LA CURVA DI ABEL DI GONALITA' 38

NOTA

DEL

PROF. FEDERICO AMODEO (a NAPOLI)

Nella Memoria di ABEL, che l'A. non potette avere il piacere di veder pubblicata e che non apparve nemmeno nella 1ª ediz. delle sue Opere, ma fu soltanto inserita nella 2ª ediz. pubblicata a cura di L. SYLOW e S. LIE, fu posto per la prima volta il problema della *gonalità* delle curve in un senso diverso da quello che ora intendiamo, che diremo *senso abeliano*. ABEL dette la soluzione di questo problema nel § 7 della Memoria, nel senso di trovare il minimo gruppo di punti d'incontro della curva con un sistema di curve che passano per un determinato numero di suoi punti fissi. RIEMANN riprese questo concetto cercando i gruppi di punti segati sulla curva data da curve che in seguito si dissero *curve aggiunte*, includendovi anche i gruppi di punti che sono segati da rette e curve che non sono completamente aggiunte, ma parte di curve aggiunte. Questo é il *senso riemanniano* della *gonalità*. ABEL fece applicazione del suo concetto nel § 8 della citata Mem. ad una curva, la prima che gli venne sotto mano, di ordine 14, ma di grado 13 nella y e di grado 5 nella x. Egli ne scrisse la equazione così:

$$\chi(y) = 0 = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + \dots + p_{12} y^{12} + y^{12}$$

supponendo che

$$p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7 \ p_8 \ p_9 \ p_{10} \ p_{11} \ p_{12}$$

siano funzioni di x di grado

$$2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 3 \ 4 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 1.$$

(1) ABEL, *Mémoir sur une propriété generale d'une classe très étendue de fontions transcendentes*. presentata il 1826 all'Accademia di Francia c pubblicata nel 1841 a Paris nel vol. VII dei *Mémoirs presentés par divers Savants*.

Applicando il metodo generale da lui ideato trovò che il minimo numero degli integrali abeliani indipendenti inerenti a questa curva, numero che egli indica con γ, è 38.

Cosicchè sulla curva che egli prese ed esaminare la serie dei minimi gruppi di punti che si può ottenere è la serie lineare g^1_{38}, se non si tien conto delle serie determinate dalle rette parallele agli assi di coordinate.

Questa curva si può considerare regolare nel suo ordine, poichè i suoi punti doppi non sono legati da alcuna relazione di dipendenza; quindi essa deve trovarsi fra le curve regolari nel loro ordine, per le quali il *triangolo parabolico* (2) da me costruito, che le contiene tutte, dà la *gonalità* nel *senso abeliano* di ciascuna di queste curve di qualunque ordine e di qualunque genere, facendo astrazione (è bene ripetere) dalle serie segnate da rette o curve non completamente aggiunte.

Questo triangolo, opportunamente prolungato, assegna per le curve di ordine 14 le seguenti serie lineari semplicemente infinite segate da curve aggiunte *minime* (che assegnano appunto la *gonalità* nel senso abeliano di ciascuna di queste curve a cominciare da quella di genere 78 ed a finire a quella di genere zero) (3).

$$| g^1_{13}\, g^1_{12} \,|\, g_{22}^1\, g^1_{21}\, g^1_{20} \,|\, g^1_{29}\, g^1_{28}\, g^1_{27}\, g^1_{26} \,|\, g^1_{34}\, g^1_{33}\, g^1_{32}\, g^1_{31}\, g^1_{30} \,|$$
$$| g^1_{37}\, g^1_{36}\, g^1_{35}\, g^1_{34}\, g^1_{33}\, g^1_{32} \,|\, g^1_{38}\, g^1_{37}\, g^1_{36}\, g^1_{35}\, g^1_{34}\, g^1_{33}\, g^1_{32} \,|$$
$$| g^1_{37}\, g^1_{36}\, g^1_{35}\, g^1_{34}\, g^1_{33}\, g^1_{32}\, g^1_{31}\, g^1_{30} \,|$$
$$| g^1_{34}\, g^1_{33}\, g^1_{32}\, g^1_{31}\, g^1_{30}\, g^1_{29}\, g^1_{28}\, g^1_{27}\, g^1_{26} \,|$$
$$| g^1_{29}\, g^1_{28}\, g^1_{27}\, g^1_{26}\, g^1_{25}\, g^1_{24}\, g^1_{23}\, g^1_{22}\, g^1_{21}\, g^1_{20} \,|$$
$$| g^1_{22}\, g^1_{21}\, g^1_{20}\, g^1_{19}\, g^1_{18}\, g^1_{17}\, g^1_{16}\, g^1_{14}\, g^1_{13}\, g^1_{12}\, g^1_{11} \,|$$
$$| g^1_{13}\, g^1_{12}\, g^1_{11}\, g^1_{10}\, g^1_{9}\, g^1_{8}\, g^1_{7}\, g^1_{6}\, g^1_{5}\, g^1_{4}\, g^1_{3}\, g^1_{2} \,|\, g^1_{2}\, g^1_{1} \,|$$

Da questo elenco risulta che l'unica curva di gonalità 38 fra quelle di ordine 14 è la curva C^{14} con 20 punti doppi indipendenti; essa è di genere $78 - 20 = 58$.

Su questa curva C^{14}_{58} le curve C^6 aggiunte segano una serie g^7_{44} completa lineare, e quelle chc passano per 6 punti fissi generici della

(2) Cfr. AMODEO, *Nuovo Metodo per la Geometria delle serie lineari delle curve algebriche*, Rend. R. Acc. Napoli v. 1938 - 39, I° Dic. 1938, p. 16.

(3) Le sette linee che seguono devono supporsi segnate, ciascuna in seguito alla precedente, in unica linea orizzontale e sulle successive serie devonsi sovrapporre i numeri progressivi 0, 1, 2, 3, ..., 78, che indicano i punti doppi posseduti da ciascuna curva.

curva stessa segano una serie lineare g^1_{38}. Cosicchè su questa curva vi sono ∞^6 serie g^1_{38}. Essa è, inoltre, la curva di più alta gonalità fra le curve regolari del 14° ordine.

Abbiamo con questa Nota voluto semplicemente far notare questa coincidenza fra la curva di ABEL e quella data dal triangolo parabolico.

In una prossima Nota (*Il problema della gonalità*) si farà vedere che, allorquando nelle curve *regolari* nel loro ordine si tien conto anche delle serie segate dai fasci di raggi che hanno i centri nei punti doppi della curva, esse costituiscono una famiglia eccezionale delle curve *singolari* nel loro ordine (1).

---

(1) Cfr. AMODEO, *I numeri ρ_α nel Nuovo Metodo per la teoria delle serie lineari delle curve algebriche*, Rend. Acc. Napoli, v. 10, 1939-40, 11/11 1939.

Finito di stampare
- nella Tipografia -
T O R E L L A
il 20 - 11 - 1940-XIX