della serie; che questa serie è di *indici* 2,2, poichè per ogni punto ne passano 2 soltanto, e ad ogni retta ne sono tangenti due pure; e che il loro inviluppo è una curva di 4° grado composta di 2 coniche simmetricamente situate rispetto agli assi, con ciascuna delle quali ogni conica della serie è bitangente in punti simmetrici rispetto al centro.

Fra le coniche della serie vi sono due circoli; e dippiù vi è un altro circolo per ogni punto del quale le coniche della serie che vi passano sono omofocali.

Trova infine che il luogo dei poli di una data retta rispetto alle coniche della serie è una iperbole equilatera e se ne serve per fare altre belle considerazioni.

Essendo questa ricerca l'utima emanata dal B a t t a g l i n i si potrebbe chiamare questa serie di coniche la *serie di coniche Battaglini.*

97. *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura dei professori Battaglini, Janni e Trudi, 1863-64-65, e poi pubblicato per cura del professore G. Battaglini 1866-1893* (in tutto volumi 31). (Napoli, B. Pellerano).

98. *Complementi di Algebra o Teoria delle equazioni di I. Todhunter. Traduzione dall'inglese di G. Battaglini.* (Napoli, 1ª ed. Trani, 1872, in 8° pp. 438, 2ª ed. Trani, a. 1875, in-8°, 3ª ed. Trani, 1882, in-8°, pp. 449).

99. *Trattato sul Calcolo differenziale con molti esempi di I. Todhunter. Versione dall'inglese con aggiunte di G. Battaglini.* (Napoli 1ª ed. 1872 ?, 3ª ediz. Trani, 1880, in-8° di pp. X+440).

100. *Trattato sul Calcolo integrale e le sue applicazioni con molti esempi* ecc. (Id. di pagine VIII+453 in-8°).

101. *Trattato elementare sulla Meccanica razionale con molti esempi compilato sulle opere di Todhunter, Tait, Steele, Routh ed altri autori da G. Battaglini professore di Geometria superiore nella Università di Roma.* (Vol. I, pp. VIII+467, Vol. II, pp. VIII+475, Napoli, B. Pellerano, 1873, in-8°).

102. *Trattato di Aritmetica di J. Hamblin Smith M. A. Versione dall'inglese adattata all'insegnamento secondario da G. Battaglini professore all'Università di Roma.* (Napoli, Morano, 1878, in-8°, pp. 384).

103. *Algebra elementare di J. Hamblin Smith. Versione.* (Napoli, Morano, 1879, in-8°, pp. 382).

104. *Teoria delle sostituzioni e sua applicazione all'Algebra di Netto. Versione dal tedesco con modificazioni ed aggiunte dell'autore per G. Battaglini pro-*

fessore dell' Università di Roma. (Torino, E. Loescher, 1885, in-8°, di pagine XII+290).

Nel far questa traduzione egli era mosso dal desiderio di diffondere fra noi la conoscenza di una teoria così importante per sé e per le sue svariate applicazioni e di agevolarne lo studio ai giovani delle nostre Università.

APPENDICE

ELENCO DELLE COMMEMORAZIONI PUBBLICATE IN ONORE DI G. BATTAGLINI

a) L. Pinto. *Giuseppe Battaglini. Parole lette dal socio segretario L. Pinto. Adunanza del 5 Maggio 1894.* (Rend. della R. Accad. di Sc. Fis. e Matem. di Napoli, fasc. 3° a 5°).

b) G. Torelli. *Giuseppe Battaglini.* (Rend. del Circ. Matem. di Palermo. T. VIII, 1894. Adunanza del 13 Maggio 1894).

c) A. Capelli. *Giuseppe Battaglini. Cenno biografico.* (Giorn. di Matem. 1894).

d) E. Pascal. *Giuseppe Battaglini. Cenno necrologico.* (Rivista di Matem. 1894).

e) Z. G. De Galdeano. *Giuseppe Battaglini.* (Progreso mat. pp. 195-196, 1894).

f) P. Fambri. *Giuseppe Battaglini.* (Ist. Ven. Atti, (7), V, pp. 1419-20, 1894).

g) E. D' Ovidio. *Giuseppe Battaglini, parole commemorative.* (Atti Acc. Torino, XXIX, pp. 678-679, 1894).

h) E. D' Ovidio. *Commemorazione del socio Giuseppe Battaglini letta dal socio E. d' Ovidio nella seduta dell' 8 giugno 1895.* (Mem. R. Acc. dei Lincei, Classe Sc. Fis. mat. e nat. Ser. 5, Vol. I, pp. 557-610).

i) F. Amodeo. *Giuseppe Battaglini e le sue Opere.* (Vol. XXXVI, degli Atti dell'Accademia Pontaniana, di pp. 64, 1906).